

Technische Universität Dresden
Fakultät Physik

Einführung in das Physikalische Praktikum

Dr. Falk Röder
Dr. Rainer Schwierz

3. Mai 2023

Diese Einführung dient zur fachlichen Begleitung der Physikalischen Praktika für Studierende der Physik sowohl in Haupt als auch Nebenfach an der Fakultät Physik der TU Dresden. Die vorliegende Fassung ist das Ergebnis einer umfassenden Ergänzung und Überarbeitung älterer Versionen von Dr. U. Escher und Dipl.-Phys. M. Lange (2005) sowie von Dr. R. Schwierz, Dr. W. Mader und Dipl.-Phys. P. Anger (2015).

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Zielstellung	3
1.2	Organisation	4
1.3	Ablauf des Praktikums	5
1.4	Protokollführung	6
2	Messungen und Messunsicherheiten	13
2.1	Hinweise zur Aufnahme von Messwerten bzw. zur Auswertung	13
2.2	Allgemeines zu Messunsicherheiten	14
2.2.1	Behandlung von statistischen Messunsicherheiten	15
2.2.2	Behandlung von systematischen Messunsicherheiten	19
2.3	Gaußsche Fehlerfortpflanzung	21
2.3.1	Fall 1: Messunsicherheiten sind unkorreliert	22
2.3.2	Fall 2: vollständig korrelierte Messunsicherheiten	22
2.3.3	Fall 3: Messunsicherheiten mit unbekannter Korrelation	23
2.3.4	Besondere Regelungen für Lehramt Physik	24
2.3.5	Vereinfachung für Studiengänge mit Physik im Nebenfach	24
2.3.6	Logarithmisches Differenzieren	25
2.4	Der gewogene Mittelwert	26
2.5	Das gerundete Endergebnis	29
3	Ausgleichsrechnung	31
3.1	Grafischer Ausgleich mittels linearer Funktionen	33
3.1.1	Grafische Ermittlung der statistischen Messunsicherheiten	34
3.1.2	Grafische Ermittlung der systematischen Messunsicherheiten	40
3.1.3	Vereinfachungen im Nebenfach	43
3.2	Rechnerischer Ausgleich mittels linearer Funktionen	47
3.2.1	Ausgleichsrechnung unter vereinfachenden Annahmen	47
3.2.2	Berechnung von zufälligen Messunsicherheiten der Regressionsparameter	49
3.2.3	Berechnung von systematischen Messunsicherheiten der Regressionsparameter	54
3.3	Die χ^2 -Methode zur allgemeinen Kurvenanpassung	56

4	Anhang	59
4.1	Gesundheits-, Arbeits- und Brandschutz	59
4.2	Anhang: Herstellerangaben	61

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Zielstellung

Ein wesentlicher Bestandteil des Physikstudiums, sei es im Haupt- oder Nebenfach, sind natürlich die klassischen Experimentalphysik-Vorlesungen mit interessanten und für Vorführungen ausgefeilten Experimenten. In besonders anschaulicher und überzeugender Weise werden die grundlegenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten vermittelt, die für viele Bereiche der Natur und Technik relevant sind und zur Lösung verschiedenster physikalischer Probleme herangezogen werden. Dass diese Gesetzmäßigkeiten Resultate von oft sehr langwierigen Erkenntnisprozessen, aufwendigen wissenschaftlichen Untersuchungen und ständiger Reflexion durch eine aktive wissenschaftliche Gemeinschaft sind, kann natürlich im Rahmen dieser Lehrveranstaltungen nicht im einzelnen beleuchtet werden. Daher besteht im Physikalischen Praktikum das Anliegen neben der Vertiefung von physikalischem Wissen, Studierende an die wissenschaftliche Arbeitsweise heranzuführen, welche sich durch die Fähigkeit auszeichnet, zu reproduzierbaren wissenschaftlichen Ergebnissen nach allgemein anerkannten Regeln und Methoden zu gelangen. Daher lernen Studierende im Praktikum u.a.:

- Experimente aufzubauen
- verschiedenen Messprinzipien anzuwenden
- gängige Messgeräte korrekt zu handhaben
- Messwerte überlegt aufzunehmen
- Daten auszuwerten und Endergebnisse zu ermitteln
- Messunsicherheiten zu bestimmen
- Ergebnisse zu diskutieren und zu interpretieren
- Schwachstellen zu identifizieren und daraus Verbesserungen abzuleiten.

Insbesondere im Sinne der guten wissenschaftlichen Praxis:

- Dokumentation aller relevanten Bedingungen und Einflussfaktoren, die für die Reproduzierbarkeit des Experimentes notwendig sind. Dies bezieht auch eine klare Beschreibung der verwendeten Messprinzipien und Messgeräte sowie der zugehörigen Herstellerangaben zu den Messunsicherheiten ein.
- Dokumentation von originalen und unverarbeiteten Messwerten (direkt abgelesene Messwerte, keine gemittelten Werte) einschließlich von „unerwarteten“ Resultaten (Ausreißer, grobe Fehler) sowie die Umstände des Zustandekommens, damit eine erneute Auswertung im Nachgang jederzeit möglich ist.
- Offenlegung der Auswerteprozedur einschließlich aller dafür notwendigen Annahmen.
- Die Unterschlagung oder Erfindung relevanter Daten sowie die betrügerische Manipulation von Ergebnissen zur Bestätigung von aus Voreingenommenheit resultierenden Erwartungen wird als ernsthaftes wissenschaftliches Fehlverhalten gewertet.

Hierbei ist von entscheidender Bedeutung, dass Studierende bereits mit dem ersten Versuch ein wissenschaftliches Protokoll zu erstellen lernen, das alle Informationen in übersichtlicher Weise enthält, um den Anforderungen an Reproduzierbarkeit, Nachvollziehbarkeit und Überprüfbarkeit zu genügen. Die Versuchsleitung achtet daher nicht nur auf die inhaltliche Korrektheit, sondern auch auf die entsprechende Vollständigkeit. Nur wenn beides in einwandfreier Weiser erbracht wird, kann die maximale Punktzahl vergeben werden.

Die Darstellung des Endergebnisses ohne Angabe von Messunsicherheiten widerspricht der guten wissenschaftlichen Praxis und wird von der wissenschaftlichen Gemeinschaft nicht akzeptiert. Unter Beachtung der Richtlinien des "Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" (GUM) vom Joint Committee for Guides in Metrology (JCGM) ist die Bestimmung von Messunsicherheiten ein Hauptanliegen im Physikalischen Praktikum und verursacht die meisten Schwierigkeiten gerade in der Frühphase der akademischen Ausbildung.

1.2 Organisation

Das Physikalische Praktikum ist sowohl für Studierende der Physik (Bachelor, Lehramt) als auch für Studierende mit Physik in der Nebenfachausbildung konzipiert. Studierende von Ingenieurstudiengängen sowie der Chemie und Biologie studieren Physik als Nebenfach im Grundstudium und führen im Praktikum 3-6 grundlegende physikalische Versuche durch. Studierende mit Physik im Hauptfach führen Grund- und Fortgeschrittenen-Praktika durch, welche eine breite Palette an Themenfeldern sowohl der klassischen als auch modernen Physik in vertiefender Weise abdecken.

Die Physik-Praktika werden über OPAL-Kurse organisiert. Die Links zu den aktuellen OPAL-Kursen sind auf den Webseiten des Physikalischen Praktikums

www.physik.tu-dresden.de/praktikum

zu finden.

Grundvoraussetzung für die Teilnahme am Physikalischen Praktikum ist:

- Einschreibung in eine Praktikumsgruppe i.d.R. über einen OPAL-Kurs.
- Aktenkundige Teilnahme an der zugehörigen Einweisungsveranstaltung zu Semesterbeginn einschließlich der Unterweisung zum Arbeits-, Brand- und Gesundheitsschutz.

1.3 Ablauf des Praktikums

Zu Beginn des Semesters werden alle eingeschriebenen Studierenden über den Praktikumsablauf, die von ihnen zu absolvierenden Versuche und ihre Praktikumsstermine informiert, außerdem erfolgt eine Belehrung zum Arbeits- und Brandschutz. Die für das gesamte Semester benötigten Versuchsanleitungen sind auf der Internetseite des Physikalischen Praktikums an der TU Dresden abrufbar. Diese Anleitungen enthalten Informationen zum Versuchsinhalt sowie zu den grundlegenden Gesetzmäßigkeiten und Literaturhinweise zum vorbereitenden Selbststudium. Die Studierenden werden in Gruppen zu je acht Personen eingeteilt, die Versuchsdurchführung selbst erfolgt in der Regel in Zweiergruppen. Die Praktikumsstermine werden sowohl durch Aushang als auch im Internet bekannt gegeben und sind verbindlich. Der jeweilige Versuchstermin beginnt mit einem kurzen schriftlichen Antestat, das den Nachweis über die in der Vorbereitung erarbeiteten Kenntnisse zum Versuch erbringen soll. Bei nicht ausreichendem Wissensstand wird die/der Studierende von der Durchführung der Experimente ausgeschlossen und muss den entsprechenden Versuch zu einem späteren Termin nachholen. Die Aufgabenstellung kann von der Versuchsleitung konkretisiert werden. Die Experimente werden unter Beachtung der Weisungen durch die Versuchsleitung durchgeführt.

