

Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese.

Von **Bose** (Dacca-University, Indien).

(Eingegangen am 2. Juli 1924.)

Der Phasenraum eines Lichtquants in bezug auf ein gegebenes Volumen wird in „Zellen“ von der Größe h^3 aufgeteilt. Die Zahl der möglichen Verteilungen der Lichtquanten einer makroskopisch definierten Strahlung unter diese Zellen liefert die Entropie und damit alle thermodynamischen Eigenschaften der Strahlung.

Plancks Formel für die Verteilung der Energie in der Strahlung des schwarzen Körpers bildet den Ausgangspunkt für die Quantentheorie, welche in den letzten 20 Jahren entwickelt worden ist und in allen Gebieten der Physik reiche Früchte getragen hat. Seit der Publikation im Jahre 1901 sind viele Arten der Ableitung dieses Gesetzes vorgeschlagen worden. Es ist anerkannt, daß die fundamentalen Voraussetzungen der Quantentheorie unvereinbar sind mit den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik. Alle bisherigen Ableitungen machen Gebrauch von der Relation

$$Q_\nu d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} E,$$

d. h. von der Relation zwischen der Strahlungsdichte und der mittleren Energie eines Oszillators, und sie machen Annahmen über die Zahl der Freiheitsgrade des Äthers, wie sie in obige Gleichung eingeht (erster Faktor der rechten Seite). Dieser Faktor konnte jedoch nur aus der klassischen Theorie hergeleitet werden. Dies ist der unbefriedigende Punkt in allen Ableitungen, und es kann nicht wundernehmen, daß immer wieder Anstrengungen gemacht werden, eine Ableitung zu geben, die von diesem logischen Fehler frei ist.

Eine bemerkenswert elegante Ableitung ist von Einstein angegeben worden. Dieser hat den logischen Mangel aller bisherigen Ableitungen erkannt und versucht, die Formel unabhängig von der klassischen Theorie zu deduzieren. Von sehr einfachen Annahmen über den Energieaustausch zwischen Molekülen und Strahlungsfeld ausgehend, findet er die Relation

$$Q_\nu = \frac{\alpha_{m,n}}{e^{\frac{\epsilon_m - \epsilon_n}{kT}} - 1}.$$

Indessen muß er, um diese Formel mit der Planckschen in Übereinstimmung zu bringen, von Wiens Verschiebungsgesetz und Bohrs Korrespondenzprinzip Gebrauch machen. Wiens Gesetz ist auf die klassische

Theorie gegründet, und das Korrespondenzprinzip nimmt an, daß die Quantentheorie mit der klassischen Theorie in gewissen Grenzfällen übereinstimme.

In allen Fällen scheinen mir die Ableitungen nicht genügend logisch gerechtfertigt. Dagegen scheint mir die Lichtquantenhypothese in Verbindung mit der statistischen Mechanik (wie sie durch Planck den Bedürfnissen der Quantentheorie angepaßt worden ist) für die Ableitung des Gesetzes unabhängig von der klassischen Theorie hinreichend zu sein. Im folgenden will ich die Methode kurz skizzieren.

Die Strahlung sei in das Volumen V eingeschlossen und ihre Gesamtenergie E sei gegeben. Es seien verschiedene Sorten von Quanten von der jeweiligen Anzahl N_s und Energie $h\nu_s$ vorhanden ($s = 0$ bis $s = \infty$). Die Totalenergie E ist dann

$$E = \sum_s N_s h \nu_s = V \int \rho_\nu d\nu. \quad (1)$$

Die Lösung des Problems verlangt dann die Bestimmung der N_s , welche ρ_ν bestimmen. Wenn wir die Wahrscheinlichkeit für jede durch beliebige N_s charakterisierte Verteilung angeben können, dann wird die Lösung durch die Bedingung bestimmt, daß diese Wahrscheinlichkeit bei Wahrung der Nebenbedingung (1) ein Maximum sein soll. Diese Wahrscheinlichkeit wollen wir nun aufsuchen.

Das Quantum hat ein Moment vom Betrage $\frac{h\nu_s}{c}$ in der Richtung seiner Fortbewegung. Der Momentanzustand des Quantums wird charakterisiert durch seine Koordinaten x, y, z und die zugehörigen Momente $p_x p_y p_z$; diese sechs Größen können als Punktkoordinaten in einem sechsdimensionalen Raum aufgefaßt werden, wobei wir die Beziehung haben

$$p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \frac{h^2 \nu^2}{c^2},$$

vermöge welcher der genannte Punkt auf einer durch die Frequenz des Quants bestimmten Zylinderfläche zu bleiben gezwungen ist. Zum Frequenzbereich $d\nu_s$ gehört in diesem Sinne der Phasenraum

$$\int dx dy dz dp_x dp_y dp_z = V \cdot 4\pi \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 \frac{h d\nu}{c} = 4\pi \frac{h^3 \nu^2}{c^3} V d\nu.$$

Wenn wir das gesamte Phasenvolumen in Zellen von der Größe h^3 einteilen, gehören zum Frequenzbereich $d\nu$ also $4\pi V \frac{\nu^2}{c^3} d\nu$ Zellen. In bezug auf die Art dieser Einteilung kann nichts Bestimmtes gesagt werden.

