



**TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DRESDEN**

**Fakultät Physik**

Physikalisches Grundpraktikum

Versuch: **AZ**

Aktualisiert: am 06.05.2019

# Adiabatische Zustandsänderungen

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Aufgabenstellung</b>	<b>2</b>
<b>2 Allgemeine Grundlagen</b>	<b>2</b>
2.1 Spezifische Wärmekapazität . . . . .	2
2.2 Adiabatenexponent idealer Gase . . . . .	2
2.2.1 Adiabatischer Prozess . . . . .	2
2.2.2 Freiheitsgrade . . . . .	3
<b>3 Experimente</b>	<b>4</b>
3.1 Schwingende Quecksilbersäule . . . . .	4
3.1.1 Messmethode . . . . .	5
3.2 Methode von Clément Desormes . . . . .	5
<b>4 Anhang</b>	<b>6</b>
4.1 Schwingende Quecksilbersäule . . . . .	6
4.1.1 Offenes U-Rohr . . . . .	6
4.1.2 Geschlossenes U-Rohr . . . . .	6
4.2 Methode von Clément Desormes . . . . .	7
<b>Fragen</b>	<b>8</b>
<b>Literatur</b>	<b>8</b>

# 1 Aufgabenstellung

Der Adiabatenexponent  $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$  von Luft ist auf folgende Arten zu bestimmen

1. aus den Eigenfrequenzen einer mit offenen bzw. geschlossenen Hähnen schwingenden Hg-Säule
2. nach der Methode von CLÉMENT-DESORMES

## 2 Allgemeine Grundlagen

### 2.1 Spezifische Wärmekapazität

Führt man einem Stoff der Masse  $m$  die Wärmemenge  $Q$  zu, so kommt es zu einer proportionalen Temperaturerhöhung  $\Delta T$ . Die spezifische Wärmekapazität  $c$  beschreibt das materialspezifische Vermögen, Wärme aufzunehmen und ergibt sich aus der Wärmemenge  $Q$  pro Masse und pro Temperaturerhöhung:

$$Q = mc \cdot \Delta T \quad \Rightarrow \quad c = \frac{Q}{m \cdot \Delta T}. \quad (1)$$

Da bei Gasen die Temperaturänderung davon abhängt, unter welchen Randbedingungen die Wärme zugeführt wird, ergeben sich für ein Gas unterschiedliche Wärmekapazitäten. Betrachten wir die Wärmezufuhr bei konstantem Druck, so verrichtet das Gas nach dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik Ausdehnungsarbeit  $pdV$ :

$$dQ = dU + pdV = mc_p dT,$$

d.h. ein Teil der zugeführten Wärme wird in Form von innerer Energie (Temperaturerhöhung) und der Rest in Form potenzieller Energie durch verrichtete Arbeit gespeichert. Im Falle eines isochoren Prozesses hingegen bleibt das Volumen konstant, d.h. es wird keine Volumenarbeit verrichtet mit der Folge, dass die gesamte zugeführte Wärme in innere Energie  $dU$  umgewandelt wird:

$$dQ = dU = mc_v dT.$$

Betrachtet man beide Wärmemengen als gleich, so kommt es im zweiten Fall zu einer stärkeren Temperaturerhöhung, die sich als Konsequenz aus einer geringeren spezifischen Wärmekapazität ergibt. Somit folgt für den 1. Hauptsatz:

$$mc_p dT = mc_v dT + pdV.$$

Durch Ersetzen des Arbeitsterms mittels der Zustandsgleichung idealer Gase  $pV = mR^*T$  ( $p$ =konst.) folgt für die Differenz der spezifischen Wärmekapazitäten  $c_p$  (bei konstantem Druck) und  $c_v$  (bei konstantem Volumen) für ideale Gase:

$$c_p - c_v = R^* \quad (2)$$

$R^*$  beschreibt hierbei die spezifische Gaskonstante mit  $R^* = R/M$ , die sich aus der universellen Gaskonstante  $R$  und der molaren Masse  $M$  berechnet.

