



TU Dresden
Fakultät Physik
Physikalisches Grundpraktikum

Musterprotokoll **BM**
Bleistiftmine

Spezifischer elektrischer Widerstand einer Bleistiftmine (BM) für Physik-Bachelor

Name: Person A
Partner/in: Person B
Betreuer/in: Person C

Datum: 16.05.2024
Raum: REC / D101
Versuchsplatz: 1

1 Aufgabenstellung

Bestimmen Sie den spezifischen elektrischen Widerstand einer Bleistiftmine durch Messung von Stromstärke und Spannung in Abhängigkeit von der Länge des Leiters und durch Ermittlung des Minendurchmessers.

Konkretisierung durch Betreuer/in:

- Messung Strom-Spannung für mindestens 10 verschiedene Längen.
- Messung des Durchmessers der Bleistiftmine an mindestens 10 unterschiedlichen Stellen.

Physikalischer Hintergrund

Der Ladungstransport in einem elektrischen Leiter wird durch die Kraftwirkung eines elektrischen Feldes \vec{E} auf frei bewegliche Ladungsträger hervorgerufen. Aufgrund der Wechselwirkung mit Gitterschwingungen stellt sich eine resultierende Stromdichte \vec{j} ein. In Abhängigkeit von der Leitfähigkeit des Materials σ gilt der Zusammenhang:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1)$$

welcher auch als ohmsches Gesetz bekannt ist. Je höher die elektrische Leitfähigkeit eines Materials, desto größer ist die resultierende Stromdichte bei gegebenem elektrischen Feld. Der spezifische Widerstand ρ ergibt sich aus dem Reziproken der Leitfähigkeit

$$\rho = \frac{1}{\sigma}, \quad (2)$$

welcher im allgemeinen temperaturabhängig ist. Um einen messtechnischen Zugang zur Größe ρ zu erhalten, wird der ohmsche Widerstand R betrachtet. Dieser ist nicht nur durch Materialeigenschaften bestimmt, welche durch ρ beschrieben werden, sondern auch durch die Geometrie des Leiters. Für einen Zylinder der Querschnittsfläche A und der Länge l (Stromrichtung) ergibt sich:

$$R = \rho \frac{l}{A}. \quad (3)$$

Dieser Zusammenhang ermöglicht eine Messvorschrift zur indirekten Bestimmung des spezifischen Widerstands durch Messung von R , l und A . Der ohmsche Widerstand eines elektrischen Leiters lässt sich hierfür durch Messung von Spannung U und Stromstärke I indirekt ermitteln:

$$R = \frac{U}{I}. \quad (4)$$

Da der spezifische Widerstand i.A. eine temperaturabhängige Größe ist, sollte durch geeignete Messbedingungen die durch den Ladungstransport bedingte Erwärmung des Leiters konstant und so gering wie möglich gehalten werden. Für eine Abschätzung wird der Wärmetransport durch die Kontaktfläche zwischen Mine und ruhender Luft betrachtet. Hierbei wird ein Metallzylinder (Durchmesser d , Länge l , Mantelfläche A_m) und ein Wärmeübergangskoeffizient α für den Übergang Metall-Luft angenommen. Bei einem Eintrag von Joulescher Wärmeleistung P aufgrund des Stromflusses ergibt sich im Gleichgewicht eine Temperaturerhöhung der Mine gegenüber der Umgebung von:

$$\Delta T = \frac{P}{\alpha A_m} = \frac{P}{\alpha \pi d l}. \quad (5)$$

Da in diesem Versuch der ohmsche Widerstand für verschiedene Längen gemessen wird, sollten die Versuchsbedingungen so gewählt werden, dass die Temperaturerhöhung unabhängig von der Länge l ist. Durch Einsetzen von $P = RI^2$ und Gl. 3 in Gl. 5 wird verständlich, dass die Temperaturerhöhung konstant bleibt, wenn sich die Stromstärke I für alle Längen l nicht ändert:

$$\Delta T = \frac{RI^2}{\alpha \pi d l} = \frac{\rho l I^2}{\pi \frac{d^2}{4} \alpha \pi d l} = \frac{4\rho I^2}{\pi^2 d^3 \alpha}. \quad (6)$$

Aus Gl. 4 folgt dementsprechend, dass die Spannung proportional zum ohmschen Widerstand und damit zur Länge des Leiters gewählt werden sollte.

