



**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN**

Fakultät Physik

Physikalisches Grundpraktikum

Versuch: **ET**

Aktualisiert: am 18. 11. 2019

Elektrolytischer Trog

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung	2
2 Allgemeine Grundlagen	2
2.1 Zur Elektrostatik ebener Felder	2
2.2 Elektrolytischer Trog	3
2.3 Potenziellinien und Feldlinien	3
2.4 Graphische Bestimmung der Kapazität aus den Potenziellinien und Feldlinien	4
2.5 Elektrischer Widerstand	5
2.6 Grenzfläche zweier Medien	6
3 Experimente	6
3.1 Zur Versuchsdurchführung	6
3.2 Einfluss des Randes	6
Fragen	7
Literatur	7

1 Aufgabenstellung

1. Für zwei bis drei Elektroden-Anordnungen im elektrolytischen Trog sind die Potenziellinien zu messen und zu zeichnen.
2. Daraus werden die Verschiebungslinien konstruiert und die Kapazitäten bestimmt.
3. Für einfache Geometrien sind die gemessenen C-Werte mit den berechneten zu vergleichen.

2 Allgemeine Grundlagen

2.1 Zur Elektrostatik ebener Felder

Raum: Die Grundgleichungen der Elektrostatik lauten im Vakuum:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (a) \quad ; \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_L}{\epsilon_0} \quad (b) \quad (1)$$

mit $\rho_L = \frac{Q}{V}$ als Ladungsdichte. Oft muss aus gegebener Ladungsverteilung $\rho_L(\vec{r})$ die Feldverteilung $\vec{E}(\vec{r})$ ermittelt werden. Dazu wird mit

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} \quad (2)$$

die Potenzialfunktion φ eingeführt, was mit Gl. (1b) zur Poisson-Gleichung

$$-\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \equiv \Delta_L \varphi = -\frac{\rho_L}{\epsilon_0} \quad (3)$$

führt ($\Delta_L = \text{Laplace-Operator}$). Im ladungsfreien Raum (zwischen den Elektroden) ist $\rho_L(r) = 0$ und Gl. (3) wird zur Laplace-Gleichung $\Delta_L \varphi = 0$.

Ebene: Sie lautet in der x-y-Ebene in kartesischen bzw. Zylinderkoordinaten (räumliche Zylinderkoordinaten mit $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (a) \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \right) = 0 \quad (b). \quad (4)$$

Für den rotationssymmetrischen **Zylinderkondensator** vereinfacht sich die Gl. (4b) zu

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = 0 \quad \text{mit} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = A^* (\ln R_a - \ln R_i) \quad \text{und} \quad E = A^* \cdot \frac{1}{r}. \quad (5)$$

Bei der Lösung der Gln. (4) und (5)¹, auch im Raum, müssen mit den Integrationskonstanten die **Randbedingungen** erfüllt werden:

1. nach Dirichlet: Der Wert von φ an der Oberfläche ist festgelegt (z.B. Metallelektrode hat konstantes Potenzial).
2. nach von Neumann: Die Richtungsableitung des Feldes senkrecht zur Oberfläche ist festgelegt (z.B. die Feldlinien münden senkrecht in eine Metalloberfläche ein).

¹Zur Lösung von räumlichen Potenzialgleichungen kann die Methode der finiten Elemente (heute vielfach als Software) herangezogen werden. In der Ebene können zusätzlich manche Probleme mit der konformen Abbildung auf einfache und bekannte Geometrien zurückgeführt und gelöst werden.

2.2 Elektrolytischer Trog

In vielen Fällen wurden und werden elektrostatistische Fragestellungen (auch Potenzialströmungen betreffend) experimentell an zweidimensionalen Modellen mit Hilfe des elektrolytischen Trogs² gelöst. Dieser ist entsprechend Abb. 1 eine sehr flache, mit einer verdünnten Salzlösung gefüllte Schale. Er stellt für den Wechselstrom I einen flächenhaften elektrischen Leiter zwischen den beiden beliebig geformten Elektroden dar.