Die Nachweisführung zum Versuch erfolgt anhand eines Protokolls, welches alle zum Versuch relevanten Informationen und enthält, die eine Reproduktion der gewonnenen Versuchsergebnisse ermöglichen. Das Protokoll ist unter Wahrung einer fortlaufenden Seitennummerierung in einen schmalen Ordner oder Hefter einzuheften, welcher am Ende des Semesters durch die Praktikumsleitung stichprobenweise auf Vollständigkeit überprüft wird. Das Führen eines Inhaltsverzeichnisses wird empfohlen.

Das Protokoll wird zur von der Versuchsleitung bekanntgegebenen Abgabezeit vorgelegt und mit maximal 20 Punkten in folgender Weise bewertet:

- Form: 2 Punkte

- Messung: 5 Punkte
- Auswertung und Messunsicherheiten: 10 Punkte
- Diskussion: 3 Punkte

1.4 Protokollführung

Ein Protokoll muss alle Informationen enthalten die eine vollständige Rekonstruktion der Durchführung und Auswertung sowie die Wiederholung des Experimentes unter vergleichbaren Bedingungen ermöglicht und eine Verwertbarkeit der gewonnenen Resultate für weiterführende Untersuchungen sicherstellt. Dies ist neben inhaltlicher Korrektheit ein entscheidendes Kriterium für die Bewertung der Protokolle.

Die Protokolle sollten idealerweise in ein gebundenes Protokollbuch auf im Vorfeld durchnummerierten und mit Rand versehenen Seiten geschrieben werden. Aufgrund von organisatorischen Gegebenheiten im Praktikum sind Abweichungen von dieser Regelung zulässig und werden in der Einweisungsveranstaltung bekanntgegeben.

Es sollte Erwähnung finden, dass ein Protokoll keine druckreife wissenschaftliche Veröffentlichung ist. Es ist die allererste Dokumentation eines durchgeführten wissenschaftlichen Versuchs, in der es auch zu Irrtümern oder Fehlern kommen kann, die sauber mit Lineal durchgestrichen und mit aufklärenden Kommentaren richtiggestellt werden dürfen. Da sich die Versuche im Grundpraktikum an vorgefertigten Versuchsanleitungen orientieren ist eine Quellenangabe nur dann erforderlich, wenn Inhalte im Protokoll Verwendung finden, die über die in den Versuchs- und Platzanleitungen dargelegten Angaben hinaus gehen.

Die folgende Grundstruktur ist für alle Versuche im Grundpraktikum bindend:

1. Titel: Versuchsbezeichnung (einschl. Kürzel), Datum, Ort/Raum/Versuchsplatz, Name: des/der Protokollants/in, des/der Mitarbeiters/in, des/der Betreuers/in

2. Einleitung / Vorbetrachtung: Der Einleitungsteil umfasst i.d.R folgende Punkte.

- Aufgabenstellung gemäß Platzanleitung mit etwas Platz für Konkretisierungen durch die Versuchsleitung
- kurze Darstellung des physikalischen Hintergrunds mit eigenen Worten (keine Kopien aus der Versuchsanleitung)
- kurze Beschreibung des Messprinzips
- kurze Darstellung des Versuchsaufbaus (z.B. in Form einer Skizze)

- für die Auswertung des Versuchs relevante Formeln - keine Formeln zur Berechnung des Messunsicherheiten
- Benennung der physikalischen Größen und deren Messung
- mögliche Erwartungen, Literaturwerte, *etc.*

Wichtig ist, dass die Studierenden das Protokoll bezüglich Titel, Einleitung/Vorbetrachtungen bereits zu Hause vorbereiten. Für dieses Arbeit besteht während des Versuchs kaum Zeit.

3. Durchführung: Es versteht sich von selbst, dass dieser Teil des Protokolls erst zum Versuch angefertigt werden soll. Ein prüfender Blick in die Protokolle vorab offenbart mitunter fragwürdiges. Zur Durchführung gehören:

- Spezifizierung aller verwendeten Messgeräte (Hersteller/Typ), Kalibrierstandards, Referenz- und Untersuchungsobjekte.
- Bemerkungen zum Versuchsablauf - was wurde genau gemacht?
- Dokumentation relevanter Versuchsbedingungen (Temperatur, Luftdruck, Feuchtigkeit,...) oder spezieller Bedingungen bezüglich des Experiments
- Aufnahme von Messergebnissen in klar strukturierten Tabellen.
- neben den Messwerten sollten die Tabellen auch
 - Messunsicherheiten aufgrund von Ables- oder Einstellungenauigkeiten (geschätzte stat. Messunsicherheiten)
 - Messbereiche (ggf. wichtig für die Berechnung von syst. Messunsicherheiten)

enthalten, wenn sich diese von Messung zu Messung unterscheiden.

- Benennung der Tabellen-Köpfe in physikalisch sinnvoller Weise, z.B. für die Temperatur " T/K " anstelle von " T in K"
- es sollten die direkt ermittelten Messwerte eingetragen werden - keine bereits gemittelten Werte o.ä. (z.B. Notieren der verwendeten Wägestücke anstelle der bloßen Gesamtmasse), keine Zettel verwenden
- Messwerte kommen direkt ins Protokoll und nicht erst auf Schmierzettel (Übertragungsfehler)
- Da in den höheren Praktika die Messtabellen mitunter größere Ausmaße annehmen, die nicht mehr in das Format eines Protokolls passen, gilt für diese Fälle, dass die Messungen in elektronischer Form auf Laufwerk P:\ gespeichert werden. Im Protokoll muss die Bezeichnung der jeweiligen Dateien, der Speicherort und die Kennzahl des lokalen Rechners vermerkt werden.

4. Auswertung:

- Berechnung der Endergebnisse auf Grundlage gängiger Auswerteverfahren.
- Die Angabe von Nebenrechnungen dient der Nachvollziehbarkeit.
- grafische Darstellungen von Hand erfolgen auf Spezialpapier in formatfüllender Größe (Reduktion der Zeichenunsicherheit).
- computerbasierte Auswertung und das Drucken der Resultate (Diagramme, Tabellen) ist grundsätzlich erlaubt und teilweise auch gefordert
- Dokumentation der am Rechner durchgeführten Schritte (Software, ausgewählte numerische Verfahren, Anfangs-/Randbedingungen, zusätzliche Parameter)

5. Messunsicherheiten: Die Vorgehensweise zur Behandlung der Messunsicherheiten unterscheidet sich in den einzelnen Studiengängen.

Für Bachelor und Lehramt Physik:

- prinzipielle Unterscheidung und getrennte Propagation von systematischen und statistischen Messunsicherheiten
- stat. Messunsicherheiten als einfache Standardabweichung der Gaußverteilung (1σ - 68% Vertrauensniveau)
- syst. Messunsicherheiten als einfache Standardabweichung der Rechteckverteilung ($1/\sqrt{3}$ · halbe Intervallbreite, entspricht i.d.R. der Herstellerangabe)
- statistische Messunsicherheiten i.d.R. als unkorreliert - Gauß-Fortpflanzung von Messunsicherheiten
- Für Bachelor-Physik: Korrelation by systematischen Messunsicherheiten möglich - Unterscheidung von drei Fällen:
 - unkorreliert (unterschiedliche Messgräte)
 - korreliert in unbekannter Weise (dasselbe Messgerät)
 - vollständig korreliert (Verwendung desselben Wägesatzes, konstante Nullpunktabweichung)
- Für Lehramt-Physik: systematische Messunsicherheiten werden ausschließlich mit Abschätzung maximaler Unsicherheit behandelt.

- bei grafischen Darstellungen: nur statistische Messunsicherheiten als Fehlerbalken. Systematische Abweichungen werden als Unsicherheitsschlauch bezüglich der Ausgleichskurve grafisch dargestellt.
- bei Methoden zur Parameterschätzung (z.B. χ^2) ausschließlich statistische Messunsicherheiten als Gewichtungsfaktoren verwenden.
- systematische Unsicherheit von Anpassungsparametern
 - Physik Bachelor: anhand Unsicherheitsschlauch in Abh. von Korrelationen abschätzen,
 - Lehramt Physik: anhand ausgewählter Messpunkte abschätzen.
- Welche Messgröße hat den Größen Einfluss auf die Messunsicherheit?
- ab 3. Semester: Sind die tatsächlichen statistischen Schwankungen konsistent zu den erwarteten (Fehlerbalken)

Für Studiengänge mit Physik im Nebenfach:

- systematische und statistische Messunsicherheiten werden für jede Messgröße zu einer Gesamtunsicherheit addiert
- bei indirekten Messungen werden stets die Gesamtunsicherheiten im Sinne der maximalen Unsicherheit fortgepflanzt
- stat. Messunsicherheiten werden mit einem Vertrauensniveau von 2σ betrachtet
- syst. Messunsicherheiten entsprechen den halben Breiten der Rechteckverteilungen und sind somit den Herstellerangaben direkt gleichzusetzen
- bei grafischen Darstellungen werden aus den Gesamtunsicherheiten die jeweiligen Fehlerbalken ermittelt.

Mitunter lässt sich diese Bestimmung der Messunsicherheiten nicht von der Auswertung trennen, da Messunsicherheiten beispielsweise als Gewichtungsfaktoren in die Berechnung der Endgrößen eingehen. In solchen Fällen ist es sinnvoll, beide Abschnitte als einen Abschnitt mit der Bezeichnung „Auswertung und Messunsicherheiten“ zu führen.