### 2.2 Adiabatenexponent idealer Gase

#### 2.2.1 Adiabatischer Prozess

Wird ein thermodynamischer Prozess so schnell geführt oder ist so gut wärmeisoliert, dass kein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet ( $dQ = 0$ ), nennt man ihn *adiabatisch* oder *isentropisch*.

In diesem Fall lautet der erste Hauptsatz:

$$dU = mc_v dT = -pdV.$$

Mit der Zustandsgleichung idealer Gase in allgemeiner differenzieller Form:

$$d(pV) = pdV + Vdp = mR^*dT$$

und mit dem Adiabatenexponenten  $\kappa := c_p/c_v$  folgt aus dem 1. Hauptsatz

$$Vdp = -\kappa \cdot p dV.$$

Nach Integration ergibt sich schließlich die **Poisson'sche Adiabaten-gleichung**:

$$\boxed{pV^\kappa = \text{konst.}} \tag{3}$$

Durch Kombination von (3) mit der Zustandsgleichung folgen entsprechende Adiabaten-gleichungen auch für die Variablensätze  $(T, V)$  bzw.  $(T, p)$  :

$$TV^{\kappa-1} = c_2 \quad \text{bzw.} \quad T^\kappa p^{(1-\kappa)} = c_3. \tag{4}$$

### 2.2.2 Freiheitsgrade

Der Adiabatenexponent  $\kappa$  ist eng mit dem Aufbau der Gasmoleküle und dadurch mit der Zahl  $f$  ihrer Freiheitsgrade, die teilweise erst bei bestimmten Temperaturen angeregt werden können, verknüpft. Bei einem einatomigen Gas können maximal 3 Freiheitsgrade der Translation pro Atom angeregt werden. Da die Translationsenergie nicht gequantelt ist, kommt es bereits bei tiefen Temperaturen zur Anregung aller Freiheitsgrade. Für ein mehratomiges Molekül kommen Freiheitsgrade der Rotation und Schwingung hinzu, wenn die entsprechenden Anregungsenergien erreicht werden ( $k_B T \approx E_{\text{rot}}$  bzw.  $k_B T \approx E_{\text{vib}}$ ). Im Gegensatz zur Rotation werden die Schwingungsfreiheitsgrade von zweiatomigen Molekülen bei Raumtemperatur nicht angeregt.

$f = 3$ Translationen		= 3	einatomig
$f = 3$ Translationen	+ 2 Rotationen	= 5	zweiatomig
$f = 3$ Translationen	+ 3 Rotationen	= 6	dreiatomig (gewinkelt)

Nach dem *Gleichverteilungssatz* kann ein Atom pro Freiheitsgrad die Energie  $k_B T/2$  aufnehmen. Daher gilt mit  $\nu$  als Stoffmenge und  $N$  als Anzahl der Moleküle für die molaren Wärmekapazitäten  $C_p$  und  $C_v$ :

$$C_v = \frac{1}{\nu} \frac{dU}{dT} \quad \text{und} \quad U = N \cdot f \frac{k}{2} T = \nu \frac{f}{2} \cdot RT$$

$$C_v = \frac{f}{2} R \quad \text{sowie} \quad C_p = \left[ \frac{f}{2} + 1 \right] \cdot R.$$

Gas	$\kappa$
He	1,66
Ar	1,67
O <sub>2</sub>	1,40
H <sub>2</sub>	1,41
CO <sub>2</sub>	1,30
N <sub>2</sub> O	1,29

Beispiele für Adiabatenexponenten einiger Gase.

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v} = \frac{f + 2}{f}$$

Somit finden wir für ein-, zwei-, bzw. dreiatomige ideale Gase theoretisch die Werte  $\kappa = 1,67, 1,4$  bzw.  $1,33$ . Die Bestimmung des Adiabatenexponenten dient damit der Charakterisierung von Gasen.

