Theoretische Elektrodynamik WS 2011/2012

Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

7. Übung

1. **Randwertaufgabe:**

   a) Eine Punktladung q befinde sich im Abstand a vor einer leitenden und geerdeten Wand. Bestimmen Sie die Kraft zwischen Ladung und Bildladung sowie die auf der Wand induzierte Flächenladungsdichte σ.

   b) Eine Punktladung q befinde sich im Abstand a bzw. b von zwei aufeinander senkrecht stehenden Metallwänden. Wie lautet die Dirichletsche Greensche Funktion? Welche Kraft erfährt die Punktladung?

2. **Leitende Kugel im homogenen Feld:**

   Eine leitende Kugel (Radius R) befinde sich in einem statischen elektrischen Feld, das in großer Entfernung von der Kugel homogen ist und in z-Richtung zeige. (Das Feld könnte z.B. durch einen Plattenkondensator erzeugt werden, dessen Abmessungen groß sind im Vergleich zum Radius der Kugel.)

   Das Potential $\Phi(\vec{r})$ im Inneren der Kugel ist $\Phi(\vec{r}) \equiv \Phi_0 = konst.$ (warum?)

   Gesucht ist das Potential außerhalb der Kugel. Verwenden Sie dazu Koordinaten, die der Symmetrie des Problems angepasst sind. Überlegen Sie sich zunächst, dass das Potential folgende Randbedingungen erfüllen muss:

$$\begin{aligned} \Phi(R,\theta) &= \Phi_0\,, \\ \Phi(r,\theta) &\xrightarrow{r\to\infty} -E_0 r\cos\theta + Konst. \end{aligned}$$

   Hierbei ist E_0 der Betrag des elektrischen Feldes in großer Entfernung von der Kugel.

3. **Dipol- und Quadrupolmoment einer Ladungsverteilung:**

   Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die kartesischen Komponenten

   a) des Dipolmoments $P_i = \int dV\,\rho(\vec{r})\,x_i$

   b) und des Quadrupolmoments $Q_{ij} = \int dV\,\rho(\vec{r})\,(3x_ix_j - \delta_{ij}\,r^2)$

   von der Wahl des Koordinatenursprungs *unabhängig* sind.
   Steht eine mögliche Abhängigkeit der Komponenten P_i und Q_{ij} gegenüber Verschiebungen des Koordinatenursprungs in Konflikt zu dem tensoriellen Charakter der Multipolmomente?

– bitte wenden –

4. **Multipolmomente von Ladungsverteilungen:**

a) Gegeben sei eine Ladungsverteilung bestehend aus 3 Punktladungen mit Gesamtladung Null: $\rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{a}) - 2q\,\delta(\vec{r}) + q\,\delta(\vec{r}+\vec{a})$.

Berechnen Sie die niedrigsten Multipolmomente (bis einschließlich Quadrupolmomente) der Ladungsverteilung bezüglich kartesischer und sphärischer Basisvektoren.

b) Die Oberfläche einer homogen geladenen, deformierten Kugel werde durch den winkelabhängigen Radius $R(\theta) = R_0\,\left[1 + \frac{a}{2}\,(3\cos^2(\theta) - 1)\right]$ parametrisiert. Berechnen Sie die führenden Multipolmomente $q_{\ell m}$ der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ unter der Annahme kleiner Deformation $a \ll 1$.