Gerade bei der Behandlung der Messunsicherheiten empfiehlt es sich, eine übersichtliche Form zu wahren. Bevor es an die Fehlerfortpflanzung geht, sollten die beitragenden Messunsicherheiten tabellarisch wie im folgenden Beispiel zusammengefasst werden.

1.4. PROTOKOLLFÜHRUNG

	statistisch	systematisch
$\Delta x/[x]$
$\Delta y/[y]$
$\Delta z/[z]$
...

Tabelle 1.1: Übersichtliche Darstellung der für die Behandlung der Messunsicherheiten relevanten Beiträge. Hier sind exemplarisch die Messgrößen x , y und z dargestellt. Die eckigen Klammern kennzeichnen allgemein die Einheiten der jeweiligen Messgrößen.

Natürlich gehören die entsprechenden Fehlerformeln mit den korrekten partiellen Ableitungen und ggf. in Abhängigkeit von Korrelationen ins Protokoll. Weiterhin sind die Beiträge der einzelnen Messgrößen zur Unsicherheit der gesuchten Größe (hier F) darzustellen, wofür sich ebenfalls die Tabellenform anbietet:

Physik Bachelor / Lehramt

	statistisch	systematisch
$\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x / [F]$
$\frac{\partial F}{\partial y} \Delta y / [F]$
$\frac{\partial F}{\partial z} \Delta z / [F]$
...
$\Delta F/[F]$

Physik im Nebenfach

	gesamt
$\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x / [F]$...
$\frac{\partial F}{\partial y} \Delta y / [F]$...
$\frac{\partial F}{\partial z} \Delta z / [F]$...
...	...
$\Delta F/[F]$...

Tabelle 1.2: Übersichtliche Darstellung der Einzelbeiträge der Unsicherheiten direkt gemessener Größen (hier x , y und z) zur Unsicherheit der indirekt gemessenen Größe F mit Einheit $[F]$. Für Studierende mit Physik als Hauptfach sollte zwischen statistischen und systematischen Beiträgen unterschieden werden, während im Nebenfach nur die Angabe der jeweiligen Gesamtbeiträge erforderlich ist.

6. Diskussion: Darstellung des Endresultats in der folgenden Form:

$$\begin{array}{ll} \text{Bachelor/Lehramt Physik:} & \underline{\underline{F = \bar{F} + \Delta F_{\text{stat}} + \Delta F_{\text{sys}}}} \\ \text{Nebenfach Physik} & \underline{\underline{F = \bar{F} + \Delta F}} \end{array}$$

Das Endergebnis ist entsprechend der aufgrund begrenzter Messgenauigkeit vorliegenden signifikanten Stellen zu runden. Unsicherheit und Messergebnis sind mit derselben Einheit anzugeben. Für eine kritische Diskussion sind die folgenden Punkte zu berücksichtigen:

- Übereinstimmung mit Literaturwerten, theoretischen Vorhersagen - Angabe von quantitativen Kriterien, z.B.:

Bachelor / Lehramt Physik:

$$|F^{\text{exp}} - F^{\text{theo}}| < \sqrt{(\Delta F_{\text{stat}}^{\text{exp}})^2 + (\Delta F_{\text{sys}}^{\text{exp}})^2 + (\Delta F_{\text{stat}}^{\text{theo}})^2 + (\Delta F_{\text{sys}}^{\text{theo}})^2}$$

Nebenfach Physik:

$$|F^{\text{exp}} - F^{\text{theo}}| < |\Delta F^{\text{exp}}| + |\Delta F^{\text{theo}}|$$

- Analyse der Messunsicherheiten, die Unsicherheit welcher Messgröße hat den größten Einfluss auf die Gesamtunsicherheit. Dies ist direkt aus Tab. 1.2 ersichtlich.
- Verbesserungsvorschläge basierend auf den Resultaten der Messsicherheiten-Analyse.
- Maßnahmen zur Reduktion von Störfaktoren, Kritik am Messverfahren oder Messgeräten. Vergleich verschiedener Messverfahren.
- Gründe, warum Teile der Aufgabe nicht gelöst werden konnten.

1.4. PROTOKOLLFÜHRUNG

Kapitel 2

Messungen und Messunsicherheiten

2.1 Hinweise zur Aufnahme von Messwerten bzw. zur Auswertung

Die Aussagekraft des Ergebnisses hängt i.d.R. entscheidend von der Art der Messwertaufnahme ab. Die folgenden Fragen können hierbei als Orientierung dienen:

- Führt man eine Messung unter identischen Bedingungen mehrmals durch oder nimmt man eine Messreihe einer Größe unter Variation einer weiteren Größe auf, die die gesuchte Größe direkt beeinflusst?
- Wie viele Messwerte sind überhaupt notwendig und in welchen Messbereichen sind Messungen überhaupt sinnvoll?
- Wählt man eine äquidistante Schrittweite oder passt diese an den Verlauf der Messwerte an?
- Müssen Kalibrierungen durchgeführt werden und wenn ja, in welchem Wertebereich?
- Müssen Einschwingvorgänge oder Temperaturgleichgewichte abgewartet werden und wie können diese im Protokoll nachgewiesen werden?
- Sind Messapparaturen vor Messaufnahme zu Justieren oder Nulllagen einzustellen?
- Wie sind korrekte Justagen sicherzustellen?
- Gibt es Ableseunsicherheiten bzw. lassen sich Einstellunsicherheiten durch geschicktes Variieren ausloten?
- Wird die korrekte Messschaltung verwendet?
- Dass sich einige Messgeräte/Versorgungsgeräte erst einmal „warmlaufen“ müssen wurde beachtet?

Das Ziel der einzelnen Versuche des Physikalischen Praktikums ist die Messung einer physikalischen Größe. Jede Messung ist jedoch mit *Messunsicherheiten*¹ behaftet. Dies führt dazu, dass das Ergebnis einer Messung nur über die Angabe eines *Schätzwertes* und den dazugehörigen Messunsicherheiten definiert ist². Das Messergebnis wird also immer eine *Wahrscheinlichkeitsaussage* sein und erfordert eine passende Interpretation.

2.2 Allgemeines zu Messunsicherheiten

Das Ergebnis der Messung einer physikalischen Größe, der Messwert, ist unvermeidlich mit einer Messunsicherheit behaftet. Der Messwert bzw. der aus mehreren Messwerten berechnete Wert (Schätzwert) ist erst dann aussagekräftig, wenn die dazugehörige Messunsicherheit bekannt ist.

Neben der Angabe eines Schätzwertes ist demzufolge ein zweiseitiges Intervall (Vertrauensintervall) anzugeben, welches die Präzision dieser Schätzung in Form einer Wahrscheinlichkeit, dem *Vertrauensniveau*, widerspiegelt. Das Vertrauensniveau gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei wiederholter Durchführung des Experimentes der dann erhaltene Schätzwert innerhalb des *ursprünglich* angegebenen Vertrauensintervalls liegt.

Messunsicherheiten sind zunächst von groben Fehlern zu unterscheiden. Grobe Fehler beruhen auf Irrtümern, falschen oder nachlässigen Ablesungen, auf einem ungeeigneten Mess- oder Auswertverfahren oder auf starken äußeren Störeinflüssen. Grobe Fehler lassen sich vermeiden. Sie sind daher kein Gegenstand einer Berechnung von Messunsicherheiten.

Die unvermeidlichen im Zusammenhang mit der Messung stehenden „Fehlern“ werden in statistische (zufällige) und systematische Messunsicherheiten unterteilt.

Systematische Messunsicherheiten entstehen beispielsweise durch

- Unvollkommenheit der verwendeten Messgeräte und Messverfahren (Auflösungsgrenze)
- Unvollkommenheit des Messgegenstandes (z.B. Inhomogenitäten)
- persönliche Einflüsse des Beobachters und der Umgebung, die im Prinzip messtechnisch oder rechnerisch erfasst werden können.

Systematische Messunsicherheiten haben in Abhängigkeit vom Messwert ein bestimmtes Vorzeichen und einen bestimmten Betrag. Sie treten bei jeder Wiederholung der Messung in gleicher Weise wieder auf. Daher können systematische Messunsicherheit im Prinzip, d.h. sofern man sie kennt, korrigiert werden.

¹Früher wurde hierfür der Begriff *Fehler* verwendet.

²Siehe DIN 1319 „Grundlagen der Messtechnik“.

Statistische (zufällige) Messunsicherheiten haben eine Vielzahl von Ursachen und sind ihrem Charakter nach völlig unregelmäßig. Sie beruhen auf

- messtechnisch und rechnerisch nicht zu erfassenden und nicht zu beeinflussenden Änderungen der Messanordnung, der Messgeräte und des Messgegenstandes
- der begrenzten Schärfe der menschlichen Sinne
- unkontrollierbaren Veränderungen der Umwelt.

Die zufälligen Messunsicherheiten schwanken regellos nach Betrag und Vorzeichen. So wird beispielsweise eine Strecke bald zu kurz, bald zu lang gemessen, weil man den Nullstrich des Maßstabes und den Anfang der zu messenden Strecke nie exakt zur Deckung bringen kann und weil beim Schätzen der Zwischenwerte am Ende der Strecke Unsicherheiten entstehen.