Versuchsaufbau

Für die Verwendung einer geeigneten Messschaltung wird der zu erwartende ohmsche Widerstand im Vorfeld abgeschätzt ($l = 10 \text{ cm}$, $d = 2 \text{ mm}$, $\rho_{\text{BK}} = 40 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$). Da aufgrund von Zusätzen nicht davon auszugehen ist, dass eine Bleistiftmine den spezifischen elektrischen Widerstand von reinem Graphit aufweist, wird der tabellierte Wert für Bürstenkohle $\rho_{\text{BK}} = 40 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$ angesetzt [1]. Diese Abschätzung liefert einen Wert von:

$$R = \rho \cdot \frac{4l}{\pi d^2} \approx 1,3 \Omega.$$

Laut Versuchsanleitung liegen die folgenden Innenwiderstände der Messgeräte vor:

$$\begin{array}{ll} \text{Spannungsmessung} & R_V = 10 \text{ M}\Omega \\ \text{Strommessung} & R_A = 2 \Omega. \end{array}$$

Somit ist die Relation $R < \sqrt{R_A R_V}$ für die spannungsrichtige Messschaltung erfüllt.

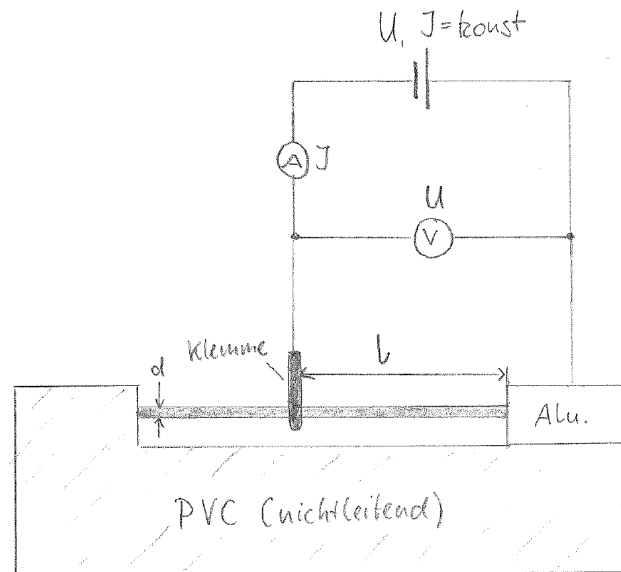


Abb. 1: Schematischer Versuchsaufbau zur Messung von Spannung U und Stromstärke I in Abhängigkeit von der Länge l des stromdurchflossenen Anteils der Bleistiftmine des Durchmessers d .

Messverfahren:

Um die Längenmessung zu vereinfachen, wird eine Seite der Mine elektrisch leitend eingespannt und die andere Seite mit einer Krokodilklemme abgegriffen. Der Widerstand R wird spannungsrichtig für verschiedene Abstände l der Klemme zu einem festen Bezugspunkt gemessen, um aus dem Änderungsverhalten auf den spezifischen Widerstand ρ zu schließen (Abb. 1):

$$R = \rho \frac{l}{A} \Rightarrow \frac{\partial R}{\partial l} = \rho \frac{1}{A} \Rightarrow \underline{\underline{\rho = \pi \frac{d^2}{4} \frac{\partial R}{\partial l}}}. \quad (7)$$

Auf diese Weise wird ggf. der Einfluss von konstanten Kontakt- und Zuleitungswiderständen eliminiert. Durch das Auftragen der ermittelten Widerstände als Funktion der Länge l und entsprechenden Geradenausgleich wird der Anstieg $\partial R / \partial l$ ermittelt. Mithilfe des gemessenen Durchmessers der Mine wird der spezifische Widerstand bestimmt.

Für eine akzeptable Temperaturerhöhung von etwa $\Delta T \approx 1\text{K}$ wird mit Gl. 6 der konstante Messstrom abgeschätzt, welcher für jeden Messpunkt entsprechend eingestellt wird:

$$I = \sqrt{\frac{\pi^2 d^3 \alpha}{4\rho} \Delta T} \approx \underline{\underline{0,050\text{A}}}. \quad (8)$$

Als Richtwert für den Wärmeübergang wird $\alpha = 5\text{W/m}^2\text{K}$ angenommen [1].

