6. Übungsblatt: Quantenvielteilchensysteme: ultrakalte Quantengase siehe auch http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

Einstein, 1924/1925

[Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss. 1924, 261 (1924); ibid. 1925, 3 (1925)] (siehe Materialien)

Einstein wendet Boses Herangehensweise auf ein Gas von materiellen Teilchen an (1. Abhandlung) und beschreibt die Kondensation (2. Abhandlung).

a) Begründen Sie Gl. (24) aus den Ergebnissen der ersten Abhandlung von Einstein. Wieso ergibt sich hieraus die Kondensation des Gases? Welcher Unterschied besteht zur herkömmlichen Kondensation eines Gases (Übergang gasförmig $\to$ flüssig)?

b) Wieso ergibt die Boltzmann-Statistik einen Widerspruch zum Nernstschen Theorem, nicht aber die Bose-Statistik?

Anziehende Wechselwirkung: Bose-Einstein-Kondensat begrenzter Teilchenzahl

Ein Gas wechselwirkender Bosonen (Teilchenzahl N) in einer isotropen Falle $V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{r}^2$ habe *anziehende* Wechselwirkung $U(\vec{r}) = g\delta(\vec{r})$ mit $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} < 0$. Es befinde sich weit unterhalb der kritischen Temperatur (“reines Kondensat”).

a) Bestimmen Sie aus dem Kondensat-Ansatz $\Psi_{\mathbf{BEC}}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = \psi_0(\vec{r}_1)\cdots\psi_0(\vec{r}_N)$ die Energie $E[\psi_0, \psi_0^*] = \langle H_N \rangle$ des N-Teilchensystems unter der Annahme einer *Gaußschen* Einteilchentestwellenfunktion $\psi_0(\mathbf{r}) = (\pi R^2)^{-\frac{3}{4}} \exp\{-\frac{\mathbf{r}^2}{2R^2}\}$ der Ausdehnung R.

b) Skizzieren Sie die so gewonnene Energie $E = E(R) = \langle H_N \rangle$ als Funktion von R.

c) Zeigen Sie, dass für nicht zu große N ein lokales Energieminimum bei einem endlichen Wert von R existiert. Geben Sie jene Teilchenzahl N_c an, bei der das lokale Minimum verschwindet und deuten Sie das Ergebnis.

d) Studieren und diskutieren Sie die Experimente von Bradley, Sackett, Hulet und anderen: Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995) und Phys. Rev. Lett. **78**, 985 (1997) (siehe Materialien).

Zur “zweiten Quantisierung” eines wechselwirkenden Bose-Gases

Betrachten Sie ein System massiver Bosonen (Spin 0) in einem äußeren Potential $V(\vec{r})$ und Zweiteilchenwechselwirkungspotential $U(\vec{r}, \vec{r}\,')$ in zweiter Quantisierung. Mit den bosonischen Feldoperatoren $\hat{\psi}(\vec{r})$, $\hat{\psi}^+(\vec{r})$ mit $[\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}^+(\vec{r}\,')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$ lautet der Hamiltonoperator des Vielteilchensystems

$$\hat{H} = \int d^3r\, \hat{\psi}^+(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{r}) \right) \hat{\psi}(\vec{r}) + \frac{1}{2}\int d^3r \int d^3r'\, \hat{\psi}^+(\vec{r})\hat{\psi}^+(\vec{r}\,')U(\vec{r}, \vec{r}\,')\hat{\psi}(\vec{r}\,')\hat{\psi}(\vec{r}),$$

der Teilchenzahloperator ist $\hat{N} = \int d^3r\, \hat{\psi}^+(\vec{r})\hat{\psi}(\vec{r})$. Wir definieren außerdem die Ein- und Zweiteilchenzustände $|\phi_1\rangle := \int d^3r\, \phi_1(\vec{r})\hat{\psi}^+(\vec{r})|0\rangle$ und $|\phi_2\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^3r \int d^3r'\, \phi_2(\vec{r}, \vec{r}\,')\hat{\psi}^+(\vec{r})\hat{\psi}^+(\vec{r}\,')|0\rangle$.

a) Zeigen Sie: $[\hat{N}, \hat{H}] = 0$, $\hat{N}|\phi_1\rangle = |\phi_1\rangle$ und $\hat{N}|\phi_2\rangle = 2|\phi_2\rangle$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zweiteilchenwechselwirkungsenergie

$$\frac{1}{2}\int d^3r \int d^3r'\, \hat{\psi}^+(\vec{r})\hat{\psi}^+(\vec{r}\,')U(\vec{r}, \vec{r}\,')\hat{\psi}(\vec{r}\,')\hat{\psi}(\vec{r}),$$

sowohl im Einteilchen- als auch im Zweiteilchenzustand.