

Technische Universität Dresden Fachrichtung Physik L. Jahn, A. Schwab 09/2005	Physikalisches Praktikum Versuch: DP
---	---

## Brechzahl und Dispersion

## Abbe'-Refraktometer

### Aufgabenstellung:

- I. Mit dem Refraktometer nach Abbe' sind die Brechzahlen  $n_D$  und die Standard-Dispersion ( $n_F - n_C$ ) von destilliertem Wasser, einer zweiten Flüssigkeit und einer Glasplatte zu bestimmen.
- II. Es werden die Brechzahl  $n_D$  und Standard-Dispersion ( $n_F - n_C$ ) für den ordentlichen und den außerordentlichen Strahl eines Quarz-Kristalls bestimmt.
- III. Für destilliertes Wasser ist bei Beleuchtung mit einer Cd-Spektrallampe und einer Hg-Spektrallampe die Abhängigkeit der scheinbaren Brechzahl  $x$  von der Wellenlänge  $\lambda$  zu messen. Anschließend ist mittels Korrekturrechnungen aus  $x(\lambda)$  die Dispersionskurve  $n(\lambda)$  zu bestimmen und diese mit dem von Kislovskii /1/ gefundenen  $n(\lambda)$  Zusammenhang zu vergleichen.

# 1 Allgemeine Grundlagen

## 1.1 Snellius'sches Brechungsgesetz und Totalreflexion

Trifft eine elektromagnetische ebene Welle aus dem Vakuum (Lichtgeschwindigkeit  $c$ ) unter dem Einfallswinkel  $\alpha$  (Winkel zwischen Wellennormale und Einfallslot) auf die ebene Grenzfläche eines Mediums (Lichtgeschwindigkeit  $c_1 < c$ ), so wird ein Teil der Welle reflektiert<sup>1</sup> und der restliche Teil dringt in das Medium ein, wobei die Wellennormale in Richtung Einfallslot abgelenkt wird (Brechungswinkel  $\beta$ ). Nach Snellius<sup>2</sup> gilt

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c}{c_1} = \frac{n_1}{n_o} \quad (1)$$

mit  $n_o=1$  als Brechzahl des Vakuums und  $n_1$  als Brechzahl des Mediums. Meist ist das umgebende Medium Luft, dessen Brechungsindex ist bei 15°C und  $p=101,325$  kPa  $n_L=1,00028 \approx 1$  (trockene Luft).

Beim Übergang zwischen zwei Medien gilt  $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$ . Ist  $n_1 > n_2$ , so entfällt oberhalb

eines bestimmten Einfallswinkels ( $\alpha_{1,gr} = \arcsin(n_2/n_1)$ ) der gebrochene Anteil und es erfolgt **Totalreflexion** ( $\alpha_{1,gr}$  = Grenzwinkel der Totalreflexion). Für nicht zu hohe Frequenzen (Radiowellen) gilt die Maxwellsche Relation

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}, \quad (2)$$

<sup>1</sup> Der quantitative Zusammenhang zwischen einfallendem, gebrochenen und reflektierten Anteil unter Berücksichtigung der Polarisation ist durch die Fresnel'schen Formeln gegeben

<sup>2</sup> 1580-1626

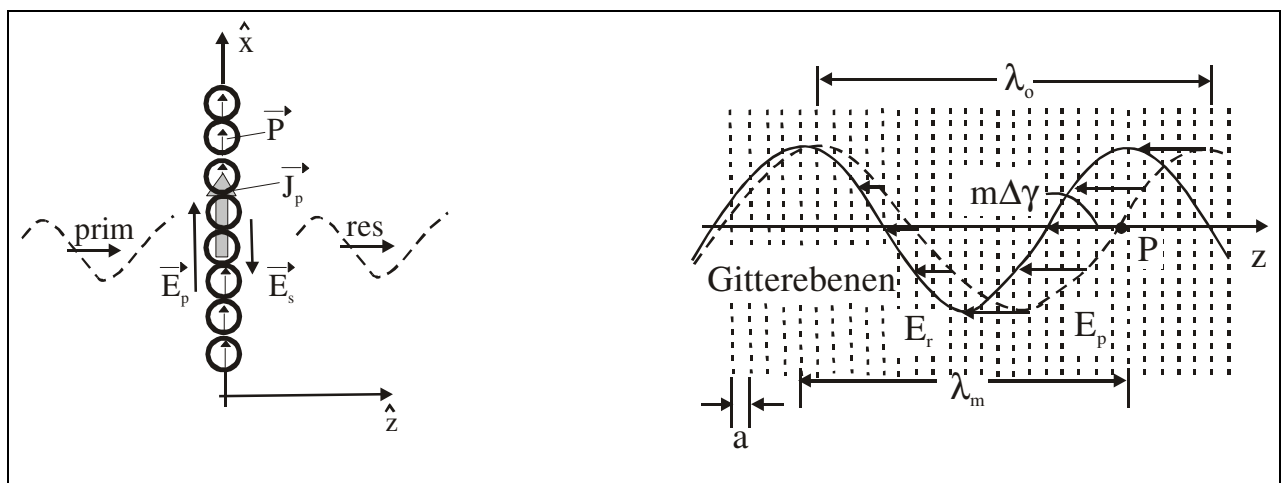
angenähert für nicht ferromagnetische Stoffe durch  $\mu_r \approx 1$ . So ist z.B. für Wasser bei niedrigen Frequenzen (im Bereich von Radio-Wellen)  $n = \sqrt{81} = 9$ , während im Bereich des sichtbaren Lichtes etwa  $n \approx 1,33$  gemessen wird. Eine derartige Frequenzabhängigkeit der Brechzahl weist auf eine (starke) Dispersion hin.