Um ein zuverlässigeres Resultat zu erhalten, ist die Messung möglichst oft und vor allem unter identischen Bedingungen zu wiederholen. Aus den zufällig streuenden Messwerten kann man mit Hilfe statistischer Betrachtungen geeignete Mittelwerte für die Messgröße und ihre statistischen Messunsicherheiten gewinnen. Die systematischen Messunsicherheiten müssen gesondert betrachtet werden.

2.2.1 Behandlung von statistischen Messunsicherheiten

Eine physikalische Größe werde als Stichprobe N -mal unter identischen Bedingungen gemessen. Die Messwerte seien x_1, x_2, \dots, x_N . Man erhält einen guten Überblick über die Messwerte, wenn man die Häufigkeit gewonnener Einzelwerte als Funktion der gemessenen Größe grafisch darstellt. Dazu unterteilt man den Wertebereich der gemessenen Größe in eine geeignete Anzahl von Intervallen I_1, \dots, I_r ($r < N$) definierter Breite und bestimmt die Anzahl H_1, \dots, H_r der Messwerte, die innerhalb der Intervalle I_k mit ($k = 1, 2, \dots, r$) anzutreffen sind. Trägt man die H_k , jeweils über der Mitte des zugehörigen I_k in Form eines Säulendiagramms auf, so erhält man die Häufigkeitsverteilung (Abb. 2.1). Zu erkennen ist, dass sich die Messwerte um einen bestimmten Wert häufen. Geringere Abweichungen von diesem Wert erscheinen häufiger als größere.

2.2. ALLGEMEINES ZU MESSUNSICHERHEITEN

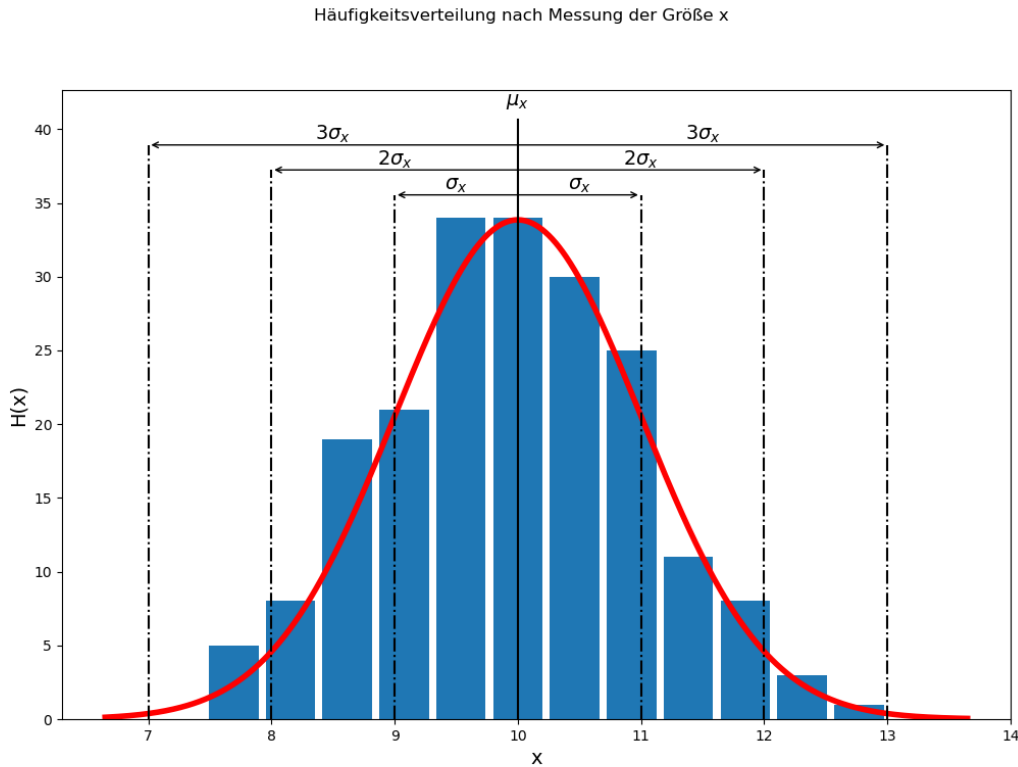


Abbildung 2.1: Exemplarische Häufigkeitsverteilung aller nach 200 maliger Messung zufällig erhaltenen Messwerte der Größe x . Die zugrunde liegende Gauß-Verteilung (rot) ist gegeben durch den Erwartungswert $\mu_x = 10$ und der Standardabweichung (Einzelmessung) $\sigma_x = 1$. Gekennzeichnet sind neben dem Erwartungswert auch die üblichen Vertrauensbereiche von $1\sigma_x$, $2\sigma_x$ sowie $3\sigma_x$.

Das zugrunde liegende statistische Verhalten kann durch die Gaußsche Glockenkurve beschrieben werden. Diese ist zunächst als normierte Wahrscheinlichkeitsdichte f gegeben:

$$f(x; \mu_x, \sigma_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right) \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \mu, \sigma) dx = 1.$$

Diese Funktion wird parametrisiert durch den Erwartungswert μ_x und die Standardabweichung σ_x . Diese Parameter sind im Allgemeinen nicht bekannt und müssen durch die unten beschriebenen Verfahren geschätzt werden. Um die Wahrscheinlichkeitsdichte mit der vorliegenden Häufigkeitsverteilung vergleichen zu können, muss von der kontinuierlichen in eine diskrete Verteilung übergegangen werden. Aus der Wahrscheinlichkeitsdichte ergibt sich die zu erwartende Häufigkeit im i -ten Intervall durch:

$$H_i = N \cdot p_i = N \cdot \int_{x_i - \Delta x/2}^{x_i + \Delta x/2} f(x; \mu_x, \sigma_x) dx \approx N \cdot f(x_i; \mu_x, \sigma_x) \cdot \Delta x.$$

Die Größe p_i beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass im Intervall mit Index i und der Breite Δx ein Messwert zu finden ist. Für genügend schmale Intervalle, lässt sich Häufigkeit H_i näherungsweise durch das Produkt von Wahrscheinlichkeitsdichte f für den Wert x_i (Intervallmitte), Anzahl der Messungen N und der gewählten Intervallbreite Δx berechnen. Die daraus resultierende Kurve ist rot in Abb. 2.1 dargestellt. Die sogenannte Normalverteilung beschreibt die Verteilung der Messwerte, wenn diese Werte rein zufällig streuen und die Messungen stets unter identischen Bedingungen durchgeführt wurden.

Wie oben bereits erwähnt, beschreibt der Parameter μ_x den Erwartungswert, der, sofern keine systematischen Abweichungen vorliegen, dem (uns stets unbekanntem) wahren Wert entspricht. An der Verteilung ist zu erkennen, dass die einzelnen Messwerte bezüglich μ_x zufällig streuen und aus der Breite der Verteilung, die durch die Standardabweichung bestimmt ist, gewinnen wir ein Maß für die statistische Unsicherheit für eine Einzelmessung. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Messwert innerhalb eines der sogenannten Vertrauensbereiche liegt, berechnet sich durch:

$$p_\tau = \int_{\mu_x - \tau\sigma}^{\mu_x + \tau\sigma} f(x; \mu_x, \sigma_x) dx.$$

Für die üblichen Vertrauensbereiche (Abb. 2.1) gelten die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

Vertrauensbereich	Intervall	τ	Wahrscheinlichkeit p_τ
1σ	$[\mu_x - \sigma_x, \mu_x + \sigma_x]$	1	68,3%,
2σ	$[\mu_x - 2\sigma_x, \mu_x + 2\sigma_x]$	2	95,0%,
3σ	$[\mu_x - 3\sigma_x, \mu_x + 3\sigma_x]$	3	99,7%

Im Praktikum für Studierende der Physik ist ein Vertrauensniveau von 68% zu verwenden.

Im Praktikum für Studierende mit Physik im Nebenfach ist ein Vertrauensniveau von 95% zu verwenden.

Die Form und der Verlauf der Gauß-Verteilung zeigt, dass größer werdende Abweichungen vom Erwartungswert immer unwahrscheinlicher werden, aber dennoch aus statistischer Sicht nie mit Sicherheit ausgeschlossen werden können.

Im Praktikum ist es i.d.R. gar nicht möglich, die Messung einer physikalischen Größe so oft zu wiederholen, bis die Häufigkeitsverteilung in guter Näherung einer Normalverteilung

2.2. ALLGEMEINES ZU MESSUNGSICHERHEITEN

entspricht. Man muss sich mit einer kleineren Anzahl von Messwerten (mindestens 10) begnügen. Eine statistische Betrachtung der zufälligen Messunsicherheiten liefert jedoch auch für diesen Fall brauchbare Näherungswerte für die Parameter der Normalverteilung. Der arithmetische Mittelwert \bar{x} dient hierbei als optimaler Schätzer des Erwartungswertes μ_x :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (2.1)$$

Die Größe s_x dient als optimaler Schätzer der Standardabweichung σ_x für eine Einzelmessung:

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2.2)$$

Die Standardabweichung beschreibt das symmetrisch um den Mittelwert gelagerte Intervall $[\bar{x} - s_x, \bar{x} + s_x]$, welches mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 68,3% mögliche Ergebnisse von **Einzelmessungen** enthält. Daraus lässt sich in Abhängigkeit vom Vertrauensbereich ein Maß für die zufällige Unsicherheit einer **Einzelmessung** Δx_{stat} gewinnen:

$$\begin{array}{ll} \text{Bachelor / Lehramt Physik:} & \Delta x_{\text{stat}} = s_x \quad (68,3\%) \\ \text{Nebenfach Physik:} & \Delta x_{\text{stat}} = 2 \cdot s_x \quad (95,0\%) \end{array} .$$

Diese Größe ist aufgrund endlicher Stichproben (N) selbst mit Unsicherheiten behaftet. Für normalverteilte Messwerte gilt für die Standardabweichung der Standardabweichung:

$$s_{s_x} = \frac{s_x}{\sqrt{2N}}. \quad (2.3)$$

Mit wachsendem Stichprobenumfang N geht also die Unsicherheit der geschätzten Standardabweichung gegen null und die geschätzte Standardabweichung s_x nähert sich dem entsprechenden Parameter der zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung σ_x an.

