Theoretische Elektrodynamik WS 2011/2012

Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

---

2. Übung

1. **Dynamik geladener Teilchen:**

Ein Punktteilchen mit Ruhemasse m_0 und Ladung q bewege sich unter dem Einfluß vorgegebener elektrischer und magnetischer Felder, deren 6 Komponenten durch die Dreiervektoren $\vec{E}(\underline{x})$ und $\vec{B}(\underline{x})$ beschrieben werden. Die relativistische Bewegungsgleichung enthält dann eine Minkowski-Viererkraft von denkbar einfachster Gestalt:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = K^\mu(\underline{x}, \underline{u}) = \lambda\, F^{\mu\alpha}(\underline{x})\, u_\alpha \,.$$

a) Zeigen Sie, daß der Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch sein muß. Wieviele unabhängige Komponenten besitzt ein antisymmetrischer Tensor in $D = 4$ Dimensionen?

b) Der antisymmetrische Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ enthält die Komponenten $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Betrachten Sie die räumlichen Komponenten der Bewegungsgleichung $\dfrac{dp^i}{dt} = \widetilde{K}^i = \lambda\, F^{i\alpha}\, \dfrac{dx^\beta}{dt}\, g_{\alpha\beta}$ und bestimmen Sie den Proportionalitätsfaktor λ sowie die Komponenten F^{i0} und F^{ij} des Feldstärketensors durch Vergleich mit den räumlichen Komponenten der phänomenologisch bekannten (Dreier-)Lorentz-Kraft

$$\vec{\widetilde{K}} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\,\vec{v} \times \vec{B}\,. \tag{1}$$

Wie schreiben sich also umgekehrt die räumlichen (kontravarianten) Komponenten B^k des $\vec{B}$-Feldes?

c) Leiten Sie bezüglich eines Inertialsystems I die "Newtonsche (Dreier-)Beschleunigung"

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{q}{m}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\,\vec{v} \times \vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2}\,(\vec{v} \cdot \vec{E})\right)\,, \qquad m = m_0\gamma\; = m_0 \Big/ \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

einer Punktladung aufgrund der (Dreier-)Lorentz-Kraft (1) her.

2. **Bewegung einer Ladung im homogenen elektrischen Feld:**

Bezüglich eines Inertialsystems I werde eine zuvor im Ursprung des Inertialsystems ruhende Punktladung ($\vec{x}(0) = \vec{x}_0 = 0$ und $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = 0$) in einem konstanten elektrischen Feld $\vec{E}$ beschleunigt.

a) Leiten Sie durch Integration der relativistischen Bewegungsgleichung

$$\ddot{\vec{x}} = \dot{\vec{v}} = \frac{q}{m(\vec{v})}\left(\vec{E} - \frac{\vec{v}}{c^2}\,(\vec{v} \cdot \vec{E})\right)\,, \qquad m(\vec{v}) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}$$

für die gegebenen Anfangsbedingungen das erste Integral der Bewegung $(m(\vec{v}) - m_0)\,c^2 = q\,\vec{x} \cdot \vec{E}$ her.
Was läßt sich über die Bewegung in senkrechter Richtung zum $\vec{E}$-Feld aussagen?

b) Wählen Sie nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\vec{E} \parallel \vec{e}_z$ und lösen Sie diese Differentialgleichung 1. Ordnung für $z(t)$ mittels Variablentrennung (beschleunigte Bewegung entlang der z-Achse).

– bitte wenden –

3. **Elektrische Ladung und Strom:**
Bezüglich eines gegebenen Inertialsystems beschreibt die Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r},t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r},t) = 0$ die Ladungserhaltung in der lokalen Form.

a) Formulieren Sie unter der Annahme homogener Ladungs- und Stromdichte ρ und $\vec{j}$ mittels des Gaußschen Satzes die Ladungserhaltung für ein stromdurchflossenes (zylindrisches) Leiterelement.

b) Schreiben Sie die Kontinuitätsgleichung in relativistisch kovarianter Form auf, indem Sie einen Viererstromdichtevektor j^μ und den Vierer-Nablaoperator mit Komponenten $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$ einführen.