

**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN**

Fakultät Physik

Physikalisches Grundpraktikum

Versuch: **DF**

Aktualisiert: am 28.09.2023

Dichte von Festkörpern und Flüssigkeiten

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung	2
2 Allgemeine Grundlagen	2
2.1 Waagetypen und Genauigkeit der Wägung	2
2.2 Volumenbestimmung und ihre Genauigkeit	4
2.3 Dichte und Dichtebestimmungsverfahren	4
3 Versuchsdurchführung	7
4 Auswertung / Messunsicherheiten	7
Fragen	9
Literatur	9

1 Aufgabenstellung

1. Bestimmen Sie die Dichte eines Festkörpers nach dem *Absolutverfahren*.
2. Bestimmen Sie die Dichte eines Festkörpers nach dem *Relativverfahren*.
3. Bestimmen Sie die Dichte einer Flüssigkeit mit Hilfe eines *Pyknometers*.
4. Vergleichen Sie die Genauigkeit der verwendeten Verfahren.

2 Allgemeine Grundlagen

2.1 Waagtypen und Genauigkeit der Wägung

Die klassischen Waagen, die auf dem Hebelprinzip beruhen (z.B. Balkenwaage, mechanische Einschalenwaage) und Massen mit Normalen vergleichen, sowie Federwaagen verschiedener Ausführung, bei denen eine reversible, zur Gewichtskraft proportionale Auslenkung aus der Ruhelage als Messeffekt genutzt wird, sind inzwischen durch elektronische oder elektromechanische Einschalenwaagen weitestgehend abgelöst worden. Das Messprinzip ist ähnlich dem der Federwaage, nur dass hier die Gewichtskräfte der Last durch Verformungs- oder elektromagnetische Kräfte kompensiert werden.

Auch in diesem Versuch wird eine elektronische Einschalenwaage verwendet, genauer eine Waage mit *elektromagnetischer Kompensation* (EMFC = electromagnetic force compensation). Wie Abbildung 1 zeigt, wird ein Magnetfeld in eine stromdurchflossenen Spule erzeugt. Dieses Magnetfeld wird so eingesetzt, dass ein stromdurchflossener Leiter entgegengesetzt der Gewichtskraft angehoben wird. Damit lässt sich die Höhe eines Lastträgers einstellen, die wiederum von einer fotoelektrischen Abtasteinrichtung erkannt wird. Bei einer Belastungsänderung verändert ein Regler mit Verstärker den durch die Spule fließenden Strom, sodass die Einspiellage wieder erreicht ist. Dabei bleibt der Strom bei kleiner Belastung für kurze Zeit und bei großer Belastung für längere Zeit eingeschaltet (*Impulsbreitenmodulation*). Die Einschaltdauer des Stroms wird durch die Abtastung der Einspiellage mit einem Regelverstärker geregelt und ist direkt proportional der Belastung.

Andere Beispiele für derartige Messmöglichkeiten sind:

- Waage mit kapazitiven oder induktiven Messumformern/Messzellen. Die Gewichtskraft verformt einen Federkörper, dessen Abstand A von einem Bezugspunkt eine Funktion der Last ist. Die Abstandsänderung wird mit kapazitiver oder induktiver Messwertumformung bestimmt.
- Waage mit Dehnungsmessstreifen. Die Verformung eines Federkörpers wird mit Hilfe aufgeklebter Dehnungsmessstreifen als Widerstandsänderung registrierbar.
- Waage auf der Basis des magnetoelastischen Prinzips. Die auf einen Federkörper wirkende Kraft ruft örtliche Materialspannungen hervor, die eine Änderung der magnetischen Kopplung zweier Spulenwicklungen bewirken.
- Waage auf der Basis des piezoelektrischen Effekts. Hierbei entsteht eine elektrische Spannung als Folge einer gerichteten Druck- oder Zugbelastung eines Kristalls.
- Waage nach dem gyrodynamischen Prinzip. Bei dieser Kreiselwaage ändert sich die Präzessionsgeschwindigkeit des Kreisels proportional mit der senkrecht zur Kreiselachse wirkenden Gewichtskraft der Last.
- Waage nach dem Schwingsaitenprinzip. Bei dieser Saitenwaage wird die mit der Belastung zunehmende Schwingungsfrequenz einer Saite zur Gewichtskraftbestimmung genutzt.