Nun ist bei einer Stichprobe von N Messwerten der Mittelwert und damit auch dessen Unsicherheit relevant. Die **Standardabweichung des Mittelwertes** ergibt sich durch:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad (2.4)$$

Diese sogenannte Standardabweichung des Mittelwertes geht ebenfalls mit wachsendem Stichprobenumfang gegen null und zeigt damit, dass der Mittelwert dem Erwartungswert immer näher kommt. Sie dient in Abhängigkeit vom gewählten Vertrauensniveau als Maß für die zufällige (statistische) Messunsicherheit des **Mittelwertes** $\Delta \bar{x}_{\text{stat}}$ in folgender Weise:

Bachelor / Lehramt Physik: $\Delta \bar{x}_{\text{stat}} = s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}$ (68,3%)

Nebenfach Physik: $\Delta \bar{x}_{\text{stat}} = 2 \cdot s_{\bar{x}} = 2 \cdot \frac{s_x}{\sqrt{N}}$ (95,0%) .

In einigen Fällen ist die Durchführung größerer Stichproben zeitlich nicht machbar. Um dennoch einen brauchbaren Schätzwert für die statistische Messunsicherheit zu erhalten, bietet sich die Durchführung der **Kleinst-Statistik** an. Hierbei werden wenige Messwerte aufgenommen und die Unsicherheit aus der halben Differenz von Maximal- und Minimalwert gebildet

$$\text{Kleinst-Statistik: } \Delta x_{\text{stat}} \approx \frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{2}. \quad (2.5)$$

Bei **Einzelmessungen** bietet die Angabe der halben kleinsten Skalenteilung ein Maß für die zufällige Ableseunsicherheit. Hinzu können noch weitere Unsicherheiten durch vorzunehmende Einstellungen kommen. Bei Messung mit digitalen Messgeräten entfällt die Unschärfe durch subjektives Ablesen. Da die Messwerte durch Zählen von Impulsen gewonnen werden, die Genauigkeit durch die kleinste ablesbare Stelle begrenzt. Unter der Annahme einer Rechteckverteilung mit einem Digit als halbe Breite und einer stabilen Anzeige ergibt sich je nach Vertrauensbereich die folgende Digitalisierungsunsicherheit:

Bachelor / Lehramt Physik: $\Delta x_{\text{stat,dig}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1\text{Digit}$

Nebenfach Physik: $\Delta x_{\text{stat,dig}} = 1\text{Digit}$

Sollte die Anzeige schwanken, ist die Unsicherheit mit statistischen Verfahren zu bestimmen. Bei Standardabweichungen von mehr als 3 Digit spielt die Digitalisierungsunsicherheit praktisch keine Rolle mehr.

2.2.2 Behandlung von systematischen Messunsicherheiten

Systematische Messunsicherheiten führen i.d.R. zu konstanten Messabweichungen, wenn die Experimente unter identischen Bedingungen durchgeführt werden. Daran ist erkennbar, dass systematische Messunsicherheiten nicht durch Anwendung statistischer Verfahren reduziert werden können - wohl aber mitunter durch geschicktes Messen bzw. durch sinnvolle Wahl von Messbereichen verwendeter Messgeräte. Die Ursache solcher Unsicherheiten liegt in der Unvollkommenheit von Messgeräten und Messbedingungen sowie in ungenügender Kalibrierung und ungenauen Einstellmöglichkeiten. Als ein besonderes Merkmal systematischer Messunsicherheiten ist die Korrelation von Messunsicherheiten desselben Messgerätes. Korrelation von Messunsicherheiten bedeutet, dass Abweichungen z.B. mit höherer Wahrscheinlichkeit in dieselbe Richtung ausschlagen als in die entgegengesetzte. Es gibt keine einheitliche Strategie, systematische Messunsicherheiten zu erkennen.

2.2. ALLGEMEINES ZU MESSUNGSICHERHEITEN

Mitunter bemerkt man systematische Abweichungen nur durch Vergleich mit genaueren Messverfahren oder es zeigen sich Inkonsistenzen im statischen Verhalten der Messergebnisse. Im Praktikum beziehen wir Informationen zu den systematischen Messunsicherheiten aus den Angaben der Hersteller der gängigen Messgeräte bzw. Vergleichsnormale. Die Herstellerangaben sind im Anhang dieses Skriptes aufgeführt. Dabei ist folgendes zu beachten:

Annahmen zur den Herstellerangaben: Da wir bei den statistischen Messunsicherheiten von einem bestimmten Vertrauensbereich (z.B. 1σ bei Physik Bachelor/Lehramt) ausgehen, sollte ebenso bei den systematischen ein analoger Vertrauensbereich betrachtet werden. Das Konzept der Häufigkeitsverteilung ist bei systematischen Messunsicherheiten allerdings durchaus fraglich, da das einzelne Messgerät unter denselben Bedingungen stets dieselbe uns unbekannt systematische Abweichung liefern sollte und damit keinen wirklichen Wahrscheinlichkeitscharakter aufweist. Betrachtet man allerdings aus Sicht des Herstellers eine große Anzahl von Messgeräten gleichen Typs, wobei jedes seine individuelle systematische Abweichung hat, kommt in der Gesamtheit wieder eine statistische Komponente ins Spiel, die sich in einer entsprechenden Häufigkeitsverteilung niederschlägt. Da nun die Häufigkeitsverteilung zu den systematischen Messunsicherheiten bezogen auf eine Vielzahl baugleicher Messgeräte dem Nutzer nicht vorliegt, müssen hier Annahmen getroffen werden. Als Konvention gehen wir mangels besseren Wissens von einer Gleichverteilung aus, wobei die Herstellerangabe die halbe Intervallbreite beschreibt (Abb. 2.2).

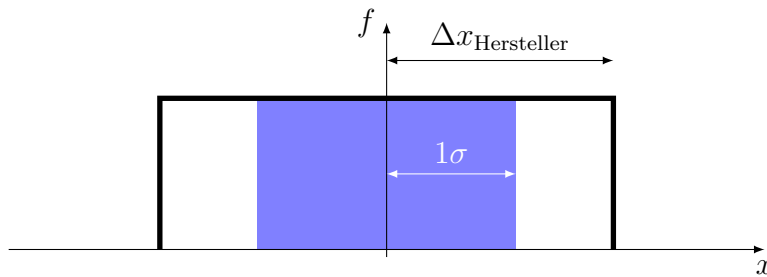


Abbildung 2.2: Angenommene Verteilungsfunktion (schwarz) für die Herstellerangaben von Messgeräten. Die Herstellerangabe bezieht sich i.d.R. auf die Halbe Intervallbreite. Als Messunsicherheit beziehen wir uns auf die Standardabweichung σ der Gleichverteilung.

Mit der Standardabweichung dieser Gleichverteilung (Faktor $1/\sqrt{3}$) ergibt sich die systematische Messunsicherheit zu:

Bachelor / Lehramt Physik:

$$\Delta x_{\text{sys}} = 1\sigma_{\text{sys}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta x_{\text{Hersteller}}$$

Nebenfach Physik:

$$\Delta x_{\text{sys}} = 2\sigma_{\text{sys}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta x_{\text{Hersteller}} \approx \Delta x_{\text{Hersteller}}$$

Mehrere systematische Messunsicherheiten desselben Messgerätes werden entsprechend der Regeln der Fehlerfortpflanzung kombiniert.

2.3 Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Der Schätzwert \bar{y} für eine physikalische Größe y ist oft nicht direkt aus Messwerten dieser Größe bestimmbar, sondern muss indirekt aus Schätzwerten $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N$ anderer Größen über einen mathematischen Zusammenhang $\bar{y}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$ bestimmt werden. So kann zum Beispiel der Widerstand R mit dem Ohmschen Gesetz $R = U/I$ aus den Schätzwerten der Größen Spannung U und Stromstärke I abgeschätzt werden.