### 3 Experimente

#### 3.1 Schwingende Quecksilbersäule

Entsprechend Abb. 1 wird ein teilweise mit Quecksilber gefülltes U-Rohr mit Hilfe einer Kurbel und eines fremderregten Gleichstrom-Motors, dessen Frequenz variiert wird, zu erzwungenen Schwingungen angeregt. Unter Vernachlässigung der Dämpfung ist die Eigenfrequenz gleich der Resonanzfrequenz. Der Versuch besteht aus zwei Teilen:

- 1. Offenes U-Rohr** Lässt man die Hähne offen, so wird die Eigenfrequenz bzw. die Schwingungsdauer  $\tau_o$  allein durch die Länge  $l$  der Quecksilbersäule und die Fallbeschleunigung bestimmt, wobei gilt:

$$\tau_o = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}. \tag{5}$$

- 2. Geschlossenes U-Rohr** Bleiben die beiden Hähne geschlossen, so erzeugt das beim Schwingen der Hg-Säule komprimierte bzw. expandierte Luftvolumen eine zusätzliche rücktreibende Kraft. Wenn die Frequenz der Schwingung hinreichend hoch ist, handelt es sich um eine adiabatische Kompression bzw. Expansion. Die Schwingungsdauer  $\tau_{zu}$  beträgt:

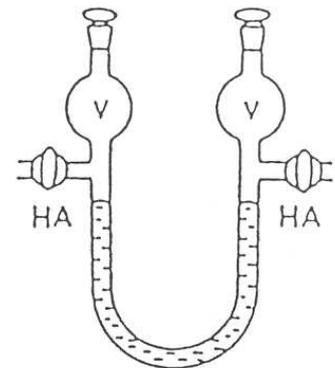
$$\tau_{zu} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g} \frac{V}{V + h_L A \kappa}}. \tag{6}$$

Dabei ist  $A$  die Querschnittsfläche des U-Rohres und  $h_L$  die dem äußerem Luftdruck entsprechende Höhe der Quecksilbersäule.

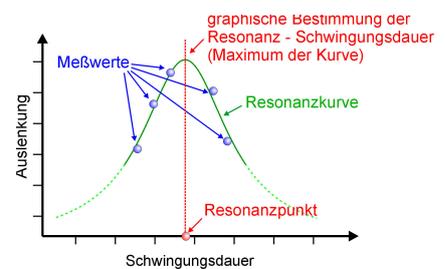
Die Gleichung (5) und (6) führen auf:

$$\kappa = \frac{V}{Ah_L} \left[ \frac{\tau_o^2}{\tau_{zu}^2} - 1 \right]. \tag{7}$$

Indem man für beide Fälle (Hähne offen bzw. zu) durch Variation der Motordrehzahl die Resonanzkurve aufnimmt, daraus  $T_o^*$  bzw.  $T_{zu}^*$  bestimmt, kann anhand von Gleichung (7) der Adiabatenexponent  $\frac{c_p}{c_v} = \kappa$  errechnet werden (s. Anhang).



**Abb. 1:** U-Rohr mit Zusatzvolumen  $V$  und Hähnen  $HA$



**Abb. 2:** Resonanzkurve

### 3.1.1 Messmethode

Die Amplitude wird in diesem Versuch nicht direkt gemessen, sondern indirekt über eine Geschwindigkeitsmessung mittels zweier Lichtschranken bestimmt. Die beiden Lichtschranken sind dabei symmetrisch um die Gleichgewichtslage der Quecksilbersäule im Abstand  $s$  zueinander angeordnet. Wird für die Schwingung der Quecksilbersäule eine Sinusschwingung mit der Amplitude  $X$  angenommen, so folgt für die Auslenkung  $x$  der Schwingung:

$$x = X \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau_1}.$$

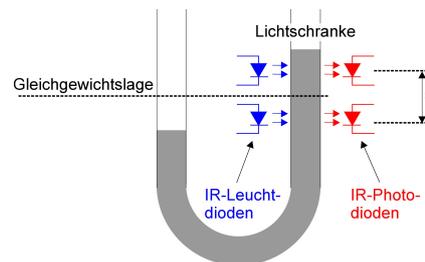
$\tau_1$  ist hierbei die Periodendauer. Für die Geschwindigkeit  $v$  der Säule gilt:

$$v = \frac{dx}{dt} = X \cdot \omega \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad v_{\max} = X\omega = X \frac{2\pi}{\tau_1} \approx \frac{s}{\tau_2}.$$