Die Ungenauigkeiten, die bei der Wägung mit einer elektronischen Einschalenwaage mit digitaler Anzeige auftreten, werden vor allem durch folgende Fehlerquellen bestimmt:

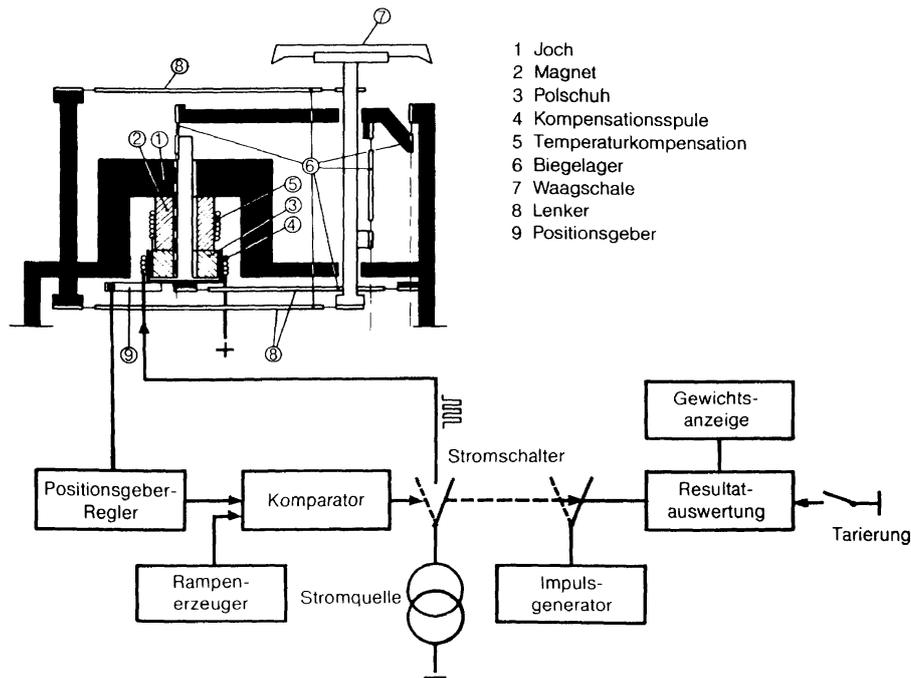


Abb. 1: Elektronische Waage auf der Basis des EMFC-Prinzips (Schema und Blockschaltbild)

Systematische Unsicherheiten:

- Kalibrierunsicherheit: aktuelle Anzeige entspricht nicht dem Wert eines Massennormals
- Linearitätsabweichung innerhalb des Messbereichs: kein streng proportionaler Zusammenhang zwischen Messwertanzeige und Masse)
- Nichtberücksichtigung des Luftauftriebs: Dichteunterschied (damit Auftriebunterschied) zwischen Massennormal und Wägegut

Zufällige Unsicherheiten:

- Digitalisierungsunsicherheit der Anzeige
- Streuung der Messwerte vom gleichen Massennormal (Reproduzierbarkeit der Wägung)
- Messwertänderung infolge geringfügiger örtlicher Platzierungsunterschiede des Materials bei der Wägung (tritt besonders bei Verwendung des JOLLY-Aufsatzes auf!)

Grobe Fehler:

- Wägung bei nicht geschlossenem „Waagenhaus“
- Überlastung der Waage
- Fehlerhafte Nullsetzung
- Stark exzentrische Belastung der Waage

Die Angabe der Genauigkeit einer Massebestimmung bedarf daher sowohl der Berücksichtigung der Herstellerangaben, als auch der Durchführung von *eigenen Kontrollmessungen*.

