Theoretische Elektrodynamik WS 2011/2012

Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

---

3. Übung

1. **Transformationsgesetz für ein Vierergradientenfeld:**

   Ein Lorentz-Skalarfeld $\phi = \phi(\underline{x})$ besitzt bezüglich aller Inertialsysteme dieselben Werte (Lorentz-Invarianz). Die Abhängigkeit vom Raumzeitpunkt (Weltereignis) $\underline{x}$ ist so zu verstehen, daß die Koordinaten x^μ des Raumzeitpunkts jeweils von der Wahl des zugrundegelegten Inertialsystems abhängen.

   a) Zeigen Sie ausgehend von den Transformationsgleichungen $x'^\mu = x'^\mu(x^\alpha) = L^\mu{}_\alpha x^\alpha$, daß sich die Koordinatenintervalle dx^μ wie kontravariante Komponenten eines Vierervektors (Lorentz-Tensor 1. Stufe) transformieren.

   b) Das totale Differential $d\phi(\underline{x})$ eines Lorentz-Skalarfeldes ist über den Vergleich seiner Werte an infinitesimal benachbarten Raumzeitpunkten definiert (bis Terme $\mathcal{O}(dx^\mu)^2$): $d\phi(\underline{x}) = \phi(\underline{x} + d\underline{x}) - \phi(\underline{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}\, dx^\alpha$. Zeigen Sie, daß sich der Vierergradient $\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha} \equiv \partial_\alpha \phi$ wie kovariante Komponenten eines Vierervektors transformieren. Wie lautet die Argumentation mit Hilfe des Quotiententheorems?

2. **Kovariante Form der Maxwell-Gleichungen:**

   Die Maxwell-Gleichungen lauten in manifest Lorentz-kovarianter Form:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \lambda j^\nu \,, \qquad \partial_\mu F^{*\,\mu\nu} = 0 \,, \qquad \text{mit} \quad F^{*\,\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \tag{1}$$

   Hierbei bezeichnen $F^{*\,\mu\nu}$ die (kontravarianten) Komponenten des zu $F^{\mu\nu}$ dualen Feldstärketensors, j^μ die felderzeugenden Ladungsstromdichten (Quellen), λ eine vom verwendeten Maßsystem abhängige Konstante und $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$ das total antisymmetrische Levi-Civita Symbol:

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = \begin{cases} +1 : & \text{zyklische Vertauschung} \quad (0,1,2,3) \\ -1 : & \text{antizyklische Vertauschung} \quad (0,1,2,3) \\ 0 : & \text{falls zwei Indizes gleich} \end{cases} .$$

   a) Zeigen Sie, daß die inhomogenen Maxwell-Gleichungen $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \lambda j^\nu$ mit der Ladungserhaltung kompatibel sind. Welche Maxwell-Gleichungen werden durch $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \lambda j^\nu$ beschrieben?

   b) Zeigen Sie z.B. die Eigenschaften $\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} = -\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ mittels Heben + Senken von Lorentz-Indizes. Begründen Sie ferner den Zusammenhang mit dem Levi-Civita Symbol in 3 (räumlichen) Dimensionen: $\varepsilon^{0ijk} = \varepsilon^{ijk}$.

   c) Bestimmen Sie die Komponenten $F^{*\,0k}$ und $F^{*\,ij}$ des dualen Feldstärketensors.
   Auf welche Maxwell-Gleichungen führt die Tensorgleichung $\partial_\mu F^{*\,\mu\nu} = 0$?

– bitte wenden –

3. **Transformationsgesetz für elektromagnetische Felder:**

Der elektromagnetische Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ enthält die Komponenten E^k und B^k der elektromagnetischen Felder und transformiert sich als Lorentz-Tensor 2. Stufe gemäß
$F'^{\mu\nu} = L^{\mu}{}_{\alpha} L^{\nu}{}_{\beta} F^{\alpha\beta}$.

a) Leiten Sie unter Zuhilfenahme der expliziten Form der Lorentz-Transformationen $L^{\mu}{}_{\alpha}$ (siehe 1. Übung, 1. Aufgabe) sowie unter Berücksichtigung der Lorentz-Invarianz des Levi-Civita Symbols die Ausdrücke für die Komponenten E'^k des elektrischen und B'^k des magnetischen Feldes bezüglich eines Inertialsystems I' her, welches sich mit einer Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ gegenüber dem (als ruhend aufgefaßten) Inertialssystem I bewegt. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, im Inertialsystem I läge nur ein elektrisches Feld $\vec{E}$ vor (d.h. $\vec{B} = 0$).

b) Bezüglich des Inertialsystems I gilt offensichtlich $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$. Was läßt sich somit über das Skalarprodukt der Dreiervektoren $\vec{E}' \cdot \vec{B}'$ bezüglich I' aussagen?

c) Wie verhalten sich die Dreiervektoren $\vec{E}', \vec{B}'$ und $\vec{v}$ im Grenzfall hoher Geschwindigkeiten?

4. **Differentialoperatoren:**

a) Gegeben seien die beliebigen Skalarfelder Φ, Ψ und das Vektorfeld $\vec{A}$. Formen Sie unter Beachtung der Leibniz-Produktregel folgende Ausdrücke um:

$$\vec{\nabla}(\Phi\Psi)\,, \qquad \vec{\nabla} \cdot (\Phi\vec{A})\,, \qquad \vec{\nabla} \times (\Phi\vec{A})\,.$$

b) Berechnen Sie die elektrischen Felder $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$ für die elektrischen Potentiale $\phi(\vec{r}) = q/r$ mit $q = konst.$ und $\phi(\vec{r}) = \vec{d} \cdot \vec{r}/r^3$ mit $\vec{d} = konst$ (Skizze für $\vec{E}$-Felder!).

c) Betrachten Sie das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$ mit konstantem Drehvektor $\vec{\omega}$ und das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = \kappa \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ für $\vec{r} \neq 0$. Welches der Felder besitzt Quellen und/oder Wirbel?