Theoretische Elektrodynamik WS 2011/2012

Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

---

5. Übung

1. **Kugelkondensator:**

   Zwei konzentrische leitende Kugelschalen (Radien $R_1 < R_2$) tragen die Ladungen $Q_1 = Q$ und $Q_2 = -Q$. Finden Sie:

   a) das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ im ganzen Raum

   b) das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ im ganzen Raum (Randbedingung $\phi(\infty) = 0$)

   c) den Zusammenhang zwischen den Ladungen und den Potentialwerten der Kugelschalen.

2. **Homogen geladener Stab:**

   Ein (unendlich) dünner Stab der Länge L trage eine homogen verteilte Gesamtladung Q. Der Stab liege entlang der z-Achse symmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.

   a) Verifizieren Sie den Ausdruck für das vom Stab erzeugte Potential ($r_\perp = \sqrt{x^2 + y^2}$)

   $$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{L} \ln \left| \frac{\sqrt{r_\perp^2 + (z - \frac{L}{2})^2} - (z - \frac{L}{2})}{\sqrt{r_\perp^2 + (z + \frac{L}{2})^2} - (z + \frac{L}{2})} \right| .$$

   b) Wie verhält sich $\Phi(\vec{r})$ in großer Entfernung $|\vec{r}| = r = \sqrt{r_\perp^2 + z^2} >> L$ vom Ursprung (Fernfeldnäherung)? (Hinweis: Taylor-Entwicklung des Potentials in L/r bis einschließlich der Terme $\sim L^2/r^2$.)

3. **Earnshaw-Theorem:**

   Das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ in einem ladungsfreien Raumvolumen V mit Rand ∂V ist Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\phi(\vec{r}) = 0$. Die felderzeugende Ladungsdichte $\rho(\vec{r}\,')$ befinde sich außerhalb von V.

   a) Zeigen Sie zunächst den folgenden *Mittelwertsatz*:
   Der Wert des Potentials $\phi(\vec{r}_0)$ an einer Stelle $\vec{r}_0$ innerhalb von V (nicht auf ∂V) ist gleich dem Mittelwert des Potentials $\overline{\phi}_{\partial K_\varepsilon} = \int_{\partial K_\varepsilon} df\, \phi(\vec{r}) / \int_{\partial K_\varepsilon} df$ auf der Oberfläche ∂K_ε einer Kugel K_ε (Mittelpunkt $\vec{r}_0$ und beliebiger Radius ε, $K_\varepsilon \subset V$).
   Hinweis: Verwenden Sie das 2. Greensche Theorem

   $$\int_{K_\varepsilon} d^3r\; (\psi(\vec{r})\Delta\chi(\vec{r}) - \chi(\vec{r})\Delta\psi(\vec{r})) = \int_{\partial K_\varepsilon} d\vec{f} \cdot \Big(\psi(\vec{r})\vec{\nabla}\chi(\vec{r}) - \chi(\vec{r})\vec{\nabla}\psi(\vec{r})\Big)$$

   mit folgender Wahl für die skalaren Funktionen: $\psi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$ und $\chi(\vec{r}) = \phi(\vec{r})$.

   b) Zeigen Sie nun das *Earnshaw-Theorem (1842)* angewandt auf die Elektrostatik:

   Im ladungsfreien (leeren) Raum gibt es kein elektrostatisches Potential $\phi(\vec{r})$, welches ein geladenes Teilchen im *stabilen* Gleichgewicht halten könnte.
   Diskutieren Sie die Konsequenzen dieses Theorems hinsichtlich des Problems der Speicherung geladener Teilchen in Fallen.
   (Literaturhinweis → unter Materialien: Earnshaw, S., *On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether.*, 1842, Trans. Camb. Phil. Soc., 7, pp 97-112.)

– bitte wenden –

4. **Generierende Funktion für die Legendre-Polynome:**

Zur Deduktion der Fernfeldnäherung in Aufgabe 2, Teil b) haben Sie möglicherweise die führenden Beiträge (bis zur Ordnung $(L/r)^2$) zum Integral

$$\phi(\vec{r}\,) = \frac{Q}{L\,r} \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{dz'}{\sqrt{1 - 2\frac{z}{r}\frac{z'}{r} + (\frac{z'}{r})^2}} \text{ berechnet.}$$

a) Untersuchen Sie das asymptotische Verhalten dieses Potentials unter Verwendung der generierenden Funktion für die Legendre-Polynome $P_n(x)$:

$$g(x,t) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, t^n\,, \quad |t| < 1\,, \quad |x| \leq 1 \quad x = \frac{z}{r}\,, \quad t = \frac{z'}{r}.$$

Was ergibt sich für die niedrigsten Legendre Polynome ($n = 0, 1, 2$)? Schreiben Sie das Potential $\phi(\vec{r})$ in Termen von Legrendre-Polynomen bis zur Ordnung $(L/r)^2$ auf.

b) Leiten Sie die Rekursionsformel $(2n+1)x\,P_n(x) = (n+1)\,P_{n+1}(x) + n\,P_{n-1}(x)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ her.