2.2 Volumenbestimmung und ihre Genauigkeit

Das Volumen von Festkörpern definierter geometrischer Form ist aus ihren Abmaßen berechenbar. Bei unregelmäßig geformten Proben wird ein Ersatzvolumen gemessen, z.B. das Wasservolumen, das der betreffende Körper verdrängt. Zur Bestimmung von Flüssigkeitsvolumina bedarf es geeigneter Messgefäße. Dies sind vor allem Messbecher/Messzylinder, Maßkolben, Pipetten und Pyknometer (2).

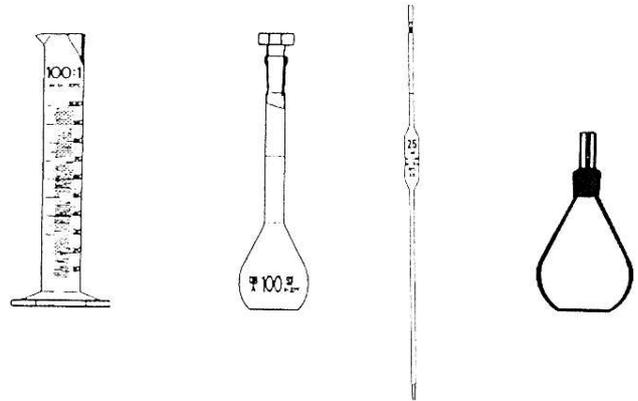


Abb. 2: Volumenmessgefäße (v.l.n.r. Messzylinder, Maßkolben, Vollpipette, Pyknometer)

Die Genauigkeit der Volumenbestimmung wird wesentlich durch die Kalibrierunsicherheiten (*systematische Messunsicherheit*) der Messmittel bestimmt. Dagegen können die Ablesunsicherheiten (*zufällige Messunsicherheiten*), außer bei Messbechern, klein gehalten werden. Spezialpipetten und Pyknometer gestatten die genauesten Volumenbestimmungen, da ihre Messprinzipien die sicherste Feststellung des Messgefäßinhalts erlauben.

2.3 Dichte und Dichtebestimmungsverfahren

Als Dichte ρ eines Stoffes wird der Grenzwert des Verhältnisses des Massenelements Δm eines Stoffes zu seinem Volumenelement ΔV bezeichnet, wobei ΔV gegen Null geht.

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (1)$$

Bei Integration über das gesamte Volumen ergibt sich für einen homogenen Stoff die Dichte ρ_{hom} und für einen inhomogenen Stoff die mittlere Dichte $\bar{\rho}_{\text{inhom}}$.

$$\rho_{\text{hom}} = \frac{m}{V} \quad (2a) \qquad \bar{\rho}_{\text{inhom}} = \frac{m}{V} \quad (2b)$$

Die SI-Einheit der Dichte ist kg/m^3 bzw. der Quotient aus zulässiger Masse- und Volumeneinheit (z.B. die weitverbreitete Angabe der Dichte in g/cm^3).

Gelegentlich erfolgt auch die Angabe einer relativen Dichte d , eines reinen Zahlenwertes, der das Verhältnis der Dichte ρ zu der Dichte eines Bezugsstoffes ρ_0 (z.B. Wasser) angibt. Eine aus der Dichte ableitbare, kaum noch gebräuchliche, Größe ist die Wichte γ , die das Produkt aus ρ und der Fallbeschleunigung g ist. Die SI-Einheit der Wichte ist N/m^3 . Ursprünglich war γ als Quotient von Gewichtskraft F_g und Volumen V definiert, woraus die SI-fremde Dimension kp/dm^3 resultiert.

Wie aus den Beziehungen (2a) und (2b) folgt, beruht die Ermittlung der Dichte auf der Bestimmung der Masse m und des Volumens V . Während m problemlos mit hoher Genauigkeit bestimmbar ist, kann eine direkte Volumenmessung u. U. unmöglich oder ungenau sein.

Absolutverfahren Bei diesem Verfahren, auch *direkte Methode* genannt, lässt sich die Dichte eines Stoffes unmittelbar aus den Beziehungen in (2) berechnen. Dazu muss man das Volumen genau bestimmen können, z.B. bei einem Festkörper mit berechenbarer Form oder Flüssigkeiten mit speziellen Messgefäßen (Pyknometer).