## 1.2 Dispersion

Die Wechselwirkung der einzelnen Atome des Mediums mit der elektromagnetischen Welle (Kreisfrequenz  $\omega$ ) führt zu gedämpften erzwungenen Schwingungen der Elektronen (Resonanz in der Nähe der Eigenfrequenz  $\omega_0$ ), wobei nur bei verdünnten oder durchsichtigen Medien (weit entfernt von der Resonanzstelle) Dispersion und Absorption zu trennen sind (im folgenden wird Absorption nicht betrachtet).

Zur anschaulichen Erklärung der Dispersion zeigt Abb. 1 schematisch, wie die durch die Primärwelle angeregten Atome des Mediums die Sekundärwellen mit wachsender Phasenverschiebung und dadurch verkürzter Wellenlänge abstrahlen. Wegen der Größe  $(\omega_0^2 - \omega^2)$  im Nenner der Resonanzamplitude wird die Brechzahl frequenzabhängig. Die Theorie ergibt für konzentrierte Nichtleiter (z.B. Gläser, s. Anhang 3.4.1.2; die Formel von Clausius-Mosotti<sup>3</sup> bzw. Lorentz-Lorenz<sup>4</sup>):

$$\frac{(n^2 - 1)}{(n^2 + 2)} \propto \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)}. \quad (3)$$



a)

b)

Abb.1:

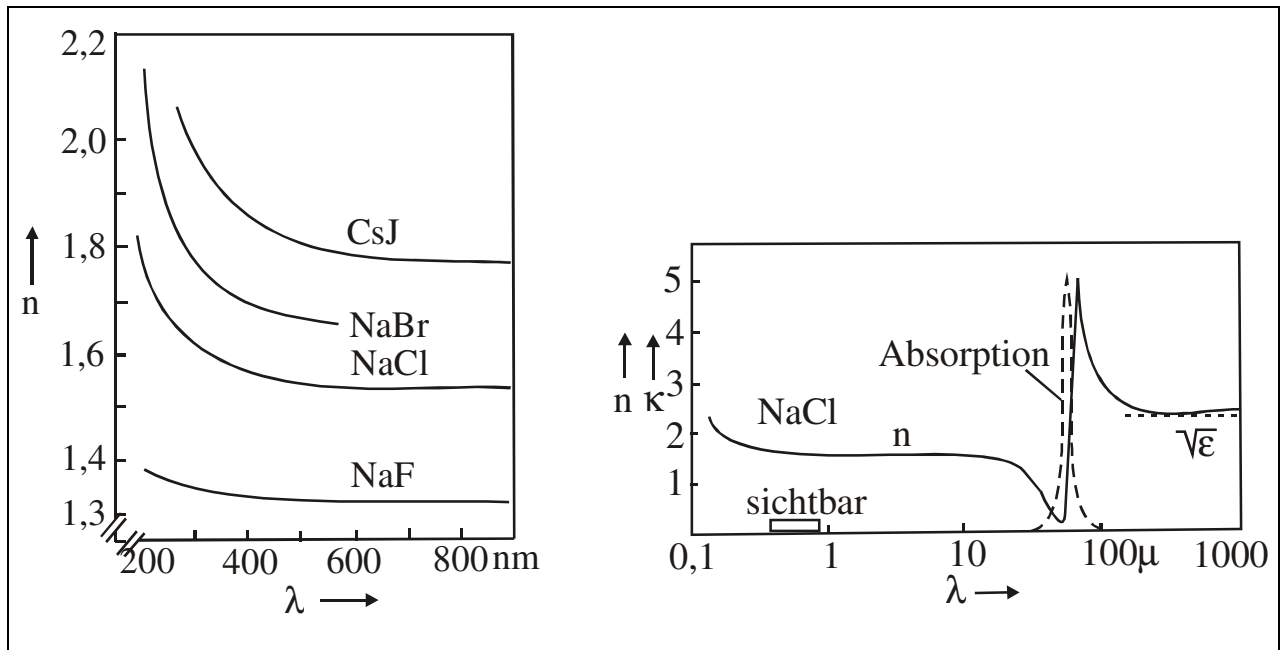
Polarisationsstrom  $J_p$  und Sekundärwelle einer mitschwingenden Atom-Ebene (a);Primärwelle ( $\lambda_0$ ) und Phasenverschiebung der Sekundärwelle (b) /2/

Trägt man die Brechzahl über der Wellenlänge des einfallenden Lichtes auf, so erhält man die Dispersionskurve (Abb. 2). Für die meisten Gläser nimmt  $n$  mit wachsendem  $\lambda$  im Bereich des sichtbaren Lichtes ab (Abb. 2a; normale Dispersion), während in der Nähe einer

<sup>3</sup> R. Clausius 1822-1888, O.-F. Mosotti 1791-1863

<sup>4</sup> V. Lorenz 1829-1888, H.A. Lorentz 1853-1928

Resonanzstelle (meist im UV-Bereich) starke Absorption mit anomaler Dispersion beobachtet wird (Abb. 2b).



a)

b)

Abb. 2:  $n(\lambda)$  für normale (a); (b) mit anomaler Dispersion um  $\lambda \approx 80 \mu\text{m}$ , begleitet von starker Absorption [2/

### 1.3 Standard-Dispersion

Ein geeignetes Dispersions-Maß wäre z.B.  $\frac{\partial n}{\partial \lambda}$  (s. Auflösungsvermögen von Prismen), wobei die gesamte (bekannte) Kurve  $n(\lambda)$  abzuleiten wäre.

Traditionell und bei Festlegung auf bestimmte Wellenlängen werden zur Charakterisierung von Gläsern in der Optik Brechzahl und Dispersion den Fraunhofer-Linien C, D, F zugeordnet:

1. **Die Brechzahl  $n$**  bezieht man auf die Natrium-D-Linie; es wird  $n_D$  angegeben.
2. **Die Dispersion** wird bezogen auf die Differenz der Brechzahlen für die F- und C-Linie, d.h. es wird  $(n_F - n_C)$  angegeben (Standard-Dispersion).