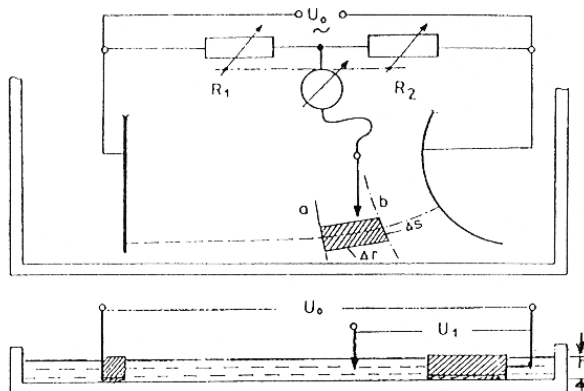


Abb. 1: Prinzip des elektrolytischen Trogs

Ohmsches Gesetz: Ein parallel zu den Feldlinien (Stromlinien) und senkrecht zu den Potenziallinien herausgeschnittenes Volumenelement $\Delta V = h\Delta r\Delta s$ hat wegen $R = \frac{\rho l}{A}$ den elektrischen Widerstand

$$\Delta R = \frac{\rho\Delta r}{h\Delta s} = \frac{\Delta r}{\sigma h\Delta s}. \tag{6}$$

Aufgrund der Spannungs- (Potenzial-) Differenz zwischen den beiden Potenziallinien (a,b)

$$E\Delta r = \int_a^b \vec{E}d\vec{r} = -(\varphi_b - \varphi_a) = -\Delta U \tag{7}$$

fließt über den Teilwiderstand ΔR der Strom ΔI bzw. die Stromdichte j

$$\Delta I = \frac{\Delta U}{\Delta R} = \frac{E\Delta r h\Delta s}{\rho\Delta r} \quad \text{bzw.} \quad j = \frac{\Delta I}{\Delta A} = \frac{\Delta I}{h\Delta s} = \frac{E}{\rho} = \sigma E. \tag{8}$$

Bei konstanten Werten des spezifischen Widerstandes $\rho = 1/\sigma$ und der Höhe h der Lösung findet man demnach die erwartete Proportionalität zwischen Stromdichte und Feldstärke.

Üblicherweise werden die ebenen Schnitte der (Äqui-) Potenzialflächen, d.h. die Potenziallinien in einer Brückenschaltung gemessen. An Orten großer Inhomogenität (z.B. in der Nähe spitzer Elektroden) sind Stromdichte und Feldstärke höher, der Spannungsabfall pro Länge Δr größer und die Potenziallinien liegen dichter.

Die Feldlinien (Verschiebungslinien) stehen senkrecht auf den Potenziallinien. Im Falle der abgeglichenen Messbrücke entspricht die Teilspannung U_1 an der Sonde dem mit dem Spannungsteiler (R_1, R_2) voreingestellten Wert. Führt man bei konstanter Stellung des Spannungsteilers die Sonde (durch Probieren) auf einer (Äqui-) Potenziallinie, so bleibt die Brücke abgeglichen. Nach diesem Schema werden für eine dekadische Voreinstellung des Spannungsteilers die den Spannungswerten (U_0 : erste Elektrode; $U_1; U_2; \dots; U_{10}$: zweite Elektrode) zugeordneten Potenziallinien aufgenommen.

2.3 Potenziallinien und Feldlinien

Aus den gemessenen Potenziallinien müssen die Feldlinien konstruiert werden. Am **Beispiel des Zylinderkondensators** werden die dazu notwendigen Beziehungen erläutert. Wegen

$$CU = Q = \int \epsilon\epsilon_0 E dA \quad d\varphi = dU = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0 A} dr \tag{9}$$

²Anstelle des elektrolytischen Trogs kann für gleiche Zwecke auch leitfähiges Papier benutzt werden, wobei die Elektroden durch dicke Striche mit weichem Bleistift markiert werden