Relativverfahren Falls das Volumen V nicht oder nur ungenau messbar ist, bedient man sich *Relativverfahren* (auch: *indirekte Methode*), bei denen die Volumenmessung umgangen wird bzw. V bei der Berechnung eliminiert werden kann. Allerdings ist bei dieser Methodik eine Kalibrierungsflüssigkeit/ein Kalibrierungskörper mit bekannter Dichte notwendig. Um das Volumen zu eliminieren führt man zwei Messungen durch bei denen das Volumen konstant ist. Nach Gleichung (2) folgt dann:

$$\frac{m_1}{\rho_1} = V_1 \stackrel{!}{=} V_2 = \frac{m_2}{\rho_2} \Rightarrow \rho_2 = \frac{m_2}{m_1} \cdot \rho_1.$$

Häufig nutzt man das *Archimedische Prinzip* für der Messung bei konstanten Volumen:

„Die auf einen in eine Flüssigkeit eingetauchten Körper wirkende Auftriebskraft ist gleich dem Gewicht, der vom Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge.“

Das heißt, die Masse der verdrängten Flüssigkeit, die exakt das Volumen des zu messenden Körpers hat, ist gleich der Verringerung des gemessenen Gewichtes durch die Auftriebskraft. Erweitert man das Verhältnis der Massen mit der Fallbeschleunigung, so erhält man ein Verhältnis von Kräften, die ja eigentlich gemessen werden.

Praktische Beispiele sind das Aräometer, die *Mohrsche* und die *Jollysche Waage*. Bei einem Aräometer (Abb. 3), einem Messkörper geeigneter Form und definierter Masse, beruht die Dichtemessung einer Flüssigkeit auf der Tatsache, dass die Gewichtskraft eines Aräometers gleich der Auftriebskraft der Flüssigkeit ist. Nach der Kalibrierung lässt sich aus der Eintauchtiefe des schwimmenden Aräometers die Dichte der Flüssigkeit ablesen. Daraus folgt, dass für verschiedene Dichtebereiche entsprechend angepasste Aräometer (Messspindeln) benötigt werden.

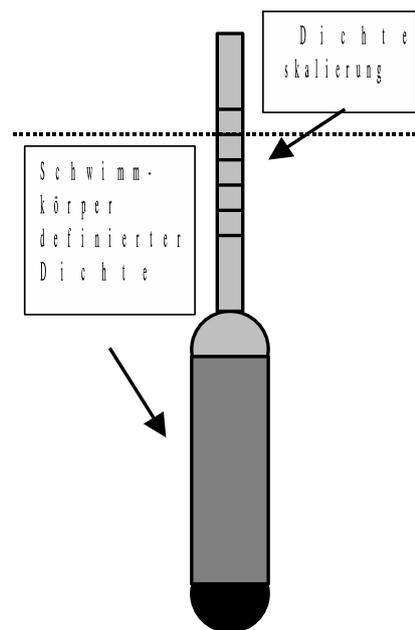


Abb. 3: Aräometer

Mohrsche Waage Bei der Mohrschen Waage wird ein Schwimmkörper an einem Hebelarm gehängt. Zunächst sollte der Hebelarm in einer horizontalen Lage sein. Dann wird der Schwimmkörper in eine Flüssigkeit (mit bekannter Dichte ρ_0) getaucht und der Auftrieb $F_{A,0}$ durch Massestücke am Hebelarm ausgeglichen. Mit Hilfe der Massestücke und einer Skala am Hebelarm lässt sich die Auftriebskraft genau bestimmen. Anschließend taucht man den Schwimmkörper und die Flüssigkeit mit der unbekanntenen Dichte ρ_x und misst wiederum über den Ausgleich durch Massestücke die Auftriebskraft $F_{A,x}$. Die Dichte ergibt sich dann mit:

$$\rho_x = \frac{F_{A,x}}{F_{A,0}} \cdot \rho_0. \tag{3}$$

Jollysche Waage Die Jollysche Waage (Abb. 4(b)) besteht aus einem Gestell mit zwei Schalen, welches an einer Feder hängt. Die untere Schale taucht in eine Flüssigkeit der Dichte ρ_0 . Nun wird zunächst die Masse mit der unbekanntenen Dichte ρ_x auf die obere Schale gelegt. Anhand der Auslenkung der Feder und der Federkonstanten erhält man die Gewichtskraft F_{Luft} . Dieser Vorgang

