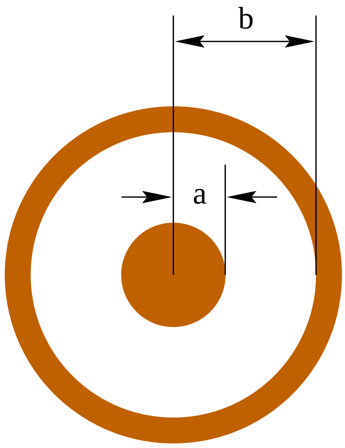
Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

12. Übung

1. **Energiefluß in einem Koaxialkabel:**

   Ein sehr langes Doppelkabel bestehe aus einem inneren Leiter (Radius a) und einem äußeren Leiter, der die Form eines Hohlzylinders hat (Abstand b von der Symmetrieachse). Ein Gleichstrom I fließe durch den inneren Leiter in eine Richtung und durch den äußeren Leiter zurück. Zwischen den beiden Leitern bestehe eine konstante Spannungsdifferenz V, die durch einen Verbraucher (z.B. einen Widerstand) am Ende der Leitungen hervorgerufen wird. Der Ohmsche Widerstand der Leitungen sei zu vernachlässigen.



   (a) Bestimmen Sie das skalare elektrische Potential $\Phi(\vec{r})$ im Zwischenraum ($a < \rho < b$) als Lösung der Laplace-Gleichung. Verwenden Sie dazu die Darstellung des Laplace-Operators in den Koordinaten, die der Symmetrie des Problems angepasst sind. Die auftretende Integrationskonstante soll durch V ausgedrückt werden.

   (b) Bestimmen Sie das elektrische und das magnetische Feld zwischen den Leitern.

   (c) Berechnen Sie den Poynting-Vektor im Zwischenraum. Wie groß ist die pro Zeiteinheit transportierte Energie und in welche Richtung fließt sie?

2. **Energie-Impulstensor des Maxwell-Feldes:**

   Der symmetrische Energie-Impulstensor des elektromagnetischen Feldes lautet in relativistisch kovarianter Form:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu\alpha}F_{\alpha}{}^{\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right] = \frac{1}{4\pi}\left[F^{\mu\alpha}F^{\beta\nu}g_{\alpha\beta} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\alpha\beta}F^{\lambda\sigma}g_{\alpha\lambda}g_{\beta\sigma}\right].$$

   Verifizieren Sie die Beziehung mit den Komponenten des Maxwellschen Spannungstensors

$$T^{ik} = -\frac{1}{4\pi}\left[E^iE^k + B^iB^k + \frac{1}{2}g^{ij}\left(\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)\right] = -\mathcal{T}_{ij}\,.$$

3. **Retardierte Potentiale:**

Zeigen Sie, dass die retardierten Potentiale

$$\Phi_{\text{ret}}(\vec{r},t) = \int dV' \, \frac{\varrho(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \,, \qquad \vec{A}_{\text{ret}}(\vec{r},t) = \frac{1}{c} \int dV' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

die Lorenz-Eichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi = 0$ erfüllen.

4. **Retardierte Felder einer uniform bewegten Punktladung:**

Die retardierten Potentiale einer Punktladung q (Liénard-Wiechert Potentiale) lauten bezüglich eines Inertialsystems I

$$\Phi_{\text{ret}}(\vec{r},t) \;=\; \left(\frac{q}{R(t') - \vec{R}(t')\cdot\vec{v}(t')/c}\right) \,, \qquad \vec{A}_{\text{ret}}(\vec{r},t) = \Phi_{\text{ret}}(\vec{r},t)\,\frac{\vec{v}(t')}{c} \,,$$

wobei die Geschwindigkeit $\vec{v}(t')$ der Punktladung sowie der Abstandsvektor $\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_0(t')$ zwischen dem Aufpunkt $\vec{r}$ und der Position $\vec{r}_0(t')$ der Punktladung (vorgegebene Trajektorie) jeweils zur retardierten Zeit $t' = t'(t,\vec{r}) = t - R(t')/c \equiv t_{\text{ret}}$ auszuwerten sind.

Berechnen Sie das retardierte elektrische und magnetische Feld einer sich uniform bewegenden Punktladung ($\vec{v}(t') = \vec{v}_0 = const.$).

Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen den retardierten Feldern $\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{r},t)$ und $\vec{B}_{\text{ret}}(\vec{r},t)$ mit den Ergebnissen für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$, die Sie durch Lorentz-Transformation der Felder $\vec{E}\,'$ und $\vec{B}\,'$ bezüglich des Ruhesystems I' in das Inertialsystem I erhalten.

(Hinweis: Siehe Aufgabe 3 auf dem 3. Übungsblatt.)