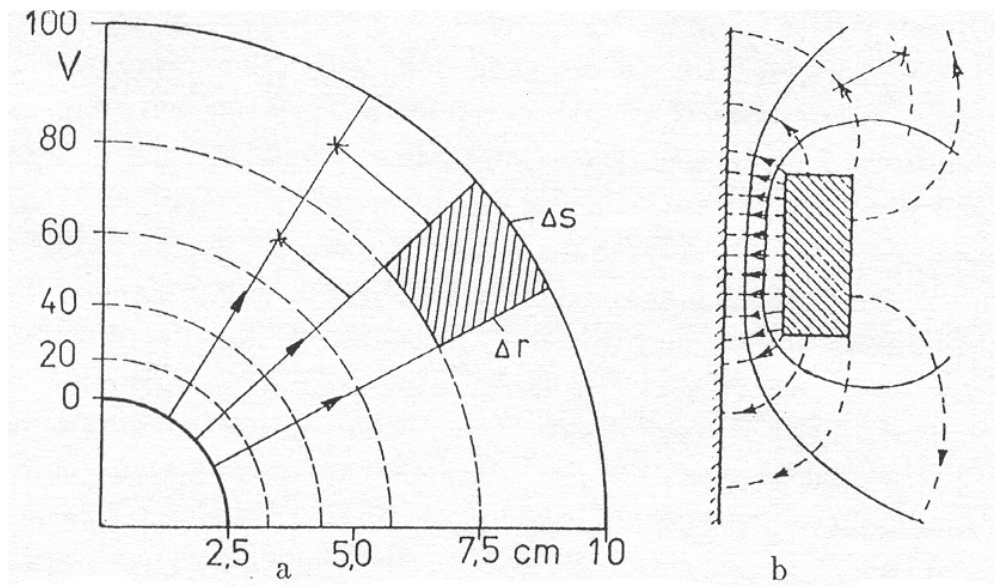


Abb. 2: Feldlinien (Stromlinien) und Potenziellinien beim Zylinderkondensator (a) und komplizierterer Geometrie (b)

und $A^* = \frac{Q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 h}$ (siehe Gl. (5)) folgt mit $A = 2\pi r h$ und $E = \frac{Q}{2\pi\epsilon\epsilon_0 h r}$ für den Kehrwert der Kapazität des Zylinderkondensators

$$\frac{1}{Q} \int E dr = \frac{U}{Q} = \frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi\epsilon\epsilon_0 h} \int_{R_i}^{R_a} \frac{dr}{r} \tag{10}$$

woraus die normierte Kapazität pro Länge h (analog zur Koaxialleitung) folgt zu

$$\frac{C}{\epsilon\epsilon_0 h} = \frac{2\pi}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}. \tag{11}$$

In Abb. 2a sind für $R_a = 10$ cm, $R_i = 2,5$ cm sowie $\varphi_2 - \varphi_1 = 100$ V mit $A^* = \frac{100 \text{ V}}{\ln(10/2,5)} = 72,13$ V Potenziellinien und Feldlinien gezeichnet.

Für die Doppelleitung (Lecherleitung), d.h. zwei gleiche Zylinderelektroden (Radius r , Abstand d) liefert die Theorie:

$$\frac{C}{\epsilon\epsilon_0 h} = \frac{\pi}{\ln\left(\frac{d}{2r} + \sqrt{\left(\frac{d}{2r}\right)^2 - 1}\right)} \tag{12}$$

Im allgemeinen Fall (z.B. bei Abb. 2b) werden, möglichst ausgehend von einer Symmetrieachse, die Feldlinien so konstruiert, dass sie mit den Potenziellinien Planquadrate bilden ($\Delta r = \Delta s$). Dazu zeichnet man, beginnend auf einer Symmetrielinie, im halben Abstand senkrecht zwischen zwei Potenziellinien im Abstand Δs von der Symmetrielinie einen Punkt (x). Die Verbindung derartiger Punkte ergibt die Feldlinie.