2 Messung

Verwendete Geräte / Materialien:

- Spannungsquelle: QUAT Power LN-3003
- Spannungsmessung: Voltcraft M-3610B
- Strommessung: Voltcraft M-3610B
- Längenmessung: Digital-Messschieber Aerospace (0,01 mm)
- Halterung für Bleistiftmine (Eigenbau)
- Bleistiftmine 4190 HB Bohemia Works Chechoslovakia (abgeschliffen mit Schmirgelpapier)
- Krokodilklemme (3 mm), Kabel

Messbedingungen:

- Umgebungstemperatur $\vartheta = 23,4\text{ °C}$
- Messbereich Spannung: 2 V
- Messbereich Stromstärke: 200 mA
- spannungsrichtige Messschaltung
- konstante Stromstärke $I = 50\text{ mA}$

l/mm	U/mV	I/mA	R/Ω	P/mW	d/mm
11,34	207	50,0	4,140	10,35	2,02
20,69	243	50,0	4,860	12,15	2,03
30,92	280	50,0	5,600	14,00	2,00
42,01	326	50,1	6,507	16,33	2,02
50,79	342	50,1	6,826	17,13	2,03
60,17	385	50,1	7,685	19,29	2,01
69,47	414	50,1	8,263	20,74	2,00
77,87	440	50,1	8,782	22,04	2,02
86,95	472	50,1	9,421	23,65	2,01
96,00	503	50,1	10,040	25,20	2,02

Tabelle 1: Messung der Spannung U bei konstantem Strom I in Abhängigkeit der Leiterlänge l zur Bestimmung von $R = f(l)$, Messergebnisse des Durchmessers d .

Messablauf:

- Die Messung des Abstands zwischen Krokodilklemme und Kontaktfläche erfolgt mithilfe des Innenmaßes des Messschiebers.
- Das Anbringen der Klemme erfolgt möglichst ohne die Mine zu beschädigen.
- Für einen konstanten Messstrom wird der Konstantstrom-Modus (CC) des regelbaren Labornetzgerätes verwendet.
- Der Durchmesser wird an 10 verschiedenen Stellen der Mine gemessen.

3 Auswertung und Messunsicherheiten

- Für jede Länge l wird der ohmsche Widerstand R bestimmt und in einem Diagramm dargestellt.
- Die weitere Auswertung erfordert die Bestimmung der statistischen und systematischen Messunsicherheiten für l und R .

Annahmen zu den statistischen Messunsicherheiten:

- $\Delta l_{\text{stat}} = 1,5 \text{ mm}$ (geschätzt, halbe Klemmenbreite)
- $\Delta U_{\text{stat}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ mV}$ (stabile Anzeige, letztes Digit)
- $\Delta I_{\text{stat}} = \frac{0,1}{\sqrt{3}} \text{ mA}$ (stabile Anzeige, letztes Digit)

Annahmen zu den systematischen Messunsicherheiten (lt. Einf. i. Phys. Prakt.):

- $\Delta l_{\text{syst}} = \Delta d_{\text{syst}} = \frac{0,03}{\sqrt{3}} \text{ mm}$
- $\Delta U_{\text{syst}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,003 \cdot U + 1 \text{ mV})$
- $\Delta I_{\text{syst}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,012 \cdot I + 0,1 \text{ mA}) \stackrel{I=50 \text{ mA}}{=} 0,404 \text{ mA}$

Mit gaußscher Fehlerfortpflanzung ergibt sich:

$$\Delta R = R \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2}$$

sowohl für die statistischen als auch systematischen Messunsicherheiten. Aufgrund der Verwendung unterschiedlicher Messgeräte werden die systematischen Messunsicherheiten als unkorreliert angenommen. Die Unsicherheiten der gemessenen Widerstandswerte sind in Tab. 2 zusammengefasst.

U/mV	$\Delta U_{\text{syst}}/\text{mV}$	R/Ω	$\Delta R_{\text{syst}}/\Omega$	$\Delta R_{\text{stat}}/\Omega$
207	0,9359	4,140	0,0383	0,0125
243	0,9982	4,860	0,0441	0,0128
280	1,0623	5,600	0,0500	0,0132
326	1,1420	6,507	0,0573	0,0137
342	1,1697	6,826	0,0599	0,0140
385	1,2442	7,685	0,0669	0,0145
414	1,2944	8,263	0,0716	0,0149
440	1,3395	8,782	0,0758	0,0153
472	1,3949	9,421	0,0811	0,0158
503	1,4486	10,040	0,0861	0,0163

Tabelle 2: Statistische und systematische Unsicherheiten für die gemessenen Widerstände aufgrund von entsprechenden Unsicherheiten der Strom- und Spannungsmessungen.