Wobei  $\tau_2$  die Zeit ist, in der die Quecksilbersäule beide Lichtschranken passiert. Man erhält für  $X$  die folgende Relation:

$$X \sim \frac{\tau_1}{\tau_2}. \tag{8}$$

Diese Proportionalität reicht zur Auswertung des Experimentes aus, da nur das Maximum der Resonanzkurve gesucht wird, nicht aber der absolute Wert der Amplitude. Mit Hilfe der beiden gemessenen Zeiten  $\tau_1$  und  $\tau_2$  lässt sich die Resonanzkurve zeichnen.

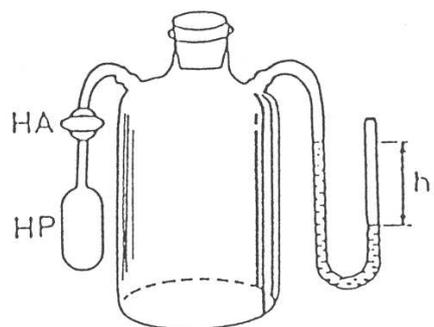


**Abb. 3:** Schematische Darstellung des U-Rohres mit angebrachten Lichtschranken.

### 3.2 Methode von Clément Desormes

Ein mit Luft gefülltes Gefäß mit einem Volumen von  $V_0 \approx 10l$  ist mit einem abnehmbaren Gummistopfen verschlossen, an einer Handpumpe angeschlossen und mit einem U-Rohr Manometer verbunden. Ist eine konstante Umgebungstemperatur  $T_0$  gegeben geht man zur bestimmung von  $\kappa$  nun wie folgt vor:

1. Mit der Handpumpe wird eine gegenüber dem äußeren Luftdruck sehr geringe Kompression des Gasvolumens durchgeführt, die einen ungefähren Überdruck von  $\Delta p_1 = \rho_w \cdot gh_1$ , bzw. eine Differenz der Wassersäulen von  $h_1 \approx 15 \text{ cm}$  zur Folge hat. Nach etwa 2 min Wartezeit hat sich die Temperatur im Gefäß der Ausentemperatur  $T_0$  hinreichend gut angeglichen und die nunmehr konstante Höhendifferenz  $h_1$  wird notiert.
2. Der Gummistopfen wird für eine kurze Zeit von ca. 2 s geöffnet und sofort wieder fest verschlossen. Nach einer Wartezeit von ca. 3 min (wenn keine Druckänderung mehr zu beobachten ist), muss  $h_2 \sim \Delta p_2$  abgelesen werden.  $\kappa$  folgt aus der einfachen Beziehung (s. Anhang) :



**Abb. 4:** Gefäß mit Handpumpe HP, Stopfen und U-Rohr-Manometer

$$\kappa = \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2} = \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \tag{9}$$

## 4 Anhang

### 4.1 Schwingende Quecksilbersäule

#### 4.1.1 Offenes U-Rohr

Ist  $l$  die Länge der Quecksilbersäule (Dichte  $\rho$ ) und der gesamte Höhenunterschied während der Schwingung  $2x$ , d.h. die Amplitude  $x$ , so lautet die *Bewegungsgleichung*:

$$\rho \cdot Al \frac{d^2x}{dt^2} = -2\rho \cdot gA \cdot x \quad \text{oder} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2g}{l} x = 0.$$

Hieraus folgt die Eigenfrequenz bzw. die Schwingungsdauer (ungedämpft)

$$\omega_o^2 = \frac{2g}{l} \quad \text{bzw.} \quad \tau_o^* = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}. \quad (10)$$

#### 4.1.2 Geschlossenes U-Rohr

Oberhalb des Quecksilbers befindet sich Luft sowohl in den beiden Schenkeln der Höhe  $h$  als auch im Zusatzvolumen  $V$ . Damit berechnet sich das Gasvolumen für den Gleichgewichtsfall zu  $V_1 = Ah + V$  und bei der Verschiebung einer Quecksilberoberfläche um  $x$  folgt  $V(x) = V_1 \pm A \cdot x = V + A(h \pm x)$ . Der Auslenkung  $x$  ist eine Druckänderung  $\Delta p$  zugeordnet, die in beiden Schenkeln die rücktreibende Kraft  $\Delta F = A\Delta p$ , d.h. die Gesamtkraft  $2\Delta F$  erzeugt.