2.4 Graphische Bestimmung der Kapazität aus den Potenziellinien und Feldlinien

Die aufgenommenen Potenziellinien und die konstruierten Feldlinien werden werden gezählt:

1. m = Anzahl der Potenziellinien (inklusive einer Elektrode; ohne diese Elektrode müsste $m + 1$ eingesetzt werden)
2. Δr = Abstand zweier Potenziellinien in Feldrichtung (z.B. außen)

R_a cm	R_i cm	C_{th} $\frac{2\pi}{\ln \frac{R_a}{R_i}}$	$\Delta\varphi$ $\varphi_2 - \varphi_1$	Δr cm	n $\frac{2\pi R_a}{\Delta s}$	m $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta\varphi}$	$\frac{n}{m}$
10	9	59,63	0,1	0,105	599,5	10	59,9
"	"	"	0,01	0,0105	5966	100	59,7
10	1	2,73	0,1	2,06	30,54	10	3,05
"	"	"	0,01	0,228	276	100	2,76
12	0,5	1,98	0,1	3,27	23,1	10	2,31
"	"	"	0,01	0,375	201	100	2,01

Tabelle 1: Für verschiedene Zylinderkondensatoren berechnete normierte Kapazitäten C_{th} (Gleichung (11)) im Vergleich zu den in zwei Näherungen für Δr berechneten n und m -Werten und dem Verhältnis $\frac{n}{m}$ (überprüfen!)

3. n = Anzahl der Feldlinien (Verschiebungslinien)

4. Δs = Abstand der Verschiebungslinien senkrecht zur Feldrichtung (ebenfalls außen)

(meistens wird $\Delta s = \Delta r$ angenommen).

Wegen $U = \varphi_2 - \varphi_1 = |\int E dr|$ gilt

$$E = \frac{U}{m\Delta r} . \tag{13}$$

Mit $A = nh\Delta s$ wird

$$Q = DA = \epsilon\epsilon_0 E nh\Delta s = \epsilon\epsilon_0 \frac{U}{m\Delta r} nh\Delta s . \tag{14}$$

Damit ergibt sich die normierte Kapazität pro Längeneinheit zu

$$\frac{C}{\epsilon\epsilon_0 h} = \frac{Q}{U \cdot \epsilon\epsilon_0 h} = \frac{n\Delta s}{m\Delta r} = \frac{n}{m} . \tag{15}$$

mit $\Delta s = \Delta r$ als Verhältnis aus der Anzahl der Feldlinien und der Anzahl der Potenziellinien. Die auf diese Weise bestimmte Kapazität wird um so genauer, je dichter die Abstände Δr genommen werden, wie die berechnete Tabelle 1 ausweist.

2.5 Elektrischer Widerstand

Auch der Gesamtwiderstand zwischen den beiden Elektroden ist bei bekannten ρ und h eindeutig durch die Elektrodenanordnung bestimmt und kann daher zur Ermittlung der Kapazität herangezogen werden. Jedes Planquadrat der Abb. 2 besitzt den gleichen Teilwiderstand (siehe Gleichung (6)). Der Gesamtwiderstand ergibt sich durch m -fache Reihen- und n -fache Parallel-Schaltung dieses Teilwiderstandes mit

$$I = j \cdot A = \frac{U}{\rho m \Delta r} \cdot hn\Delta s \tag{16}$$

zu

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\rho m \Delta r}{hn\Delta s} = \frac{\rho m}{hn} . \tag{17}$$

Vergleicht man die Gleichungen (15) und (17), so findet man die Beziehung

$$\frac{R}{\rho} = \frac{\epsilon\epsilon_0}{C} . \tag{18}$$

Widerstand und Kapazität verhalten sich bei vorgegebener Geometrie gegenläufig und es könnte durch Widerstandsmessungen ebenfalls die Kapazität bestimmt werden. Dazu wäre es notwendig,

den spezifischen Widerstand durch eine Kalibrierung zu bestimmen, z.B. mittels plattenförmiger Elektroden, die die rechteckige Schale ganz ausfüllen, sodass aus dem berechenbaren Gesamtwiderstand $R = \frac{\rho l}{hs}$ der spezifische Widerstand $\frac{\rho}{h}$ für konstante Höhe h ermittelt werden kann.

