Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

4. Übung

1. **Elektrisches Feld einer Ladungsverteilung und Gaußscher Integralsatz:**
Die Grundgleichung der Elektrostatik $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r})$ lautet in der integralen Form:

$$\int\limits_V d^3r\, \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \underbrace{\int\limits_{\partial V} \vec{df} \cdot \vec{E}(\vec{r})}_{\text{el. Fluß durch Oberfläche } \partial V} = 4\pi \underbrace{\int\limits_V d^3r\, \rho(\vec{r})}_{\text{Ladung } Q_V \text{ innerhalb von } V} \,.$$

Es soll das elektrische Feld einer homogen geladenen Kugel (Radius R) mit der Raumladungsdichte $\rho(r) = \rho_0\, \Theta(R - r)$ mit $\rho_0 = const.$ berechnet werden.

a) Warum ist das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ sphärisch symmetrisch, d.h., $\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\, \vec{e}_r$ mit $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$?

b) Mathematische Ergänzungen:

i. Leiten Sie den Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ in Kugelkoordinaten her.

ii. Formulieren Sie anschließend die Divergenz des Vektorfeldes $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ in Kugelkoordinaten.

iii. Wie lauten die Komponenten df_i des Oberflächenelements $\vec{df} = df_r\, \vec{e}_r + df_\vartheta\, \vec{e}_\vartheta + df_\varphi\, \vec{e}_\varphi$ in Kugelkoordinaten?

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes die radiale Feldkomponente $E_r(r)$ für die angegebene Ladungsverteilung $\rho(r)$.

2. **Die Diracsche δ-Funktion:**
Eine Darstellung (Funktionenschar) $\delta_\eta(x), \eta \geq 0$ der Diracschen δ-Funktion (Distribution) in einer Raumdimension ist charakterisiert durch die Eigenschaften:

$$\lim_{\eta\to 0} \delta_\eta(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & : & x \neq 0 \\ \infty & : & x = 0 \end{array} \right. \,, \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) = \lim_{\eta\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_\eta(x) = 1\,.$$

Unter Beachtung der Reihenfolge von Integration und Limesbildung schreiben wir in Kurzform $\delta(x) = \lim_{\eta\to 0} \delta_\eta(x)$. Gegeben sei ferner die Menge aller beliebig oft differenzierbarer und für $|x| \to \infty$ beschränkter (Test-)Funktionen $f(x)$.

a) Zeigen Sie, daß die Funktionen (η reell) $\delta_\eta(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{\eta^2}}}{\sqrt{\pi}\,\eta}\,, \qquad \delta_\eta(x) = \dfrac{1}{\pi}\, \dfrac{\eta}{x^2 + \eta^2}$
Darstellungen der δ-Funktion sind.

– bitte wenden –

b) Zeigen Sie mittels einer konkreten Darstellung $\delta_\eta(x)$ folgende Eigenschaften der δ-Funktion:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta^{(n)}(x)\,f(x) &= (-1)^n f^{(n)}(0)\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots\,; \qquad \left(f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\,f(x)\right) \\
\delta\left[g(x)\right] &= \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}\,, \quad x_i = \text{einfache Nullstellen von } g(x)\,, \\
\delta(x^2 - a^2) &= \frac{1}{2|a|}\left[\delta(x-a) + \delta(x+a)\right]\,.
\end{aligned}$$

c) Bezüglich Kartesischer Koordinaten ist die dreidimensionale δ-Funktion durch $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$ mit $\int d^3r\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = 1$ definiert. Geben Sie die δ-Funktion in Kugelkoordinaten an. Wie transformiert sich das Volumenelement $dV \equiv d^3r$ von Kartesischen auf Kugelkoordinaten?

3. **Eindeutigkeit der Lösungen von Randwertproblemen**
Zeigen Sie, dass die Lösung der Poisson-Gleichung in einem Volumen V,

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}) \quad \text{für } \vec{r} \in V$$

für Dirichletsche Randbedingungen $\Phi(\vec{r}) = a(\vec{r})$ mit $\vec{r} \in \partial V$ (∂V bezeichnet den Rand von V) eindeutig ist und für Neumannsche Randbedingungen $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}\Phi(\vec{r}) = b(\vec{r})$ mit $\vec{r} \in \partial V$ bis auf eine additive Konstante festgelegt ist.

Hinweis: Betrachten Sie für zwei Lösungen Φ_1 und Φ_2 des Problems die Funktion $u = \Phi_1 - \Phi_2$. Beweisen Sie zunächst mittels der 1. Greenschen Identität die Beziehung $\int_V (\vec{\nabla}u(\vec{r}))^2\,d^3\vec{r} = 0$ und folgern Sie daraus die Eindeutigkeit.

4. **Greensche Funktion der Poisson-Gleichung:**
Es soll jeweils die Greensche Funktion der Poisson-Gleichung in einer und zwei Dimensionen durch Lösen der entsprechenden Differentialgleichungen bestimmt werden.

a) *Dimension* $d = 1$*:* Zeigen Sie zunächst, dass in einer Dimension die Delta-Funktion die Darstellung

$$\delta(x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\mathrm{sgn}(x) \qquad \text{mit} \qquad \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

hat. Bestimmen Sie damit durch Lösen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x, x') = \delta(x - x')$$

die Greensche Funktion $G(x, x')$ für die Poisson-Gleichung in einer Dimension.

b) *Dimension* $d = 2$*:* Bestimmen Sie die Greensche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}\,')$ in zwei Dimensionen durch Lösen der Differentialgleichung

$$\Delta_{\vec{r}}\,G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')\,.$$

Gehen Sie dabei vom Ansatz $G(\vec{r}, \vec{r}\,') = G(|\vec{r} - \vec{r}\,'|)$ aus, der durch die Translations- und Rotationsinvarianz des Laplace-Operators nahegelegt wird. Der Laplace-Operator in zwei Dimensionen lautet in Polarkoordinaten (ρ, ϕ)

$$\Delta_{\vec{r}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

Hinweis: Konkretisieren Sie für dieses zweidimensionale Problem den Gaußschen Satz.