Bemerkung: Offensichtlich überwiegt die systematische Unsicherheit des Widerstands gegenüber der statistischen. Dabei liefert die relative systematische Unsicherheit der Strommessung (0,8%) den größeren Beitrag gegenüber der Spannungsmessung (0,29% - 0,45%).

- Für einen Vergleich der statistischen Unsicherheiten von ΔR und Δl schätzen wir grob die Steigung:

$$\frac{\partial R}{\partial l} \approx \frac{R_{10} - R_1}{L_{10} - L_1} = 0,0697 \Omega/\text{mm}.$$

Wir sehen somit, dass

$$\frac{\partial R}{\partial l} \Delta l_{\text{stat}} \approx 0,105 \Omega \gg \Delta R_{\text{stat}},$$

woraus sich zwingend ergibt, dass l über R aufgetragen werden muss, damit die dominierenden Messunsicherheiten in Ordinatenrichtung weisen, um eine wesentliche Grundannahme der χ^2 -Methode zu erfüllen (Abb. 2).

Für die systematischen Messunsicherheiten gilt hingegen:

$$\frac{\partial R}{\partial l} \Delta l_{\text{syst}} \approx 1,21 \text{ m}\Omega \ll \Delta R_{\text{syst}}.$$

- Linearer Ausgleich mittels PhyPraFit: $y = a + bx$ mit $y = l$ und $x = R$ basierend auf der analytischen Lösung für die Minimierung von χ^2 mit den homogenen Gewichtungsfaktoren:

$$w_i = \frac{1}{\Delta l_{\text{stat}}^2} \quad \forall i \in \{1, \dots, 10\}.$$

Das Verfahren liefert $\chi^2/\text{FG} = 0,711$ bei einem Akzeptanzintervall von $[0,5, 1,5]$ für 8 Freiheitsgrade. Somit sind die tatsächlichen Schwankung konsistent zur Annahme bezüglich der statistischen Messunsicherheiten. Die Unsicherheiten für Anstieg und Absolutglied können demnach als vertrauenswürdig angesehen werden.

Es ergeben sich die folgenden Anpassungsparameter:

	a/mm	$b/\text{mm}\Omega^{-1}$
Wert	-49,686	14,462
Δ_{stat}	1,892	0,253
$\Delta_{\text{syst,max}}$	1,856	0,311

Tabelle 3: Anpassungsparameter sowie deren statistische und systematische Messunsicherheiten. Für die systematischen werden maximale Unsicherheiten gewählt. Auf die Angabe der Kovarianz wird verzichtet.

- Bestimmung des mittleren Drahtdurchmessers:

$$\bar{d} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i \approx \underline{2,016 \text{ mm}}$$

$$\sigma_{\bar{d}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_i (d_i - \bar{d})^2} \approx 0,0034 \text{ mm}$$

$$\Delta d_{\text{stat}} = \sqrt{\sigma_{\bar{d}}^2 + (\Delta d_{\text{digit}})^2} = \sqrt{\sigma_{\bar{d}}^2 + \left(\frac{0,01 \text{ mm}}{\sqrt{3}}\right)^2} \approx \underline{0,0067 \text{ mm}}$$

$$\Delta d_{\text{syst}} = \frac{0,03 \text{ mm}}{\sqrt{3}} \approx \underline{0,0173 \text{ mm}}$$

- Bestimmung des spezifischen elektrischen Widerstands:

$$\rho = \pi \frac{d^2}{4} \frac{\partial R}{\partial l} = \pi \frac{d^2}{4} \frac{1}{b} = \underline{2,2072 \cdot 10^{-4} \Omega\text{m}}$$

$$\Delta \rho = \rho \cdot \sqrt{\left(-\frac{2\Delta d}{d}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$$

$$\Delta \rho_{\text{stat}} = \rho \cdot \sqrt{(0,0067)^2 + (0,0175)^2} = \underline{4,136 \cdot 10^{-6} \Omega\text{m}}$$

$$\Delta \rho_{\text{syst}} = \rho \cdot \sqrt{(0,0172)^2 + (0,0215)^2} = \underline{6,077 \cdot 10^{-6} \Omega\text{m}}$$