2.6 Grenzfläche zweier Medien

Modifiziert man in einem begrenzten Flächenbereich des Troges die Flüssigkeitshöhe, z.B. durch Einlegen einer Plaste-Platte von h_1 auf h_2 , so lässt sich die Grenzfläche zweier Medien und die Brechung der Feldlinien simulieren ($\epsilon_1 \sim h_1$; $\epsilon_2 \sim h_2$). Dabei gilt für die **Normalkomponenten**:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad ; \quad \frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad ; \quad j_n = \sigma E_n \quad ; \quad \frac{j_{n1}}{j_{n2}} = \frac{h_1}{h_2} \quad (19)$$

Tangentialkomponenten:

$$E_{t1} = E_{t2} \quad ; \quad j_{t1} = j_{t2} \quad ; \quad \frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (20)$$

Damit folgt für die Vektoren \vec{E} , \vec{D} und \vec{j} das gleiche Brechungsgesetz:

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{E_{n2}}{E_{n1}} = \frac{D_{t1}}{D_{t2}} = \frac{j_{n2}}{j_{n1}} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (21)$$

3 Experimente

3.1 Zur Versuchsdurchführung

Zur Vermeidung von Polarisation des Elektrolyten (wässrige Salzlösung) wird eine Wechselspannung zur Speisung der Wheatstoneschen Brücke benutzt. Als Nullinstrument dient ein Multimeter oder besser ein Kopfhörer. Um die maximale Empfindlichkeit des menschlichen Ohres auszunutzen, sollte etwa bei 800 Hz gearbeitet werden (Mückenton). Als Brückenwiderstand wird eine Dekade mit konstantem, den Innenwiderständen der Spannungsquelle einerseits und des Kopfhörers andererseits angepasstem Widerstand benutzt. Damit kann durch Variation der Stellung des Mittelabgriffes das Potenzial in dekadischen Stufen eingestellt werden.

3.2 Einfluss des Randes

Nur innerhalb einer geschlossenen Elektrode ist der Außenraum feldfrei und die Messungen werden durch die endlichen Abmessungen des Troges sowie der möglichen metallischen Ausföhrung seines Randes nicht beeinflusst. In allen anderen Fällen der nach außen offenen Feldverteilungen werden die Feldlinien und Potenziallinien durch den Rand modifiziert.

- 1. Der Rand ist ein Nichtleiter:** In der Nähe des Randes kann der Strom nur parallel zum Rand fließen. Damit werden die Potenziallinien senkrecht zur Gefäßwand verlaufen.
- 2. Der Rand ist ein Leiter:** Der Rand spielt die Rolle einer zusätzlichen Elektrode, auf dem die Feldlinien senkrecht stehen. Die Potenziallinien stehen parallel zur Gefäßwand.

Diese Versuchsanleitung wurde in ihrer ursprünglichen Form von M. Kreller erstellt und von A. Otto bearbeitet. Aktuelle Änderungen werden von der Praktikumsleitung durchgeführt.

Fragen

1. Maxwell'sche Gleichungen
2. Elektrostatistisches Potenzial, Spannung, Feldstärke
3. Kapazität des Platten- und Zylinder-Kondensators
4. Grundlagen der Elektrostatik
5. Potenzialgleichung bei Zylindersymmetrie
6. Ohmsches Gesetz in differentieller Form; Kirchhoffsche Gesetze
7. Elektrolytische Leitfähigkeit und Polarisation
8. Wheatstonesche Brücke; Spannungsteiler
9. Kontrollieren Sie die Rechnungen zu Abb. 2a!
10. Kontrollieren Sie die berechneten Werte der Tab. 1!

Literatur

- [1] A. Recknagel, *Physik: Schwingungen, Wellen, Wärmelehre*, Technik-Verlag, Berlin 1990
- [2] W. H. Westphal, *Physikalisches Praktikum*, Vieweg-Verlag, Braunschweig 1974
- [3] G. Wunsch, H. G. Schulz, *Elektromagnetische Felder*, Verlag Technik, Berlin 1989
- [4] K. Simonyi, *Theoretische Elektrotechnik*, Verlag der Wissenschaften, Berlin 1989
- [5] L. Bergmann, C. Schaefer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 2: Elektromagnetismus*, Verlag de Gruyter, Berlin 1999
- [6] F. X. Eder, *Moderne Messmethoden der Physik*, Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960
- [7] K. Küpfmüller, *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*, Springer, Berlin 1990
- [8] K. Lunze, *Einführung in die Elektrotechnik*, Hüthig, Berlin 1991
- [9] H. Niedrig, *Physik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1992