Zur weiteren Charakterisierung eines brechenden Mediums wird häufig die relative Dispersion  $\vartheta_{\text{rel}}$  oder deren Kehrwert, die Abbe'-Zahl  $\nu$  benutzt:

$$\vartheta_{\text{rel}} = \frac{(n_F - n_C)}{(n_D - 1)}; \quad \nu = \frac{(n_D - 1)}{(n_F - n_C)}. \quad (4)$$

### 1.4 Geradsichtprisma und Abbe'-Refraktometer

Für ein Prisma bekannter Geometrie, Brechzahl und Dispersion lässt sich die Ablenkung, die um so stärker ist, je größer die Dispersion und die Basisbreite des Prismas sind, berechnen. Mit Kombinationen von Prismen aus unterschiedlichen Glassorten können entweder die Dispersion oder die Brechung unterdrückt werden.

Bei Geradsichtprismen (Amici<sup>5</sup>) werden drei oder fünf Kron- und Flintglas- Prismen, deren Abbe'-Zahlen verschieden sind und deren brechende Kanten gegeneinander stehen, abwechselnd in einer Reihe montiert (Abb.3). Ein achsennaher Strahl mit der D-Wellenlänge passiert die Anordnung (im Innern zwar mehrfach gebrochen, aber am Ausgang) geradlinig, während Strahlen anderer Wellenlängen abgelenkt werden.

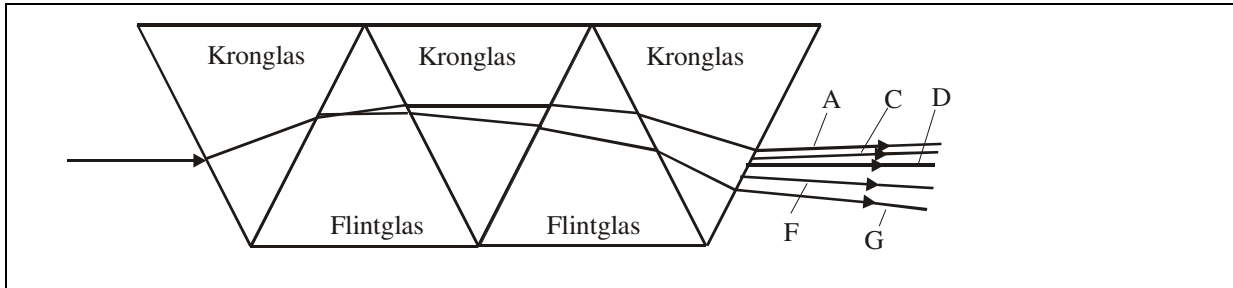


Abb. 3: Beispiel eines Geradsichtprismas

Im Tubus des Beobachtungs-Fernrohres des Abbe'- Refraktometers (Abb.4 ) sind zwei Geradsichtprismen (Farb-Kompensator) entlang der Tubusachse in Reihe angeordnet. Bei einer gegenseitigen Verdrillung beider Prismen um die Strahl-Achse wird die  $n_D$ -Linie durchgelassen, während andere Wellenlängen ganz verschwinden, da sie zwei mal seitlich abgelenkt werden. Allerdings ist diese seitliche Ablenkung auch von der Dispersion des Messobjektes (Flüssigkeit) abhängig, was für die empirische Dispersionsbestimmung ausgenutzt wird. Die Drehstellung des Farb-Kompensators wird von der Trommel angezeigt.

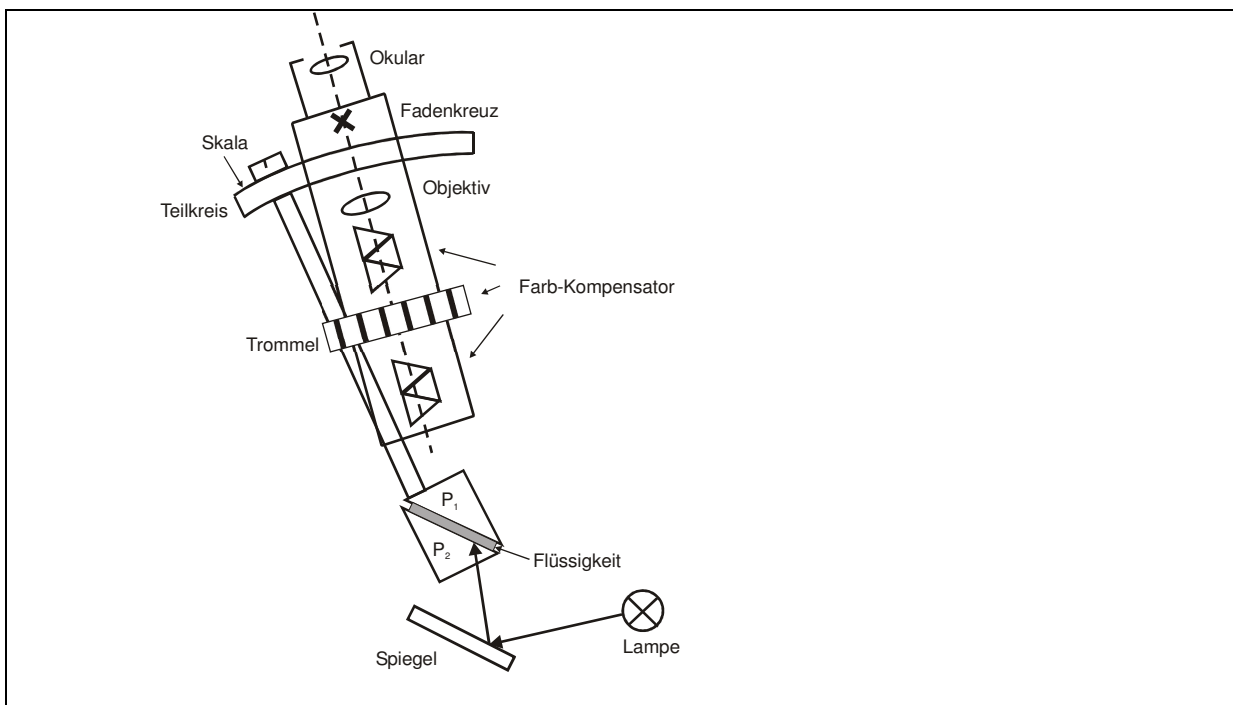


Abb. 4 Schematische Darstellung des Abbe'-Refraktometers (rechter Tubus)