Die Messunsicherheit Δy der Größe y berechnet sich aus den Messunsicherheiten der Größen x_i nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_i^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2 + \sum_{i \neq j}^N \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} \text{cov}(x_i, x_j)}. \quad (2.6)$$

Die Grundannahme hinter diesem Verfahren ist, dass die Messunsicherheiten klein genug sind, damit die Messabweichungen in linearer Näherung hinreichend gut beschrieben werden können. Es ist weiterhin unabhängig von der tatsächlichen statistischen Verteilung der Messwerte gültig und damit sowohl für statistische als auch systematische Messunsicherheiten anwendbar. Die partiellen Ableitungen sind stets für die jeweiligen Schätzwerte $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$ zu berechnen. Die Doppelsumme im zweiten Summanden läuft über die Indizes i und j und nur, wenn i und j verschieden voneinander sind. Der Term $\text{cov}(x_i, x_j)$ ist die Kovarianz der Messgrößen x_i und x_j und beschreibt, inwiefern *die Messung* der Größe x_i *die Messung* der Größe x_j beeinflusst. Man spricht hier auch von Korrelation, wobei es sich hier um eine Korrelation handelt, die durch *die Messung oder durch das Messverfahren* erfolgt. Der sogenannte Korrelationskoeffizient $\rho \in [-1, 1]$ berechnet sich durch:

$$\rho_{x_i, x_j} = \frac{\text{cov}(x_i, x_j)}{\Delta x_i \Delta x_j}. \quad (2.7)$$

Liegen Korrelationen vor, so ist der Korrelationskoeffizient von null verschieden und das bedeutet, dass es beispielsweise wahrscheinlicher ist, dass die Messunsicherheiten der Größen x_i und x_j in die gleiche Richtung ausschlagen als in die entgegengesetzte ($\rho > 0$).

Mit Korrelation in diesem Zusammenhang ist nicht gemeint, dass sich, wie man bei obigem Beispiel vielleicht denken könnte, die Stromstärke proportional zur Spannung verhält.

Bezüglich des obigen Beispiels $R = U/I$ ergeben sich die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial U} &= \frac{1}{I} \\ \frac{\partial R}{\partial I} &= -\frac{U}{I^2}. \end{aligned}$$

Die Werte dieser Ableitungen sind jeweils für die Schätz- bzw. Messwerte für U und I zu

bestimmen. Die Formel für die Messunsicherheit für R lautet demnach:

$$\begin{aligned}\Delta R &= \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)^2 (\Delta U)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial I}\right)^2 (\Delta I)^2 + 2 \cdot \frac{\partial R}{\partial U} \frac{\partial R}{\partial I} \text{cov}(U, I)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 (\Delta U)^2 + \left(-\frac{U}{I^2}\right)^2 (\Delta I)^2 - 2 \cdot \frac{U}{I^3} \cdot \text{cov}(U, I)}.\end{aligned}$$

In dieser Allgemeinen Form findet die Fehlerfortpflanzung in den ersten Semestern keine Anwendung, da die Kovarianz der Messgrößen, oft nicht ohne weiteres bestimmbar ist. Da sich allerdings statistische und systematische Messunsicherheiten i.d.R. bezüglich der Korrelation in bestimmter Weise verhalten, lassen sich gebräuchliche Vereinfachungen finden.

2.3.1 Fall 1: Messunsicherheiten sind unkorreliert

In der Regel sind statistische Messunsicherheiten unkorreliert. Auch systematische Messunsicherheiten können als unkorreliert betrachtet werden, wenn die Messgrößen mit verschiedenen Messgeräten gemessen werden. Für diesen Fall gilt:

$$\text{cov}(x_i, x_j) = 0 \quad \forall i \neq j \in [1, \dots, N]. \quad (2.8)$$

Damit vereinfacht sich die Formel der allgemeinen Fehlerfortpflanzung zu:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_{x_i=\bar{x}_i}^2 (\Delta x_i)^2}. \quad (2.9)$$

Für unser Beispiel zum ohmschen Widerstand ergibt sich dementsprechend:

$$\Delta R = \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 (\Delta U)^2 + \left(-\frac{U}{I^2}\right)^2 (\Delta I)^2}.$$

2.3.2 Fall 2: vollständig korrelierte Messunsicherheiten

Von vollständiger Korrelation spricht man, wenn der Korrelationskoeffizient gleich eins, oder:

$$\text{cov}(x_i, x_j) = \Delta x_i \Delta x_j \quad (2.10)$$

gilt. Dies führt recht schnell zu einer weiteren Vereinfachung, die allerdings nicht ganz unproblematisch ist.

$$\begin{aligned}
 \Delta y &= \sqrt{\sum_i^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)_{x_i=\bar{x}_i}^2 (\Delta x_i)^2 + \sum_{i \neq j}^N \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} \text{cov}(x_i, x_j)} \\
 \rho_{i,j}=1 &\stackrel{=}{=} \sqrt{\sum_i^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)_{x_i=\bar{x}_i}^2 (\Delta x_i)^2 + \sum_{i \neq j}^N \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j} \\
 &= \sqrt{\left(\sum_i^N \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2} \\
 &= \left| \sum_i^N \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right|
 \end{aligned}$$

Das Problem dieser Annahme wird am besten mit obigem Beispiel klar. Es ergibt sich der folgende Ausdruck:

$$\Delta R = \left| \frac{1}{I} \Delta U - \frac{U}{I^2} \Delta I \right|.$$

Insbesondere bei Differenzen und Quotienten kommen partielle Ableitungen mit entgegengesetzten Vorzeichen vor, die eben wie im Beispiel des ohmschen Widerstands dazu führen, dass sich Messunsicherheiten **kompensieren** können und die Gefahr einer Unterabschätzung besteht, wenn die Annahme tatsächlich nicht mit den gegebenen Messverfahren vereinbar ist. Daher ist die Annahme der vollständigen Korrelation stets zu hinterfragen und überzeugend zu begründen. Derartige Korrelationen sind nur bei systematischen Messunsicherheiten zu erwarten, z.B. bei:

- Wägung mit Balkenwaage und stets demselben Wägesatz
- stets konstanter Nullpunktabweichungen (Lineal mit der Null an der Außenkante).

2.3.3 Fall 3: Messunsicherheiten mit unbekannter Korrelation

Gerade bei systematischen Messunsicherheiten können Korrelationen vorliegen, die i.d.R. unbekannt sind. Da Korrelationen durchaus zu einer Vergrößerung der Messunsicherheit gegenüber dem unkorrelierten Fall führen können, ist es an dieser Stelle sinnvoll eine obere Grenze zu finden, die alle Möglichkeiten der Korrelation einschließt. Hierbei greifen wir mit $\rho \in [-1,1]$ auf die folgende Ungleichung zurück:

$$a^2 + 2ab\rho + b^2 \leq a^2 + 2|a||b||\rho| + b^2 \stackrel{\rho \in [-1,1]}{\leq} a^2 + 2|a||b| + b^2 = (|a| + |b|)^2. \quad (2.11)$$

Mit dieser Ungleichung schätzen wir die Messunsicherheit nach oben ab und erhalten die **maximale Messunsicherheit**:

$$\begin{aligned}
 \Delta y &= \sqrt{\sum_i^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2 + 2 \sum_{i < j}^N \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} \text{cov}(x_i, x_j)} \\
 &\leq \sqrt{\left(\sum_i^N \left|\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i\right|\right)^2} \\
 &= \underline{\underline{\sum_i^N \left|\frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i\right|}}
 \end{aligned}$$

Für unser Beispiel bedeutet dies:

$$\Delta R = \left| \frac{1}{I} \Delta U \right| + \left| -\frac{U}{I^2} \Delta I \right|$$

Aufgrund der Beträge können sich die Teilunsicherheiten nicht wie im Fall 2 reduzieren. Somit ist man immer auf der sicheren Seite, allerdings kann man hierbei Gefahr laufen, die Messunsicherheiten zu überschätzen.

2.3.4 Besondere Regelungen für Lehramt Physik

Studierende des Lehramts Physik arbeiten im Grundpraktikum mit der folgenden Vereinfachung:

- statistische Messunsicherheiten werden ausschließlich als unkorreliert betrachtet (Fall 1)
- systematische Messunsicherheiten werden ausschließlich als unbekannt korreliert betrachtet (Fall 3).

2.3.5 Vereinfachung für Studiengänge mit Physik im Nebenfach

Vereinfachend werden für jede Messgröße die Gesamtunsicherheiten aus stat. und syst. Messunsicherheit gebildet (2σ) und im Sinne der maximalen Unsicherheit fortgepflanzt. Es gilt somit für die Unsicherheiten der direkt bestimmten Messgrößen $[x_1, \dots, x_N]$:

$$\Delta x_i = \Delta x_{\text{stat},i} + \Delta x_{\text{syst},i} \quad \text{mit} \quad i = [1, \dots, N]. \quad (2.12)$$

Für die Messunsicherheit der indirekt bestimmten Messgröße folgt:

$$\Delta y = \sum_i^N \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \right|. \quad (2.13)$$

Dies entspricht dem Vorgehen für den dritten Fall.

2.3.6 Logarithmisches Differenzieren

Sind die Messgrößen über Produkte oder Quotienten miteinander verknüpft, bietet es sich an, die Formel der Messunsicherheit durch logarithmisches Differenzieren zu ermitteln, da die Ableitung der Logarithmen in diesem Fall besonders einfach ist.

