# Theoretische Elektrodynamik WS 2011/2012

Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
*http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre*

## 6. Übung

1. **Leitende Kugel im Feld einer Punktladung:**

   Eine leitende Kugel am Ursprung (Radius $R$) befindet sich im äußeren elektrostatischen Feld einer Punktladung $q$ am Ort $\vec{r}_\mathrm{q}$ (mit $|\vec{r}_\mathrm{q}| \geq R$). Bestimmen Sie das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ unter den Randbedingungen $\Phi(|\vec{r}| = R) = 0 = \Phi(|\vec{r}| \to \infty)$ mittels der Bildladungsmethode.
   (Hinweis: Verwenden Sie hierzu eine geeignete Bildladung $\tilde{q}$, welche auf der Verbindungsachse vom Kugelmittelpunkt und der Punktladung $q$ liegt.)

2. **Lösung der Laplace-Gleichung – Separation der Variablen:**

   Bestimmen Sie in Anlehnung an die Vorlesung das Potential $\Phi(x, y, x)$ als Lösung von $\Delta\Phi(x, y, z) = 0$ im Inneren eines quaderförmigen Kastens ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$) auf dessen Oberfläche das elektrostatische Potential $\Phi$ wie folgt vorgegeben sei: die Quaderfläche $y = b$ liege auf vorgegebenem Potential $\Phi_b(x, z) = \Phi_0 \cdot (x/a) \cdot (1 - (x/a)) \cdot \sin(\pi z/c)$, während auf den verbleibenden fünf Quaderflächen $\Phi = 0$ sein soll.
   Wie gehen Sie vor, wenn auf allen 6 Quaderflächen nichttriviale Randbedingungen vorgegeben sind (alle Kanten seien dabei nach wie vor auf Potential $\Phi = 0$).

3. **Homogen geladener Kreisring:**

   In der ($x$-$y$) Ebene liege konzentrisch um die $z$-Achse ein homogen geladener Kreisring mit Radius $a$ und Ladung $Q$.

   a) Schreiben Sie die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ in symmetrieangepaßten Koordinaten auf.

   b) Berechnen Sie das Potential $\phi(\vec{r})$ des Kreisrings.

   c) Geben Sie die führenden Beiträge in Potenzen von $\frac{a}{r}$ an ($r = |\vec{r}|$).

   d) Geben Sie das Potential $\phi(\vec{r})$ entlang der $z$-Achse an. Was folgt daraus für die Werte der Legendre-Polynome $P_{2n}(0)$?

– bitte wenden –

4. **Orthogonalpolynome:**
Über dem endlichen (oder unendlichen ) Intervall $I$ sei eine stetige positive Gewichtsfunktion (*weight function*) $w(x)$ mit der Eigenschaft gegeben, dass das Integral $\int_I dx\, w(x)\mathcal{P}(x)$ für ein beliebiges Polynom $\mathcal{P}(x)$ existiert. Die Polynome vom Grad $n \geq 0$, für die

$$\langle p_n, p_m \rangle := \int\limits_I dx\, w(x) p_n(x) p_m(x) = \delta_{nm} \quad \text{gilt}\,,$$

heißen (normierte) Orthogonalpolynome zur Gewichtsfunktion $w(x)$ auf dem Intervall $I$.

Betrachten Sie nun das Intervall $I = [-1, 1]$ zusammen mit der Gewichtsfunktion $w(x) = 1$. Leiten Sie die ersten Orthogonalpolynome $p_n(x), n = 0, 1, 2, 3$ her. Gehen Sie dabei von den linear unabhängigen Potenzfunktionen $\tilde{p}_n(x) = x^n$ aus und orthogonalisieren Sie diese mittels des Schmidtschen Verfahrens:

$$p_n(x) = \frac{c_n(x)}{\sqrt{\langle c_n, c_n \rangle}}\,, \qquad c_n(x) = \tilde{p}_n(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \langle \tilde{p}_n, p_m \rangle\, p_m(x)\,.$$

(Zwischen den orthonormalen Polynomen $p_n(x)$ und den Legendre-Polynomen $P_n(x)$ besteht der Zusammenhang: $p_n(x) = \sqrt{(2n+1)/2}\, P_n(x)$).