Das Fernrohr ist mit einem Teilkreis fest verbunden, während das Doppelpisma ( $P_1, P_2$ ) mit einem Arm gegen das Fernrohr drehbar ist. Dadurch kann der Einfallswinkel des Lichts so lange variiert werden, bis die Grenzlinie zwischen Hell und Dunkel, die im Gesichtsfeld des

<sup>5</sup> G. Amici 1860

Fernrohres erscheint, auf den Schnittpunkt des Fadenkreuzes im Okular eingestellt ist. Auf dem Teilkreis kann dann die entsprechende Brechzahl des Messobjektes abgelesen werden.

### 1.5 Strahlengang im Refraktometer nach Abbe'

Die Refraktometer nach Abbe' und Pulfrich nutzen den Grenzwinkel der Totalreflexion aus. Die Abb. 5 zeigt den Strahlengang im Messprisma ( $P_1$ ) eines Refraktometers nach Abbe'.

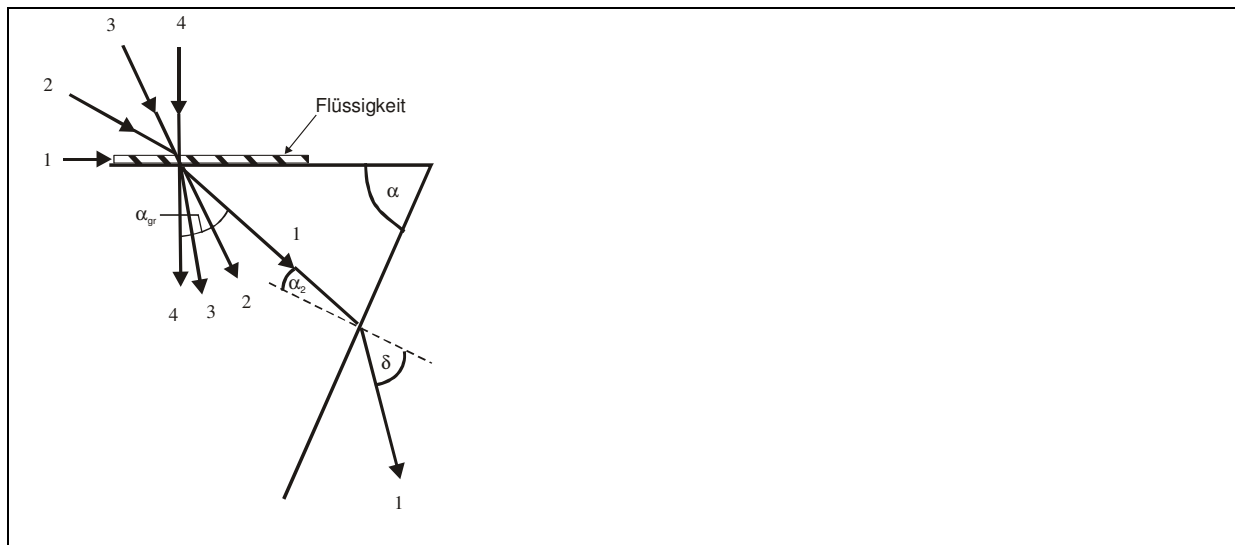


Abb. 5: Schematischer Strahlengang im Messprisma nach Abbe'

Das Messprisma  $P_1$  ist durch den charakteristischen Prismenwinkel  $\alpha$  (beim Pulfrich-Refraktometer beträgt  $\alpha=90^\circ$ ) gekennzeichnet. Die maximale Brechzahl der Messflüssigkeit ist begrenzt: ( $n_{fl} < n_{pr}$ ). Man bringt einen Tropfen der Flüssigkeit zwischen beide Prismen. Über das Beleuchtungsprisma ( $P_2$ ) gelangt diffuses weißes Licht in die Flüssigkeitsschicht. Dieses diffuse Licht wird nur bis  $\alpha_{gr}$  in das Messprisma hineingebrochen. Der restliche Winkelbereich bleibt dunkel. Beim Austritt aus dem Prisma wird der Grenzwinkel  $\delta$  gemessen. Nach Gl. (1) gilt mit  $\alpha_1 = \pi/2$ :  $\sin(\alpha_{gr}) = n/n_{pr}$ . Unter Beachtung der Winkelsumme im Dreieck sowie  $n_{Luft} \approx 1$  gilt für die zu bestimmende Brechzahl der Flüssigkeit  $n_{fl}(\lambda)$

$$n_{fl}(\lambda) = \sin(\alpha) \sqrt{n_{pr}^2 - \sin^2(\delta)} - \cos(\alpha) \sin(\delta) \quad (5)$$

Die Messskala (linker Tubus des Abbe' Refraktometers) ist nicht in Winkleinheiten (für  $\delta$ ), sondern in  $n_D$ -Werten kalibriert.

#### Der Kompensator und die empirische Bestimmung der Standard-Dispersion:

Im Beobachtungsstrahlengang (rechter Tubus des Abbe' Refraktometers) befindet sich das erwähnte Paar von Geradsichtprismen (Farb-Kompensator), deren gegenseitige Verdrillung  $z$  bis zum Verschwinden des farbigen Saums angezeigt wird ( $0 \leq z \leq 60$ ; Geradeausstellung entspricht  $z = 30$  Skt.). Dieser Kompensator erfüllt (bei weißem Licht) zwei Aufgaben:

1. Er selektiert den Na-D-Strahl für die  $n_D$ -Bestimmung.
2. Der dazu benötigte  $z$ -Wert ist ein empirisches Maß für die Dispersion.