Betrachten wir hierfür exemplarisch F als Funktion der unsicherheitsbehafteten Messgrößen x und y . Für die Bestimmung der partiellen Ableitungen betrachten wir zunächst eine partielle Ableitung des Logarithmus von F (Kettenregel):

$$\frac{\partial \ln F}{\partial x} = \frac{\partial \ln F}{\partial F} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Somit können wir die partiellen Ableitungen in der Fehlerfortpflanzungsformel durch

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F \frac{\partial \ln F}{\partial x}$$

zunächst substituieren:

$$\Delta F(x, y) = |F| \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \ln F}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln F}{\partial y} \Delta y\right)^2 + 2 \frac{\partial \ln F}{\partial x} \frac{\partial \ln F}{\partial y} \text{cov}(x, y)} \quad (2.14)$$

Der Vorteil dieses Verfahrens wird besonders bei Produkten von Potenzen deutlich. Nehmen wir hierfür an: $F(x, y) = x^n \cdot y^m \cdot z^p$ dann folgt mit den partiellen Ableitungen die entsprechende Fehlerformel exemplarisch für den unkorrelierten Fall.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln F}{\partial x} &= \frac{m}{x} \\ \frac{\partial \ln F}{\partial y} &= \frac{n}{y} \\ \frac{\partial \ln F}{\partial z} &= \frac{p}{z} \end{aligned} \quad \frac{\Delta F}{|F|}(x, y, z) = \sqrt{\left(m \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(n \frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(p \frac{\Delta z}{z}\right)^2}$$

In diesem Fall benötigt man also nur die relativen Messunsicherheiten der Messgrößen und die Exponenten für das aufstellen der Fehlerformel. Weiterhin wird sofort ersichtlich, dass die Messgrößen mit größeren Exponenten ein deutlich stärkeres Gewicht in der Fehlerfortpflanzung aufweisen. Betrachtet man zusätzlich noch Korrelationen, so führen bei positiven Korrelation (Kovarianz > 0) Exponenten mit entgegengesetzten Vorzeichen zu einer Verringerung der Messunsicherheit gegenüber dem unkorrelierten Fall.

Allgemein ergibt sich somit für die *relative* Messunsicherheit für F :

$$\boxed{\frac{\Delta F}{|F|}(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \ln F}{\partial x_i} \Delta x_i\right)^2 + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial \ln F}{\partial x_i} \frac{\partial \ln F}{\partial x_j} \text{cov}(x_i, x_j)}} \quad (2.15)$$

Beispiel: Bestimmung des Ohmschen Widerstands R durch Messung von Spannung U und Strom I . Es gilt $R = U^1 \cdot I^{-1}$. In Abhängigkeit von der Korrelation ergeben sich die folgenden Formeln:

- allgemeiner Fall:

$$\frac{\Delta R}{|R|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta I}{I}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\text{cov}(U, I)}{UI}}$$

- Unkorrelierter Fall:

$$\frac{\Delta R}{|R|} = \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta I}{I}\right)^2}$$

- vollständig korrelierter Fall:

$$\frac{\Delta R}{|R|} = \left| \frac{\Delta U}{U} - \frac{\Delta I}{I} \right|$$

- unbestimmt korrelierter Fall (maximale Unsicherheit):

$$\frac{\Delta R}{|R|} = \left| \frac{\Delta U}{U} \right| + \left| -\frac{\Delta I}{I} \right|$$

Die gleichen Formeln bekommt man jeweils auf herkömmlichem Weg durch Ausklammern von R .

2.4 Der gewogene Mittelwert

Bislang wurde bei der Mittelwertbildung stets angenommen, dass jeder Messwert derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung genügt oder anders ausgedrückt aus derselben Grundgesamtheit entstammt. Daher ist es auch vollkommen legitim, dass jeder einzelne Messwert mit gleichem Gewicht zur Bildung des Mittelwerts beiträgt. Im Folgenden soll es hingegen um solche Fälle gehen, bei denen jeder einzelne Wert unter anderen Bedingungen gemessen wurde. Unterschiedliche Bedingungen bedeuten im Allgemeinen, die einzelnen Messwerte unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen entstammen und für jeden Messwert x_i eine individuelle Standardabweichung σ_i existiert. Bei der Bildung des entsprechenden Mittelwertes kommt es natürlich darauf an, dass die genaueren Messungen mit einem höheren Gewicht in die Bildung des Mittelwertes eingehen.

Ohne es an dieser Stelle weiter zu begründen, werden die folgenden Gewichtungsfaktoren gewählt:

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2},$$

damit die geringen Messunsicherheiten eine entsprechend höhere Gewichtung erfahren. Der gewogene Mittelwert berechnet sich damit in folgender Weise:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i^N w_i x_i}{\sum_i^N w_i}.$$

Dass daraus bei homogener Gewichtung die bekannte Formel des arithmetischen Mittels folgt, lässt sich einfach zeigen. Die stat. Varianz des gewogenen Mittelwertes kann mittels gaußscher Fehlerfortpflanzung bestimmt werden. Daraus ergibt sich:

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sum_i^N \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2 = \sum_i^N \frac{w_i^2}{\left(\sum_j^N w_j \right)^2} \sigma_i^2 = \frac{\sum_i^N w_i}{\left(\sum_j^N w_j \right)^2} = \frac{1}{\sum_j^N w_j} = \frac{1}{\underline{\underline{\sum_j^N \frac{1}{\sigma_j^2}}}}$$

Auch bei dieser Formel wird schnell klar, dass bei homogener Gewichtung die zu erwartende Varianz des Mittelwertes herauskommt. Dieser Ausdruck ergibt ein sinnvolles Maß für die Varianz des gewogenen Mittelwertes, wenn die statistischen Verteilungen aller Messwerte denselben Erwartungswert aber unterschiedliche Standardabweichungen haben. Da dieser Ausdruck jedoch keine Information über die tatsächlichen Messwerte enthält, kann auch keine Information über die tatsächliche Streuung der Messwerte bez. des Mittelwertes gewonnen werden. Aus der tatsächlichen Streuung kann man im Vergleich zu obiger Varianz Schlussfolgerungen über mögliche systematische Abweichungen oder über die Konsistenz von Varianz der Einzelmessung zur tatsächlichen Streuung ziehen. Aus diesem Grund unterscheidet man beim gewogenen Mittelwert zwischen zwei verschiedenen Maßen für die Bestimmung der Varianz, die im Falle homogener Gewichtung identisch sind.

Unterscheidung nach Birge (1932)

Interne Konsistenz:

Sind die Abweichungen vom „wahren“ Wert nur zufallsbedingt (und nicht durch systematische Einflüsse) so wird der Satz an Messwerten als intern konsistent bezeichnet. In diesem Fall bestimmt sich die Varianz des gewogenen Mittelwertes zu:

$$\frac{1}{\sigma_{\text{int}}^2} = \sum_i^N \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

Externe Konsistenz:

Alternativ kann man auch die gewichtete Varianz bilden, welche sowohl die mittleren Unsicherheiten als auch die Lagegrößen explizit einbezieht:

$$\sigma_{ext}^2 = \frac{1}{N-1} \frac{\sum_i^N w_i (x_i - \mu)^2}{\sum_i^N w_i}.$$

Man überprüfe schnell, dass sich im Falle von gleichen Messunsicherheiten die bekannte Varianz des Mittelwertes daraus ergibt. Um keiner Unterabschätzung der Messunsicherheiten zu erliegen, wird empfohlen, stets das Maximum von beiden Unsicherheiten anzugeben:

$$\sigma_\mu = \max(\sigma_{int}, \sigma_{ext}).$$

Problematisch bei dieser Vorgehensweise ist jedoch der Umstand, dass statistische und systematische Messunsicherheiten miteinander vermischt werden können, insb. dann, wenn die Abweichungen der Messwerte aufgrund von systematischen Messunsicherheiten hervorgerufen werden.

Das ist zunächst nicht sonderlich zufriedenstellend, bietet aber eine Möglichkeit einer Prüfung der Messreihen auf Konsistenz.

Konsistenztest nach Birge (Z-Test)

Liegen keine systematischen Messunsicherheiten vor, so gilt für die Erwartungswerte der Messgrößen:

$$\mathcal{E}(x_i) = \mu \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Im Grenzfall sehr großer Werte für N folgt daraus:

$$\sigma_{int}^2 = \sigma_{ext}^2$$

Die Größe Z mit

$$Z^2 = \frac{\sigma_{ext}^2}{\sigma_{int}^2} = \frac{1}{N-1} \sum_i^N w_i (x_i - \mu)^2$$

liegt für nicht zu kleine N demnach mit einer Konfidenz von 1σ in dem Streubereich:

$$Z \in \left[1 - \sqrt{2/(N-1)}, 1 + \sqrt{2/(N-1)} \right].$$

Signifikante Abweichungen von 1 können darauf hindeuten, dass

- es sich um rein statistische Abweichungen handelt, deren Wahrscheinlichkeit jedoch gering ist oder
- die statistische Messunsicherheiten falsch geschätzt wurden (Fehlerbalken) oder
- bislang unerkannte systematische Messunsicherheiten vorliegen

Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass die Größe Z^2 äquivalent zu χ^2 pro Freiheitsgrad ist und sich hinter dem Z -Test eigentlich ein χ^2 -Test für den gewogenen Mittelwert verbirgt.

2.5 Das gerundete Endergebnis

Allgemeines Vorgehen:

- Die Zahlenwerte werden wissenschaftlich gerundet.
- Die Messunsicherheiten sind maßgeblich für die Angabe von signifikanten Stellen.
- Wir betrachten den Wert der Messunsicherheit und suchen von links beginnend die erste von null verschiedene Stelle:
 - Physik Bachelor und Lehramt (Empfehlung Particle Data Group)
 - * ist diese 4 ... 9, so ist SIE die zu rundende Stelle (eine signifikante Stelle)
 - * ist diese 1 ... 3, so ist die RECHTS daneben stehende die zu rundende Stelle (zwei signifikante Stellen).
 - Physik im Nebenfach (DIN 1333)
 - * ist diese 3 ... 9, so ist SIE die zu rundende Stelle (eine signifikante Stelle)
 - * ist diese 1 ... 2, so ist die RECHTS daneben stehende die zu rundende Stelle (zwei signifikante Stellen).
- Die Ergebniszahl und die Messunsicherheiten werden an gleicher Stelle gerundet.
- Auch Messunsicherheiten werden wissenschaftlich gerundet, mit der Einschränkung, dass nur abgerundet werden darf, wenn der dadurch entstehende Fehler nicht größer als 5% wird.
- Relative Messunsicherheiten werden auf zwei signifikante Stellen gerundet (inkonsistent in der Literatur).