Indessen muß die Gesamtzahl der Zellen als die Zahl der möglichen Anordnungen eines Quants in dem gegebenen Volumen angesehen werden. Um der Tatsache der Polarisation Rechnung zu tragen, erscheint es dagegen geboten, diese Zahl noch mit 2 zu multiplizieren, so daß wir für die Zahl der zu $d\nu$ gehörigen Zellen $8\pi V \frac{\nu^3 d\nu}{c^3}$ erhalten.

Nun ist es einfach, die thermodynamische Wahrscheinlichkeit eines (makroskopisch definierten) Zustandes zu berechnen. Es sei N^s die Zahl der zum Frequenzbereich $d\nu^s$ gehörigen Quanten. Auf wie viele Arten können diese auf die zu $d\nu^s$ gehörigen Zellen verteilt werden? Sei p_0^s die Zahl der vakanten Zellen, p_1^s die Zahl derer, die ein Quant enthalten, p_2^s die Zahl der Zellen, die zwei Quanten enthalten usw. Die Zahl der möglichen Verteilungen ist dann

$$\frac{A^s!}{p_0^s! p_1^s! \dots}, \quad \text{wobei} \quad A^s = \frac{8\pi\nu^3 V}{c^3} d\nu^s,$$

und wobei

$$N^s = 0 \cdot p_0^s + 1 \cdot p_1^s + 2 \cdot p_2^s \dots$$

die Zahl der zu $d\nu^s$ gehörigen Quanten ist.

Die Wahrscheinlichkeit des durch sämtliche p_r^s definierten Zustandes ist offenbar

$$\prod_s \frac{A^s!}{p_0^s! p_1^s! \dots}.$$

Mit Rücksicht darauf, daß wir die p_r^s als große Zahlen betrachten können, haben wir

$$\lg W = \sum_s A^s \lg A^s - \sum_s \sum_r p_r^s \lg p_r^s,$$

wobei

$$A^s = \sum_r p_r^s.$$

Dieser Ausdruck soll ein Maximum sein unter der Nebenbedingung

$$E = \sum_s N^s h \nu^s; \quad N^s = \sum_r r p_r^s.$$

Die Durchführung der Variation liefert die Bedingungen

$$\begin{aligned} \sum_s \sum_r \delta p_r^s (1 + \lg p_r^s) &= 0, & \sum_s \delta N^s h \nu^s &= 0 \\ \sum_r \delta p_r^s &= 0 & \delta N^s &= \sum_r r \delta p_r^s. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\sum_s \sum_r \delta p_r^s (1 + \lg p_r^s + \lambda^s) + \frac{1}{\beta} \sum_s h \nu^s \sum_r r \delta p_r^s = 0.$$

Daraus folgt zunächst

$$p_r^s = B^s e^{-\frac{r h \nu^s}{\beta}}.$$

Da aber

$$A^s = \sum_r B^s e^{-\frac{r h \nu^s}{\beta}} = B^s \left(1 - e^{-\frac{h \nu^s}{\beta}}\right)^{-1},$$

so ist

$$B_s = A^s \left(1 - e^{-\frac{h \nu^s}{\beta}}\right).$$

Ferner hat man

$$\begin{aligned} N^s &= \sum_r r p_r^s = \sum_r r A^s \left(1 - e^{-\frac{h \nu^s}{\beta}}\right) e^{-\frac{r h \nu^s}{\beta}} \\ &= \frac{A^s e^{-\frac{h \nu^s}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{h \nu^s}{\beta}}}. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf den oben gefundenen Wert von A^s ist also

$$E = \sum_s \frac{8\pi h \nu^s{}^3 d\nu^s}{c^3} V \frac{e^{-\frac{h \nu^s}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{h \nu^s}{\beta}}}.$$

Mit Benutzung der bisherigen Resultate findet man ferner

$$S = k \left[\frac{E}{\beta} - \sum_s A^s \lg \left(1 - e^{-\frac{h \nu^s}{\beta}}\right) \right],$$

woraus mit Rücksicht darauf, daß $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$, folgt, daß $\beta = kT$. Setzt

man dies in obige Gleichung für E ein, so erhält man

$$E = \sum_s \frac{8\pi h \nu^s{}^3}{c^3} V \frac{1}{e^{\frac{h \nu^s}{kT}} - 1} d\nu^s,$$

welche Gleichung Plancks Formel äquivalent ist.

(Übersetzt von A. Einstein.)

Anmerkung des Übersetzers. Boses Ableitung der Planckschen Formel bedeutet nach meiner Meinung einen wichtigen Fortschritt. Die hier benutzte Methode liefert auch die Quantentheorie des idealen Gases, wie ich an anderer Stelle ausführen will.