( $n_F - n_C$ ) kann daraus über eine empirische Tabelle bestimmt werden.

**Gläser:**

Zur Messung der Brechzahl und der Dispersion von Glas- (oder Quarz-) Platten bleibt das Beleuchtungsprisma aufgeklappt. Das Messobjekt wird mit einer Flüssigkeit hoher Brechzahl (MBN=Monobromnaphthalin) von unten an das Messprisma  $P_1$  angeklebt ( $n_{gl} < n_{MBN} < n_{pr}$ ,  $n_{MBN}=1,6572$ ;  $19^\circ\text{C}$ ).

Die Platten sind zur diffusen Beleuchtung mit weißem Licht stirnseitig matt geschliffen.

**1.6 Doppelbrechender Kristall**

In einachsigen doppelbrechenden Kristallen existieren zwei Lichtgeschwindigkeiten ( $c_o$  und  $c_e$ ) und daher zwei Brechzahlen ( $n_o$  und  $n_e$ ; o für ordentlich=ordinär und e für extraordinär).  $c_o$  und  $c_e$  fallen für eine ausgezeichnete Kristall-Richtung, die optische Achse, zusammen. Natürliches Licht, das nicht in der optischen Achse einfällt, wird in einen ordentlichen und in einen außerordentlichen Strahl aufgespalten. Beide Strahlen sind senkrecht zueinander polarisiert. Bei einem Hauptschnitt ist ein Kristall so geschliffen, dass die optische Achse in der Schnittebene liegt. Beim o-Strahl schwingt der E-Vektor der Lichtwelle senkrecht zum Hauptschnitt, beim e-Strahl in der Ebene des Hauptschnitts. Für den Versuch ist der Quarz senkrecht zur optischen Achse geschliffen und diese (Kreis-) Fläche wird mit MBN auf das Messprisma geklebt. Der tangierende Grenzstrahl beleuchtet also stets senkrecht zur optischen Achse. So treten ein o- und ein e-Strahl in das Messprisma ein und man beobachtet zwei scharfe Übergänge zwischen Hell-Grau bzw. Grau-Dunkel, die zur Bestimmung von  $n_o$  bzw.  $n_e$  dienen.

**2 Experimente****2.1 Standard-Messungen mit dem Abbe' – Refraktometer**

Zur Bestimmung der Brechzahl und der Dispersion von Flüssigkeiten (eine davon ist Wasser als Normal) wird das Refraktometer als Routine-Gerät mit „weißem“ (Glühlampen-) Licht benutzt und nach Gebrauchsanweisung verfahren. Das gilt bei schonender Behandlung des Prismas (jeglichen Kratzer vermeiden!) auch für die Glas- bzw. die Quarz-Platte.

**2.2 Beleuchtung mit Spektrallinien**

Hätte man monochromatische Beleuchtung (z.B. Na-D-Licht), so würde man einen Übergang von gelb nach dunkel beobachten. Der Kompensator würde nur in der neutralen Stellung ( $z = 30$  Skt.) Licht durchlassen und eine Bestimmung der Dispersion wäre nicht möglich. Im Versuchsteil III wird bei  $z = 30$  Skt. = konstant die Gültigkeit der empirische Dispersionsformel für Wasser nach Kislovskii /1/

$$n^2(\lambda) = 1.29 + \frac{0.47 \cdot \lambda^2}{\lambda^2 - (0.119)^2} - \frac{0.08 \cdot \lambda^2}{(2.92)^2 - \lambda^2} \quad (\lambda \text{ in } \mu\text{m}) \quad (6)$$

mit den 4 Spektrallinien einer Cd-Spektrallampe und 3 Spektrallinien der Hg-Lampe überprüft.

Dazu werden bei Verwendung der Cd- Spektrallampe für die von schwarz nach rot sowie rot nach grün scharf (dann weniger scharfen ; Verbesserung mit Blaufilter!) beobachtbaren

Übergänge die scheinbaren  $n$ -Werte, ab sofort  $x$ -Werte, bestimmt. Bei Verwendung der Hg-Lampe werden durch geeignete Metallinterferenzfilter die entsprechenden Spektrallinien herausgefiltert, so dass man eine monochromatische Beleuchtung erhält, für die der entsprechende Übergang (Farbe-Schwarz) hinsichtlich der Bestimmung der scheinbaren Brechzahl auszumessen ist. Die Umrechnung des gemessenen  $x(\lambda)$ -Zusammenhangs auf den  $n(\lambda)$ -Zusammenhang erfolgt nach Gl. (5), wobei die den scheinbaren Brechzahlen zuzuordnenden wahren Winkel  $\delta$  (bzw.  $\sin(\delta)$ ) nach Gl. (7)

$$\sin(\delta) = \sin(\alpha)\sqrt{n_D'^2 - x^2} - \cos(\alpha)x \quad (7)$$

zu berechnen sind. Die Brechzahl  $n_D'$  ist die Brechzahl des Messprismas  $P_1$  bei der Wellenlänge  $\lambda_D=589$  nm. Die für diese Umrechnungen benötigten Brechzahlen des Messprismas als Funktion der Wellenlänge ( $n_{pr}(\lambda)$ ) und der Prismenwinkel  $\alpha$  sind für das jeweilige Messgerät den am Messplatz ausliegenden Arbeitsplatzanleitungen zu entnehmen. An die Messung anschließend, sind der Graph der Gleichung (6) sowie die aus den scheinbaren Brechzahlen ermittelten Messwerte  $n(\lambda)$  grafisch darzustellen und miteinander zu vergleichen.