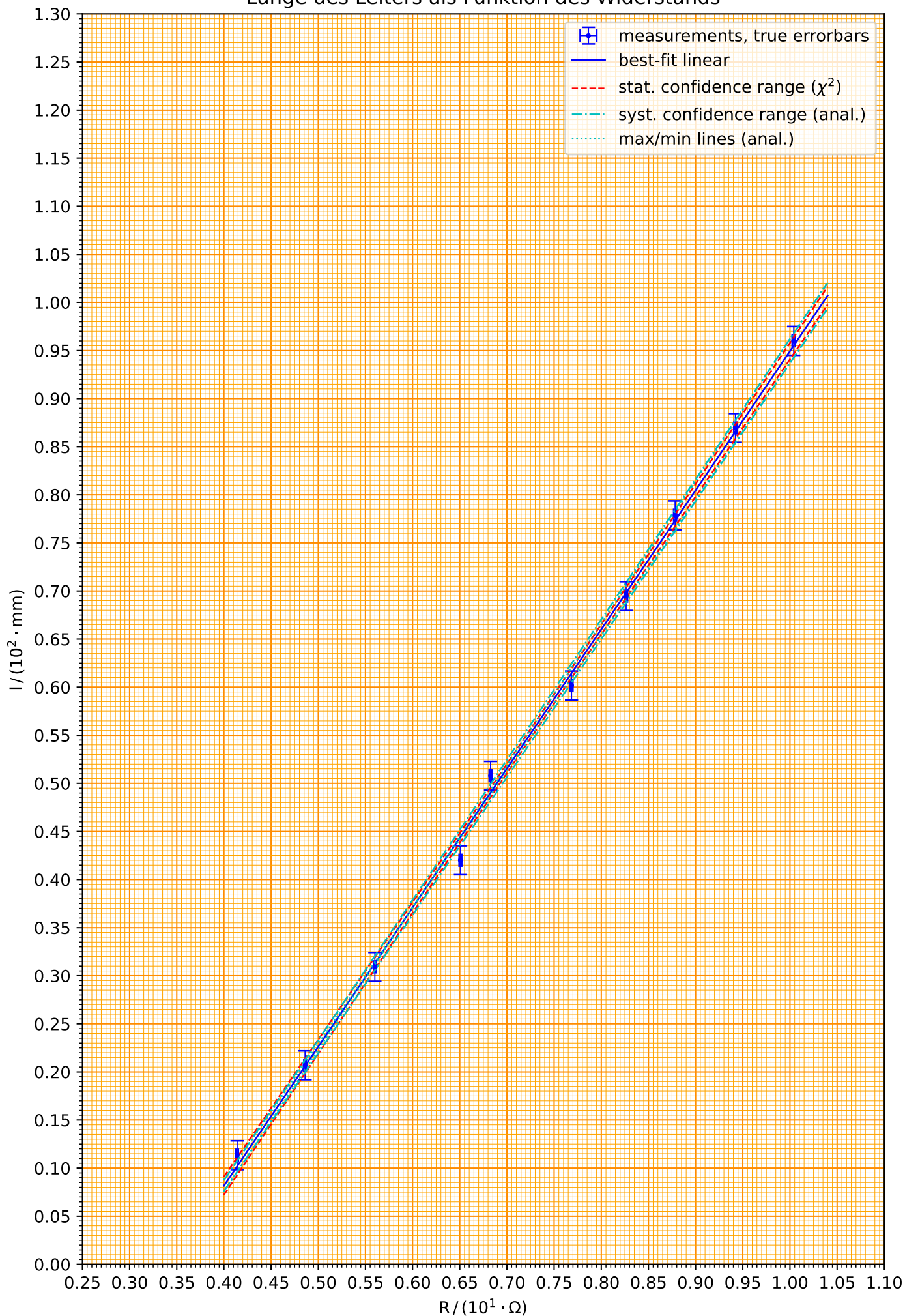


Abb 2: Leiterlänge l als Funktion des ohmschen Widerstands R : Messwerte, stat. Messunsicherheiten, Ausgleichsgerade und statistische und systematische Konfidenzbereiche.

Annahme für die systematische Messunsicherheiten: unkorrelierte Messunsicherheiten aufgrund unterschiedlicher Messgeräte.

