7. Übungsblatt: Supraleitung

siehe auch http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

London-Gleichung

Eine makroskopisch-phänomenologische Beschreibung eines Supraleiters im Magnetfeld gelingt im Rahmen der London-Theorie. Die *zweite London-Gleichung* lautet $\vec{\nabla} \times \vec{j} = -\frac{nq^2}{mc}\vec{B}$ für die supraleitende Stromdichte $\vec{j}$ mit zugehöriger Ladung q, Masse m und Anzahldichte n der Ladungsträger.

a) Leiten Sie aus obiger Gleichung und mit Maxwells Hilfe die Gleichung $\lambda^2 \Delta \vec{B} = \vec{B}$ ab. Diskutieren Sie deren Lösung an einer Grenzfläche und die Bedeutung der Länge λ.

b) Ordnen Sie dem Superstrom eine komplexe, makroskopische Wellenfunktion $\Psi(\vec{r}, t) = \sqrt{n}\exp(i\theta(\vec{r}, t))$ als Lösung der Schrödingergleichung mit Vektorpotential $\vec{A}$ zu. Zeigen Sie $\vec{j} = \frac{\hbar nq}{m}\vec{\nabla}\theta - \frac{nq^2}{mc}\vec{A}$ und damit die zweite London-Gleichung.

BCS: Grundzustand und Energielücke aus einem Variationsverfahren

Wie in der Vorlesung besprochen, beruht das BCS-Modell auf der Vielteilchenenergie

$$\hat{H}_{\mathrm{BCS}} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} (\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu) c^{+}_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k}\sigma} - \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{(*)} c^{+}_{\mathbf{k}'\uparrow} c^{+}_{-\mathbf{k}'\downarrow} c_{-\mathbf{k}\downarrow} c_{\mathbf{k}\uparrow}$$

mit fermionischen Erzeugern und Vernichtern für Elektronen mit Impuls $\hbar\mathbf{k}$ und Spin σ. Die Wechselwirkung ist eingeschränkt auf Elektronen eines begrenzten Energiebereichs $(*)$. Betrachten Sie ausgehend vom Teilchenvakuum $|0\rangle$ den Zustand

$$|\Psi_0\rangle = \Pi_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} c^{+}_{\mathbf{k}\uparrow} c^{+}_{-\mathbf{k}\downarrow}) |0\rangle$$

als (näherungsweise) geeigneten Anwärter auf den Grundzustand des Vielteilchensystems. Die reellen Koeffizienten $u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}}$ werden hier als Variationsparameter aufgefasst.

a) Zeigen Sie zunächst, dass $|\Psi_0\rangle$ normiert ist unter der Bedingung $u^2_{\mathbf{k}} + v^2_{\mathbf{k}} = 1$.

b) Überzeugen Sie sich davon, dass

$$E_0(u, v) = \langle \Psi_0 | \hat{H}_{\mathrm{BCS}} | \Psi_0 \rangle = 2 \sum_{\mathbf{k}} (\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu) v^2_{\mathbf{k}} - \frac{g}{V} \left(\sum_{\mathbf{k}}^{(*)} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \right)^2$$

gilt.

c) Setzen Sie $\Delta = \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{k}}^{(*)} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}$ und zeigen Sie, dass unter der Nebenbedingung aus a) das Minimieren von E_0 auf die aus der Vorlesung bekannte Gleichung

$$\Delta = \Delta \frac{g}{2V} \sum_{\mathbf{k}}^{(*)} \frac{1}{\sqrt{(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \Delta^2}}$$

für die Energielücke führt.

d) Studieren Sie auch die BCS-Originalarbeit (Phys. Rev. **108**, 1175 (1957), siehe Materialien).