### 3 Anhang

#### 3.1 Zum Messwinkel

Zur Herleitung der Gln. (5 und 7) geht man aus von der Winkelsumme im skizzierten Dreieck innerhalb des Messprismas (s. Abb. 5) und wendet das Brechungsgesetz für den Eintritt des Grenzstrahls in das Prisma und für den Austritt aus dem Prisma an. Diese 3 Beziehungen lauten:

$$\alpha - \alpha_{gr} = \alpha_2 \quad (a); \quad \sin(\alpha_{gr}) = \frac{n}{n_{pr}} \quad (b); \quad \sin(\delta) = n_{pr} \sin(\alpha_2) \quad (c). \quad (8)$$

Nach Einsetzen der Gln. (a, b) in (c) und Umformung folgt Gl. (7) und damit

$$(\sin(\delta) + n \cos(\alpha))^2 = \sin^2(\alpha)n_{pr}^2 - n^2 \sin^2(\alpha), \quad (9)$$

was auf eine quadratische Gleichung für  $n$  führt. Deren Lösung mit positivem Vorzeichen der Wurzel ist

$$n = -\cos(\alpha) \sin(\delta) + \sqrt{(\cos(\alpha) \sin(\delta))^2 + n_{pr}^2 \sin^2(\alpha) - \sin^2(\delta)}. \quad (10)$$

Nach kurzer Rechnung ergibt sich aus Gl. (10) dann Gl. (5).

### 3.2 Cd- und Hg-Spektrallinien, Fraunhoferlinien sowie ausgewählte Brechzahlen

Aus dem Linienspektrum der Cadmium-Spektrallampe (5 min einbrennen lassen!) und der Quecksilber Spektrallampe werden folgende Wellenlängen benötigt:

Tab. 1: Vier Wellenlängen der Cd-Spektrallampe

rot	644,0 nm
grün	508,7 nm
blau	480,1 nm
blau-violett	467,9 nm

Tab. 2: Drei Wellenlängen der Hg-Spektrallampe

gelb	579,0 nm
grün	546,1 nm
violett	435,8 nm

Tab. 3: Wellenlängen von drei Fraunhoferlinien:

$\lambda_F$	486 nm
$\lambda_C$	656 nm
$\lambda_D$	589,3 nm

Tab. 4: Einige Brechzahlen:

Stoff	$n_D$	$(n_F - n_C)$
Destilliertes Wasser	1,3332	0,0059
Ethylalkohol	1,362	
Benzol	1,501	0,017
Kanada-Balsam	1,54	
Schwerst-Flint-Glas	1,9	

### 3.3 Zur Doppelbrechung einachsiger Kristalle

Abb. 6a zeigt sogenannte Wellenflächen, in denen die Lichtgeschwindigkeit im Medium in Abhängigkeit von der Richtung dargestellt ist. Das linke Bild betrifft den optisch negativen Kristall (z.B. Kalkspat,  $c_o < c_e$ ;  $n_o > n_e$ ), das rechte den positiven (z.B. Quarz,  $c_o > c_e$ ;  $n_o < n_e$ , s.a. Abb. 6c). In der Abb. 6b ist schematisch nach [2] die Entstehung des außerordentlichen (E) und ordentlichen Strahles (O) für den Fall eines negativ doppelbrechenden Kristalls (z.B. Kalkspat) angedeutet. Während die durch den Vektor der dielektrischen Verschiebung  $\vec{D}$  bestimmten Richtungen des Wellenzahlvektors  $\vec{k}$  unverändert bleiben, sind die Pointing-Vektoren der Energieströmung  $\vec{S}$  verschieden. Ursache ist die Anisotropie der Dielektrizitätskonstanten.



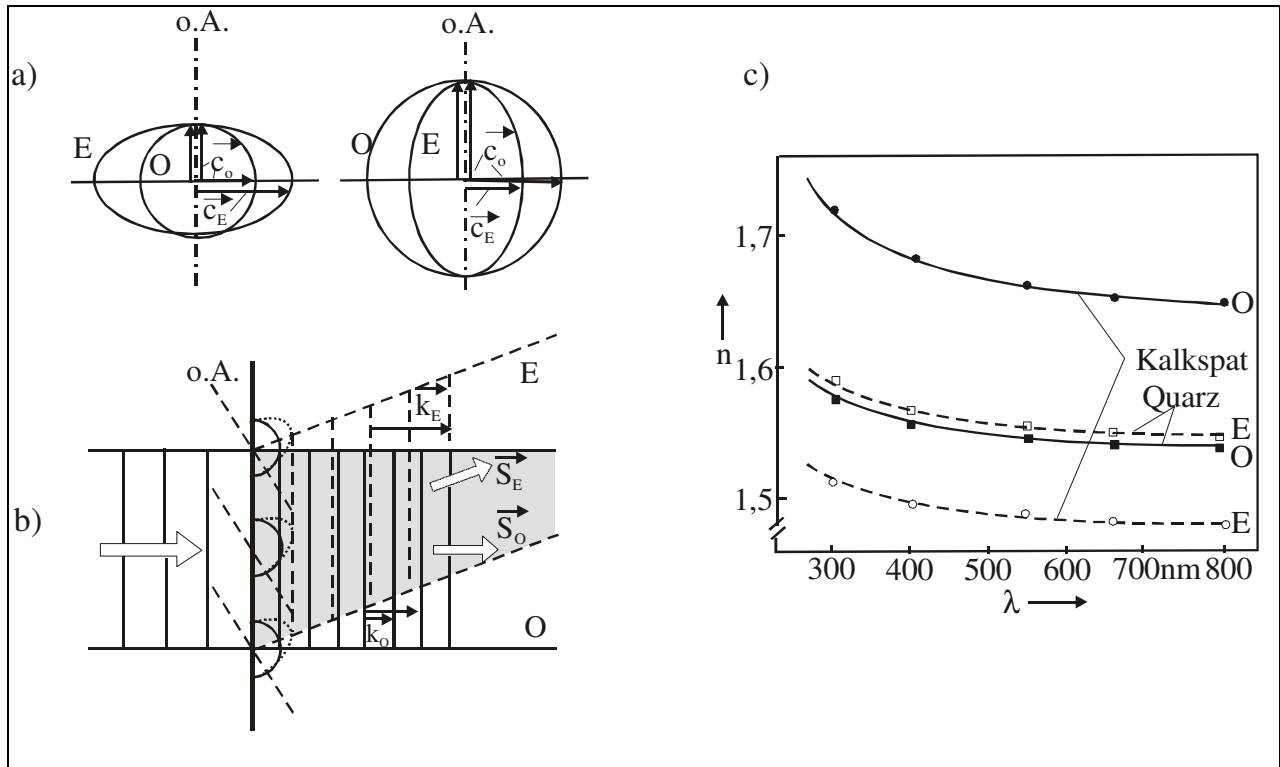


Abb. 6:

a) Wellenflächen im negativ (links) bzw. positiv doppelbrechenden einachsigen Kristall; b) Hygens'sche Elementarwellen im Kristall; c) Beispiele für anisotrope Dispersionskurven

### 3.4 Zum mikroskopischen Verständnis der Dispersion

Durch das hochfrequente E-Feld wird im Medium (Konzentration  $N$  = Anzahldichte) infolge der Störung der Gleichgewichtslage der Elektronen pro Atom ein Dipolmoment  $p = \alpha^* E$  erzeugt, das summarisch die elektrische Polarisation ( $P = Np$ )

$$P = \epsilon_o \chi E = \epsilon_o N \alpha^* E = \epsilon_o (\epsilon_r - 1) E \quad (11)$$

zur Folge hat ( $\chi = (\epsilon_r - 1)$  = elektrische Suszeptibilität;  $N \alpha^* = \chi$ ).

Mit Gl. (2) erhält man  $n^2 - 1 = N \alpha^*$ ; ( $\alpha^*$  = atomare Suszeptibilität).

#### 3.4.1 Modell zur Abschätzung von $\alpha^*$ , erzwungene Schwingung ohne Dämpfung

Die maßgebliche Ladung, ein Elektron ( $e$ ), sei elastisch gebunden ( $\omega_o^2 = k/m$ ), und seine Auslenkung  $x$  (und als Folge das atomare Dipolmoment  $p = ex = \alpha^* E$ ) genügt bei periodischer Anregung ( $E(t) = \hat{E} e^{j\omega t}$ ) der Dgl.

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + k \cdot x = -e \hat{E} e^{j\omega t}; \quad \text{Lösung:} \quad \hat{x} = -\frac{e \hat{E}}{m(\omega_o^2 - \omega^2)}. \quad (12)$$

Es folgt

$$\alpha^* = \frac{\hat{e} \hat{x}}{\hat{E}} = \frac{e^2 / m}{\omega_o^2 - \omega^2} \quad \text{bzw.} \quad n^2 - 1 = N\alpha^* = N(e^2 / m) \sum_i \frac{f_i}{\omega_{i,o}^2 - \omega^2} = Y, \quad (13)$$

wenn man in  $\alpha^*$  pro Atom mehrere Elektronen ( $f_i$  = Oszillator-Stärke) und mehrere Eigenfrequenzen ( $\omega_{i,o}$ ) berücksichtigt, über die summiert wird.

### 3.4.1.1 Verdünnte Medien (Gase)

In der Näherung verdünnter Medien ( $n \approx 1$ ) gilt:

$$n^2 - 1 \approx 2(n - 1), \text{ d.h. } n = 1 + Y/2.$$

### 3.4.1.2 Konzentrierte Medien mit geringer Absorption (Gläser)

Die atomaren Dipole beeinflussen sich gegenseitig über ihre Dipolfelder (Lorentz-Feld) als Folge von Oberflächenladungen. Die daher notwendige Korrektur erfolgt über das Lorentz-Feld  $P/3\epsilon_o$  (s. Abb.7).