4 Diskussion

Endergebnis: $\rho = \underline{\underline{(2,21 \pm 0,04 \pm 0,06) \cdot 10^{-4} \Omega\text{m}}}$

Literaturwert: $\rho_{\text{Lit}} = 2,165 \cdot 10^{-4} \Omega\text{m}$ (fiktiv zum Zweck der Diskussion)

- Es gilt somit $|\rho_{\text{Lit}} - \rho| < \sqrt{\Delta\rho_{\text{stat}}^2 + \Delta\rho_{\text{sys}}^2}$. Der Literaturwert liegt im Unsicherheitsbereich der Messung. Insofern sind Messergebnis und Literaturwert miteinander vereinbar. Weiterhin steht die Messung qualitativ betrachtet nicht im Widerspruch mit dem erwarteten linearen Zusammenhang zwischen ohmschem Widerstand und Leiterlänge.
- Die Messunsicherheit des spezifischen Widerstands wird sowohl durch systematische als auch zu einem etwas geringeren Maße durch statistische Unsicherheiten bestimmt. Die systematischen Unsicherheiten werden v.a. durch die Messung von Stromstärke und Spannung hervorgerufen, wobei die Stromstärkemessung mit stärkerem Gewicht eingeht. Die Bestimmung des relativ geringen Durchmessers liefert zudem einen weiteren nennenswerten Beitrag.
- Die statistische Unsicherheit des Anstiegs $\partial l / \partial R$ wird mit $\chi^2 / \text{FG} = 0,711$ zwar leicht überschätzt, verhält sich aber immer noch konsistent zu den tatsächlichen Abweichungen bezüglich der Ausgleichsgeraden. Insofern führt die Annahme, dass die statistische Unsicherheit des Anstiegs im Wesentlichen durch die Breite der Krokodilklemme gegeben ist, zu plausiblen Ergebnissen. Die Messungen von Strom- und Spannung sind stabil, sodass nur noch die Digitalisierungsunsicherheit einen vernachlässigbaren Beitrag zur Unsicherheit des Anstiegs liefert. Die statistische Unsicherheit der Durchmesserbestimmung setzt sich in etwa zu gleichen Teilen aus der Digitalisierungsunsicherheit und Inhomogenitäten der Probe zusammen und weist gegenüber der statistischen Unsicherheit des Anstiegs einen geringeren Beitrag auf.
- Verbesserungsvorschläge:
 - Die Verwendung längerer Proben hätte den Vorteil, dass eine damit realisierbare Erweiterung des Messbereichs die statistischen und systematischen Unsicherheiten des Anstiegs reduzieren kann.
 - Die statistischen Einflussfaktoren für die Bestimmung des Anstiegs können durch Verwendung schmalere Klemmen und durch einen größeren Stichprobenumfang zudem weiter reduziert werden.
 - Die Verwendung stärkerer Proben würde die relative Unsicherheit der Durchmesserbestimmung reduzieren und gleichzeitig höhere Stromstärken bei gleicher Temperaturerhöhung erlauben, wodurch sich auch der bestimmende Einfluss der systematischen Unsicherheit der Stromstärkemessung reduziert.
 - Nach Optimierung der Proben- und Klemmengenometrie ist die Verwendung genauerer Messverfahren zur Widerstands- und Dickenbestimmung für eine weitere Reduktion der systematischen Messunsicherheit empfehlenswert.
- Das Absolutglied ist signifikant von null verschieden und ist auf Widerstände der Leitungen sowie an den Kontakten zurückzuführen. Aus diesem Grund muss die Bestimmung des spezifischen Widerstands mithilfe des linearen Ausgleichs erfolgen, um derartige Einflüsse zu eliminieren. Eine direkte Bestimmung von R aus Einzelmessungen hingegen hätte unweigerlich eine deutliche Überschätzung von ca. $3,5 \Omega$ zur Folge!

Bemerkung: Sollte sich zeigen, dass der Literaturwert deutlich außerhalb des kombinierten Unsicherheitsbereichs liegt, sollte insbesondere darauf hingewiesen werden, dass ggf. entscheidende Unsicherheiten nicht berücksichtigt wurden.

Literatur

- [1] H. Stöcker, *Taschenbuch der Physik*, Harry Deutsch Verlag, Frankfurt am Main 2000