**Berechnung von  $\Delta p$ :** Im Gleichgewichtsfall ist der Druck durch den Luftdruck  $b = h_L \rho g$  („barometrischer“ Druck) mit  $\rho$  als Dichte des Quecksilbers gegeben und die Adiabatangleichung (3) liefert:

$$\begin{aligned} b(V + hA)^\kappa &= (b + \Delta p) \cdot (V + (h - x)A)^\kappa \\ b \left(1 + \frac{hA}{V}\right)^\kappa &= (b + \Delta p) \cdot \left(1 + \frac{(h - x)A}{V}\right)^\kappa. \end{aligned} \quad (11)$$

Da  $hA \ll V$ , werden die Binome linear entwickelt. Bei der Multiplikation mit  $\Delta p$  wird weiterhin der gegenüber eins kleine Term  $\kappa(h - x)A/V \cdot \Delta p$  vernachlässigt. Damit folgt aus Gleichung (11):

$$b \left(1 + \kappa \frac{hA}{V}\right) = (b + \Delta p) \cdot \left(1 + \kappa \frac{(h - x)A}{V}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta p \approx \frac{\kappa b \cdot Ax}{V}.$$

Für die Bewegungsgleichung folgt damit:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{2g}{l} + \frac{2b \cdot A\kappa}{\rho l V}\right) \cdot x = 0. \quad (12)$$

Die Eigenfrequenz bzw. die Schwingungsdauer ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{zu}}^2 &= \left(\frac{2g}{l} + \frac{2b\kappa A}{\rho l V}\right) = \frac{2g}{l} \left(1 + \frac{\kappa \cdot Ah_L}{V}\right) \\ \tau_{\text{zu}} &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g} \frac{V}{V + h_L A \kappa}}. \end{aligned}$$

Nach Umstellung und mit Gleichung (10) erhält man den Adiabatenexponenten als:

$$\kappa = \frac{V}{Ah_L} \left(\frac{\tau_o^2}{\tau_{\text{zu}}^2} - 1\right).$$

## 4.2 Methode von Clément Desormes

Für konstanten äußeren Luftdruck  $b$  gilt nach der Erzeugung eines kleinen Überdrucks und Abwarten des Temperatenausgleichs auf (konstante!) Zimmertemperatur ( $T_0$ ) für den Zustand des idealen Gases

$$V = V_0 \quad p = b + \Delta p_1 \quad T = T_0. \quad (13)$$

Während der adiabatischen Entspannung leistet das Gas Arbeit und kühlt sich ab. Der Zustand wird zu:

$$V = V_0 + \Delta V \quad p = b \quad T = T_0 - \Delta T. \quad (14)$$

Unmittelbar nach dem Verschließen gilt dann:

$$V = V_0 \quad p = b \quad T = T_0 - \Delta T. \quad (15)$$

Nach Abwarten des Temperatenausgleichs mit der Umgebung liegt schließlich der Zustand

$$V = V_0 \quad p = b + \Delta p_2 \quad T = T_0 \quad (16)$$

vor. Die Adiabatengleichungen aus (3) und (4) lauten für die adiabatische Entspannung von (13) zu (14):

$$(b + \Delta p_1) \cdot V_0^\kappa = b(V_0 + \Delta V)^\kappa \quad (17a)$$

$$T_0 V_0^{\kappa-1} = (T_0 - \Delta T) \cdot (V_0 + \Delta V)^{\kappa-1}. \quad (17b)$$