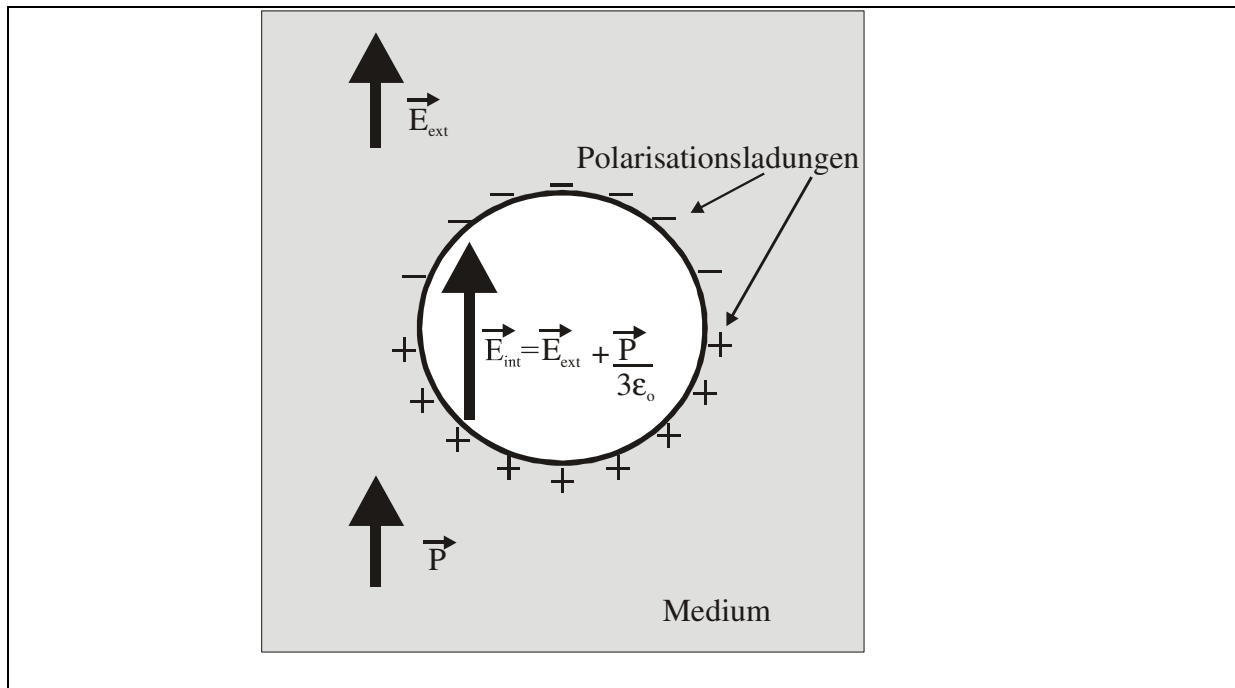


Abb. 7: Eine homogen polarisierte Umgebung erzeugt im kugelförmigen Hohlraum ein Lorentzfeld

Denn zwischen dem inneren, mikroskopischen Feld  $E_{int}$  in einem kugelförmigen Hohlraum um das betrachtete Atom (Lorentzkugel, positiver Beitrag der Umgebung) und dem äußeren, angelegten Feld  $E_{ext}$  besteht bei isotropen Medien die Relation

$$E_{\text{int}} = E_{\text{ext}} + \frac{1}{3} \frac{P}{\epsilon_o} \quad (14)$$

Anstelle von Gl. (11) gilt jetzt mit dem gleichen Wert für  $\alpha^*$

$$P = \epsilon_o N \alpha^* \left( E + \frac{P}{3\epsilon_o} \right); \quad \text{oder } P = \frac{\epsilon_o E N \alpha^*}{1 - \frac{N \alpha^*}{3}}. \quad (15)$$

Aus dem Koeffizientenvergleich von Gl.(14) mit Gl. (11) folgt:

$$N \alpha^* = \frac{3(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r + 2} = \frac{3(n^2 - 1)}{n^2 + 2} = Y. \quad (16)$$

Es ist also  $n^2 - 1$  in Gl.(13) durch  $\frac{3(n^2 - 1)}{n^2 + 2}$  zu ersetzen.

### 3.4.2 Beachtliche Dämpfung, Absorption

Mit einem Dämpfungsfaktor  $\delta^* = r/2m$  wird aus Gl. (11) bzw. der Lösung

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = -e \hat{E} e^{j\omega t}; \quad \text{Lösung: } \hat{x} = -\frac{e \hat{E}}{m(\omega_o^2 - \omega^2) + ej\omega^2 \delta^{*2}}; \quad \tan \varphi = \frac{2\delta^* \omega}{\omega_o^2 - \omega^2}. \quad (17)$$

Infolge der Dämpfung finden wir eine reduzierte Amplitude der Polarisation und eine Phasenverschiebung um  $\varphi$ . Sowohl  $P$  und  $\alpha^*$  als auch  $c$  und  $n$  werden komplex.

### 3.5 Phasen-, Gruppen- und Signal-Geschwindigkeit

Dispersion bedeutet eine Differenz zwischen Gruppen- und Phasengeschwindigkeit. Während die Phasengeschwindigkeit sich zu  $v_{ph} = \frac{\omega}{k}$  berechnet, gilt für die Gruppengeschwindigkeit (bei akustischen Wellen gleich der Signalgeschwindigkeit, bei Materiewellen gleich der Teilchengeschwindigkeit)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_{ph} + k \frac{dv_{ph}}{dk} = v_{ph} - \lambda \frac{dv_{ph}}{d\lambda}. \quad (18)$$

Gruppen- und Phasengeschwindigkeit sind also identisch, wenn keine Dispersion vorliegt. Andernfalls gilt

$$v_g < v_{ph} \text{ normale Dispersion; } v_g > v_{ph} \text{ anomale Dispersion.} \quad (19)$$

Im Bereich anomaler Dispersion elektromagnetischer Wellen ist die Signalgeschwindigkeit  $v_{sig}$  von  $v_g$  verschieden und es gilt  $v_{sig} < c$ , während  $v_g > v_{sig}$  sein kann (s. z.B. /2/).

### 3.6 Fragen

1. Was versteht man unter normaler und anomaler Dispersion?
2. Wie unterscheiden sich Prismen für Spektral-Apparate vom achromatischen und vom Geradsichtprisma?
3. Wovon hängt das spektrale Auflösungsvermögen eines Prismas ab?
4. Was ist Totalreflexion?
5. Wie berechnet man den Grenzwinkel zwischen hell und dunkel beim Abbe'-Prisma? Wie verläuft der Strahlengang, auch unter Beachtung der Dispersion?
6. Wie kann man das Brechungsgesetz mit Hilfe des Modells der Elementarwellen herleiten?
7. Wie verlaufen die Elementarwellen im anisotropen Kristall; durch welche Brechzahlen ist Quarz charakterisiert?
8. Worauf beruht die Wirkung des Kompensators beim Refraktometer nach Abbe'?
9. Wozu benutzt man Kanada-Balsam?
10. Könnte man mit dem beschriebenen Refraktometer die Brechzahl von Schwerst-Flint-Glas ( $n = 1,9$ ) bestimmen?

#### Literatur

---

- /1/ Kislovskii, L.D.: Optics and Spectroscopy, Vol. VII, No.3, (1959), 201-206
- /2/ Paus, H.-J.: Physik in Experimenten und Beispielen, V.C.-Hanser München 1995
- /3/ Ilberg, W., Krötsch, M., Geschke, D., Kirsten, P., Schenk, W., Schneider, A., Schulze, H.: Physikalisches Praktikum für Anfänger, Leipzig 1994
- /4/ Hecht, E.: Optik, Add. Wesley 1989
- /5/ Recknagel, A.: Physik, Optik, Verlag Technik, 1990
- /6/ Walcher, W.: Praktikum der Physik, V. Teubner, Stuttgart 1989