¹Fotograf: Oliver Kurmis, aufgenommen 2000 im Physik-Praktikum an der Uni-Jena, cc-by-sa-Lizenz v2.0, <http://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Mohr-Westphalsche-Waage.jpg>

wird wiederholt mit der Masse auf der unteren Schale. Wiederum liest man die Auslenkung und damit die Kraft F_{F1} ab. Die Dichte ergibt sich dann aus:

$$\rho_x = \frac{F_{Luft} \cdot \rho_0 - F_{F1} \cdot \rho_{Luft}}{F_{Luft} - F_{F1}} \quad (4a)$$

$$\rho_x \approx \frac{F_{Luft}}{F_{Luft} - F_{F1}} \cdot \rho_0 \quad (4b)$$

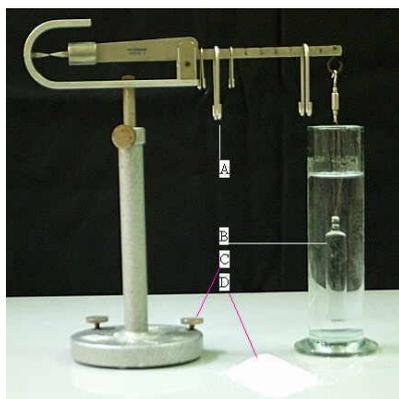
Die Näherung (4b) gilt, falls man den Auftrieb der Luft in (4a) vernachlässigen kann. Alternativ zu der Anordnung mit dem Gestell an einer Feder findet man häufig auch einen *Jollyaufsatz*, den man mit einer Schalenwaage verbinden kann. Dabei misst die Waage die Gewichtskraft, bzw. die durch den Auftrieb reduzierte Gewichtskraft. Da diese sich aus dem Produkt der Masse m und der Fallbeschleunigung g ergeben, findet man für die Formel (4b) die alternative Formulierung:

$$\rho_x = \frac{m_{Luft} \cdot \rho_0 - m_{F1} \cdot \rho_{Luft}}{m_{Luft} - m_{F1}} \approx \frac{m_{Luft}}{m_{Luft} - m_{F1}} \cdot \rho_0 \quad (5)$$

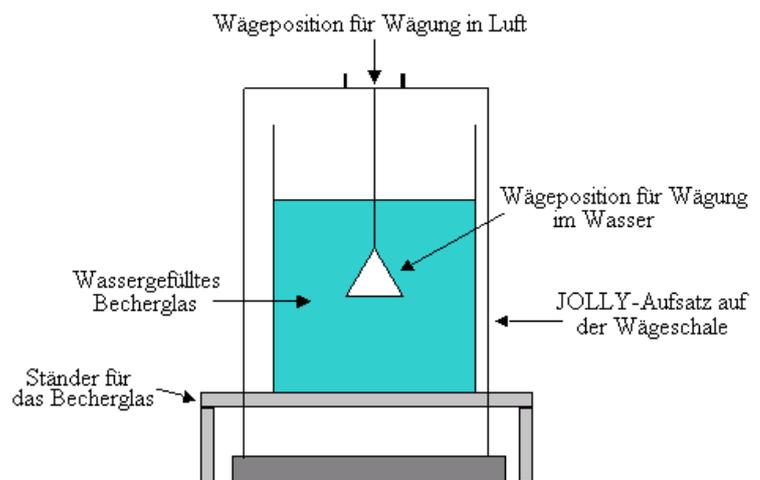
Pyknometer Das Pyknometers dient der Sicherung eines konstanten Volumens. Für die Messung der Dichte einer *Flüssigkeit* wird das Pyknometer zunächst mit einer Kontrollflüssigkeit der Dichte ρ_0 bis zum Rand gefüllt und gewogen (Masse m_1). Über die Leermasse m_P des Pyknometers erhält man die Flüssigkeitsmasse $m_0 = m_1 - m_P$. Anschließend reinigt man den Behälter und füllt die unbekannte Flüssigkeit mit der Dichte ρ_x bis zum Rand ein. Wiederum wägt man alles (Masse m_2) und erhält damit die Masse $m_x = m_2 - m_P$. Die Dichte folgt aus:

$$\rho_x = \frac{m_x}{m_0} \cdot \rho_0 \quad (6)$$

Für die Messung der Dichte ρ_x eines *Festkörpers* muss man zunächst seine Masse m_x bestimmen (wägen). Nun muss der Körper in das Pyknometer gelegt werden und das restliche Volumen ist



(a) Mohr-Westphalsche-Waage¹
 A – Gewichte
 B – Glasschwimmer
 C – Stellschrauben
 (für horizontale Ausrichtung)
 D – Salz zum Auflösen im Wasser



(b) Jollysche Waage

Abb. 4: Dichtebestimmung mittels Auftriebskraft

mit der Kontrollflüssigkeit (Dichte ρ_0) aufzufüllen. Misst man nun die gesamte Masse m_3 setzt sich diese aus der Masse des Festkörpers m_x , der Masse des Pyknometers m_P und der Masse der *nicht* verdrängten Kontrollflüssigkeit m_n zusammen. Daraus kann man die Masse der verdrängten Flüssigkeit berechnen:

$$m_v = m_0 - m_n = m_0 - (m_3 - m_P - m_x).$$

m_0 ist entweder aus dem vorherigen Versuch bekannt oder muss gemessen werden. Mit dieser Größen kann man die Dichte berechnen:

$$\rho_x = \frac{m_x}{m_v} \cdot \rho_0. \quad (7)$$

Luftauftrieb In den Beziehungen (3), (6) und (7) ist der Einfluss des Luftauftriebs vernachlässigt. Zur Veranschaulichung, dass diese Näherung vernachlässigbar ist, betrachtet man das Verhältnis von Gewichtskraft- und Auftriebskraft (siehe Archimedisches Prinzip für die Auftriebskraft):

$$\frac{F_a}{F_g} = \frac{\rho_{\text{Luft}} V_{\text{Luft}} \cdot g}{m_x \cdot g} \stackrel{V_{\text{Luft}}=V_{\text{verdrängt}}}{=} \frac{\rho_{\text{Luft}} \cdot \frac{m_x}{\rho_x}}{m_x} = \frac{\rho_{\text{Luft}}}{\rho_x}$$

Betrachten wir nun eine Probe mit einer Dichte von $8 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Unter Standardbedingungen (Temperatur 293 K, Druck 101,325 kPa) hat die Luft eine Dichte von $1,2041 \text{ mg} \cdot \text{cm}^{-3}$. In die eben hergeleitete Formel eingesetzt ergibt das ein Verhältnis von $0,00016 = 0,16 \%$. Eine 10 g schwere Probe wird damit gerade mal 1,6 mg leichter. Werden genauere Dichtebestimmungen gefordert, ist jedoch die Beachtung des Luftauftriebs notwendig.

3 Versuchsdurchführung

Von den angegebenen Möglichkeiten der Dichtebestimmung werden die in der Aufgabenstellung erwähnten Methoden genutzt und die Ergebnisse sowie deren Genauigkeit verglichen. Geben Sie an, welche Fehlerquellen bei der Ermittlung von $\Delta\rho_x$ ggf. vernachlässigt wurden (Begründung!). Geben Sie alle Ergebnisse in der Form $\rho \pm \Delta\rho_{\text{stat}} + \Delta\rho_{\text{syst}}$ an (im Nebenfach: $\rho \pm \Delta\rho$).

Hinweise für Physik-Bachelor/Lehramt:

Für die Bestimmung der statistischen Messunsicherheiten sollen alle relevanten Messungen 10 mal unter identischen Bedingungen durchgeführt werden.