Die Entwicklung des Binoms in (17a) ergibt:

$$\begin{aligned} bV_0^\kappa + \Delta p_1 V_0^\kappa &= bV_0^\kappa + b\kappa \cdot V_0^{\kappa-1} \Delta V \\ \frac{\Delta p_1}{b} &= \kappa \frac{\Delta V}{V_0}. \end{aligned} \quad (18)$$

Ähnlich liefert die Entwicklung und Umstellung der Gleichung (17b) unter Vernachlässigung des Produktes der Differentiale:

$$\begin{aligned} T_0 &= (T_0 - \Delta T) \cdot \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^{\kappa-1} = (T_0 - \Delta T) \cdot \left(1 + (\kappa - 1) \frac{\Delta V}{V_0}\right) \\ \frac{\Delta T}{T_0} &= (\kappa - 1) \frac{\Delta V}{V_0}. \end{aligned}$$

Formuliert man für (15) und (16) die Zustandsgleichung idealer Gase mit Gleichung (18), so gilt mit Gleichung (17a):

$$\begin{aligned} \frac{b}{b + \Delta p_2} &= \frac{T_0 - \Delta T}{T_0} = 1 - \frac{\Delta T}{T_0} = 1 - (\kappa - 1) \frac{\Delta V}{V_0} \\ (\kappa - 1) \frac{\Delta V}{V_0} &= 1 - \frac{b}{b + \Delta p_2} = \frac{\Delta p_2}{b + \Delta p_2} \\ \kappa &= 1 + \frac{\kappa b \cdot \Delta p_2}{(b + \Delta p_2) \Delta p_1} \approx 1 + \frac{\kappa \cdot \Delta p_2}{\Delta p_1}. \end{aligned}$$

Die Näherung beruht auf der Annahme  $b \gg \Delta p$ . Auf die gemessenen Höhenunterschiede zurückgeführt ist der Adiabatenexponent also gegeben durch:

$$\kappa = \frac{\Delta p_1}{\Delta p_1 - \Delta p_2} = \frac{h_1}{h_1 - h_2}.$$

## Autorenschaft

Diese Versuchsanleitung wurde in ihrer ursprünglichen Form von L. Jahn und K.-F. Wiehe erstellt und von M. Kreller, J. Kelling, F. Lemke und S. Majewsky bearbeitet. Aktuelle Änderungen werden von der Praktikumsleitung durchgeführt.

## Fragen

1. Erläutern Sie Verfahren zur Bestimmung des Adiabatenexponenten  $\kappa$ .
2. Warum muss man bei Gasen zwei verschiedene spezifische Wärmekapazitäten unterscheiden?
3. Wie lautet die Zustandsgleichung idealer und realer Gase? Welche kinetische Bedeutung haben die Größen  $p$ ,  $T$  und  $R$ ?
4. Was ist ein adiabatischer Prozess und wie kann man ihn realisieren?
5. Wieviele Freiheitsgrade und welche  $\kappa$ -Werte besitzen ein-, zwei- und mehratomige Gase?
6. Formulieren Sie die Adiabaten-Gleichungen!
7. Warum kann man  $\kappa$  auch aus der Schallgeschwindigkeit bestimmen?
8. Was versteht man unter einer erzwungenen Schwingung und unter der Resonanz? Welchen Einfluss hat die Dämpfung auf die Resonanz-Amplitude und die Resonanzfrequenz?
9. Für Physik im Hauptfach: Machen Sie sich klar, warum die verwendeten Näherungen gültig sind.

## Literatur

- [1] W. Walcher, *Praktikum der Physik*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1989
- [2] H. Stroppe, *Physik*, Fachbuch-Verlag, Leipzig 1984
- [3] A. Recknagel, *Physik: Schwingungen, Wellen, Wärmelehre*, Technik-Verlag, Berlin 1990
- [4] L. Bergmann, C. Schaefer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 1: Mechanik, Akustik, Wärmelehre*, Verlag de Gruyter, Berlin 1987
- [5] W. Ilberg (Hrsg.), M. Krötzsch (Hrsg.) et. al., *Physikalisches Praktikum für Anfänger*, Teubner-Verlag, Leipzig 1994