4 Auswertung / Messunsicherheiten

Für die Auswertung und Behandlung der Messunsicherheiten wird eine MS-Excel-Vorlage vorgegeben, die mit den Messwerten und entsprechenden Formeln zu vervollständigen ist.

Für Physik Bachelor:

In diesem Versuch soll das Problem von Korrelationen in der Behandlung der Messunsicherheiten betrachtet werden. Wir gehen davon aus, dass bei Messungen mit demselben (identischen) Messgerät korrelierte systematische Messunsicherheiten auftreten können (z.B. Längenmessung mit *demselben* Messschieber, Wägung mit *derselben* Waage), wobei der Grad an Korrelation selbst unbekannt ist. Für diesen Fall gehen wir von der Gaußschen Fehlerfortpflanzung zur sog. Maximalfehlerabschätzung über, d.h.

$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \Delta z\right)^2 + \dots} \Rightarrow \left|\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial y} \Delta y\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial z} \Delta z\right| + \dots \quad (8)$$

Beispiel: Die Messgrößen x und y werden mit demselben Messgerät gemessen (z.B. Messschieber) und die Messgröße z mit einem anderen (z.B. Waage). Mit den entsprechenden zufälligen und systematischen Messunsicherheiten sind gegeben. Für die Größe $F = f(x, y, z)$ ergeben sich somit die folgenden zufälligen (unkorrelierten) und systematischen (teilweise korrelierten) Abweichungen:

$$\begin{aligned} \Delta F_{\text{stat}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x_{\text{stat}}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \Delta y_{\text{stat}}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \Delta z_{\text{stat}}\right)^2} \\ \Delta F_{\text{syst}} &= \sqrt{\left(\left|\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x_{\text{syst}}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial y} \Delta y_{\text{syst}}\right|\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \Delta z_{\text{syst}}\right)^2}. \end{aligned}$$

Durch Korrelationen, beispielsweise ein Messschieber misst alle Messwerte zu groß, kann die Unsicherheit der gesuchten Größe (z.B. das Volumen) größer ausfallen, als unter sie der Annahme „unkorreliert“ berechnet wird. Mithilfe der Maximalfehlerabschätzung können für diesen Fall realistische Unsicherheiten angegeben werden. Allerdings können damit insbesondere bei Differenzmessungen die Unsicherheiten wiederum stark überschätzt werden, wenn tatsächlich volle Korrelation (Korrelationsfaktor gleich 1) vorliegen sollte.

Für Lehramt Physik:

Systematische Messunsicherheiten werden grundsätzlich mit Maximal-Fehlerfortpflanzung berechnet, d.h.:

$$\Delta F_{\text{syst}} = \left|\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x_{\text{syst}}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial y} \Delta y_{\text{syst}}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial z} \Delta z_{\text{syst}}\right|.$$

Autorenschaft

Diese Versuchsanleitung wurde in ihrer ursprünglichen Form von ... erstellt und von M. Keller, J. Kelling, F. Lemke, S. Majewsky bearbeitet. Aktuelle Änderungen werden von der Praktikumsleitung durchgeführt.

Fragen

1. Welche Waagenarten gibt es? Nennen Sie deren Messprinzipien
2. Welche Bedeutung hat der Auftrieb bei der Wägung?
3. Welche Verfahren zur Dichtebestimmung kennen Sie und wie genau sind diese Verfahren?
4. Wie wirken sich Druck und Temperatur auf die Dichte eines Stoffes aus?
5. Schätzen Sie die Genauigkeit von Wägung und Volumenbestimmung ab.

Literatur

- [1] A. Recknagel, *Physik: Mechanik*, Technik-Verlag, Berlin 1990
- [2] W. Walcher, *Praktikum der Physik*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1989
- [3] W. Ilberg (Hrsg.), M. Krötzsch (Hrsg.) et. al., *Physikalisches Praktikum für Anfänger*, Teubner-Verlag, Leipzig 1994
- [4] L. Biétry, *Mettler-Wägelexikon*, Mettler-Verlag, Greifensee 1982