Beispiel:

Ergebniszahl	9,812467	9,812467
Messunsicherheit	0,02123	0,04621
Messunsicherheit gerundet	0,021	0,05
Ergebnis	9,812 ± 0,021	9,81 ± 0,05

Hinweise für die Angabe getrennter Messunsicherheiten

- Bei unterschiedlichen Stellen von syst. und stat. Messunsicherheiten (Stud. Physik/Lehramt):
 - entweder nach der kleinsten Messunsicherheit richten und die nicht signifikanten Stellen der größeren Messunsicherheit sowie der Messgröße in Klammern setzen
 - oder insb. bei Unterschieden von mehr als einer Größenordnung nach der größeren Messunsicherheit richten und die kleinere nicht in das Endergebnis aufnehmen (mit Begründung).

Beispiel :

Ergebniszahl	9,812467
sys. Messuns.	0,03123
stat. Messuns.	0,00129
Ergebnis	$9,812(5) \pm 0,0013 \pm 0,031(2)$
Ergebnis (alternativ)	$9,812 \pm 0,031$ (stat. MU nicht beitragend, weil...)

Kapitel 3

Ausgleichsrechnung

Die Ausgleichsrechnung hat zum Ziel, eine mathematische Beschreibung für einen gegebenen Satz von Messdaten zu finden, welche die innewohnenden Abhängigkeiten optimal widerspiegelt. Da nun die einzelnen Messwerte stets statistischen Abweichungen unterworfen sind, stellt sich die Frage, wie sich aus einer Vielzahl von Messungen der statistische Charakter von den tatsächlichen physikalischen Gegebenheiten separieren lässt. Im Ergebnis steht ein mittlerer funktioneller Zusammenhang, dessen Parameter so bestimmt werden, dass die resultierenden Abweichungen zu den Messdaten minimiert und somit unvermeidbare statistische Abweichungen optimal ausgeglichen werden. Da die angepasste Funktion auf einer Stichprobe endlichen Umfangs basiert, ist diese zweifellos ebenso mit Unsicherheiten behaftet, die sich in Unsicherheiten der angepassten Parameter manifestieren und damit vielmehr einen Konfidenzbereich definieren, der im Idealfall den uns stets unbekanntem wahren Zusammenhang mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit lokalisiert. Somit wird klar, dass es sich bei der Bestimmung der Parameter nur um Schätzungen handeln kann, die mit wachsendem Stichprobenumfang besser werden.

Das Zurückführen größerer Mengen Messdaten auf wenige Parameter einer Funktion wird auch als Regression bezeichnet. Ist diese Funktion linear in den Anpassungsparametern, so spricht man von linearer Regression. In der Frühphase des Physik-Studiums soll im Wesentlichen die Anpassung linearer oder linearisierter Zusammenhänge und die Schätzung der entsprechenden Unsicherheiten sowohl auf grafischer als auch auf rechnerischer Weise erlernt und vertieft werden. Bei Studiengängen mit Physik im Nebenfach erfolgt die Anpassung nur grafisch. Im weiterführenden Physik-Studium wird die Anpassung auch auf nicht-linearisierbare Zusammenhänge ausgeweitet.

Wichtig ist zu bemerken, dass es sich bei der Ausgleichsrechnung um ein rein statistisches Verfahren handelt, was nur unter Einbeziehung ausschließlich statistischer Unsicherheiten zu mathematisch abgesicherten Ergebnissen kommt und daher auch nur Aussagen über statistische Unsicherheiten der angepassten Parameter erlaubt. Eine Behandlung von systematischen Unsicherheiten muss demzufolge auf einem gesonderten Weg erfolgen. Daraus ergibt sich zudem, dass ein rechnerischer Ausgleich unter Einbeziehung von

Gesamtunsicherheiten (Nebenfach) i.A. keine aussagekräftigen Ergebnisse liefern kann. Als Ausweg bliebe in diesem Fall nur die Anwendung grafischer Methoden oder eine saubere Trennung von statistischen und systematischen Unsicherheiten.

Rückblickend wird klar, dass bereits die Bestimmung eines Mittelwertes aus einer Anzahl von Einzelmessungen unter identischen Bedingungen bereits den einfachsten Fall der Ausgleichsrechnung markiert.

- Stand bisher: Mithilfe von Einzelmessungen, die alle denselben Wert liefern sollten, wurde ein Schätzwert inkl. Messabweichung bestimmt, der dem wahren am nächsten kommt.
- Nun sollen Messungen einer Größe y unter gezielter Variation einer unabhängigen Messgröße x erfolgen und Wertepaare (x_i, y_i) aufgenommen werden. Diese beiden Größen stehen durch einen physikalischen Zusammenhang in Beziehung zueinander.
- Gesucht ist ein physikalisches Modell, das anhand weniger Parameter die Vielzahl von Einzelmessungen beschreibt („data reduction“). Die Aufgabe besteht darin, diese Parameter einschließlich statistischer und systematischer Abweichungen zu bestimmen.
- Im Anfängerpraktikum beschränken wir uns auf den Ausgleich mittels linearer Funktion, was bei nichtlinearen Zusammenhängen nur bei möglicher Linearisierung anwendbar ist:

Messwerte	nichtlinear	\Rightarrow	linearisiert	linearer Ausgleich
(m_i, T_i)	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	\Rightarrow	$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}$	(m_i, T_i^2)
(T_i, p_i)	$p = p_0 \exp\left(\frac{\alpha}{T}\right)$	\Rightarrow	$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{\alpha}{T}$	$\left(\frac{1}{T}, \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)\right)$
(β_i, α_i)	$\alpha = \arcsin(n \sin \beta)$	\Rightarrow	$\sin(\alpha) = n \sin \beta$	$(\sin(\beta_i), \sin(\alpha_i))$

3.1 Grafischer Ausgleich mittels linearer Funktionen

Dieses Verfahren kann für alle linearen oder linearisierten Probleme sowohl im Haupt- als auch Nebenfach angewandt werden. Es setzt voraus, dass man neben den Messwerten auch die entsprechenden Messunsicherheiten der Messdaten ermittelt bzw. im linearisierten Fall entsprechend transformiert hat. Benötigt wird Millimeterpapier, ein gut gespitzter Bleistift und ein ausreichend langes und transparentes Lineal. Das grafische Verfahren erscheint im digitalen Zeitalter etwas rückständig; dennoch steht es dem rechnerischen Verfahren bei sorgfältiger Arbeit nicht nach und erlaubt sogar in einfacher Weise die Einbeziehung von Unsicherheiten von *beiden* Messgrößen¹.

Zu bemerken ist, dass das im folgenden dargelegte Verfahren sich an den Erfordernissen der Studiengänge mit Physik im Hauptfach orientiert. Die davon abweichenden Spezifikationen für Physik im Nebenfach werden im Abschnitt 3.1.3 dargelegt.

Zum allgemeinen Vorgehen:

1. Tragen Sie die Messwerte in ein Diagramm mit geeigneter Achseneinteilung ein. Diese Einteilung sollte so gewählt werden, dass die Koordinaten der Messpunkte den gesamten Bereich beider Achsen füllen. Nehmen Sie bei nicht-linearen Zusammenhängen sofern möglich eine Linearisierung vor.
2. Zeichnen Sie sofern bekannt die statistischen Messunsicherheiten in Form von Fehlerbalken ($\pm 1\sigma$) ein. Achtung: systematische Messunsicherheiten tragen nicht zu den Fehlerbalken bei. Für Studiengänge mit Physik im Nebenfach gelten hier andere Regelungen (siehe Abschn. 3.1.3).
3. Nach Augenmaß wird eine Ausgleichsgerade ($y = a + bx$) durch die Messpunkte gelegt, sodass in etwa die Gesamtheit der (quadratischen) Abweichungen zwischen den Messpunkten und der Geraden minimal ist - bei einer gut gewählten Skalierung, sollte der Winkel der Gerade mit der Abszisse zwischen 30° und 60° betragen.

Die Festlegung der Ausgleichsgeraden entspricht analog der Bildung des Mittelwertes aus einer Messreihe von Wiederholungsmessungen. Sollten die statistischen Unsicherheiten in den Messpunkten unterschiedlich sein, so tragen die kleineren Unsicherheiten mit einem stärkeren Gewicht bei. Dies entspräche einer Art gewogenen Mittelwertes. Beachten Sie weiterhin, dass die Ausgleichsgerade nicht immer zwingend durch null gehen muss.

4. Zeichnen Sie ein möglichst großes Anstiegsdreieck ein und bestimmen Sie den Anstieg sowie das Absolutglied der Ausgleichsgeraden. Kennzeichnen Sie die abgelesenen Werte.

¹Die rechnerischen Standardverfahren setzen voraus, dass nur Messunsicherheiten der abhängigen Variable (vertikale Achse) relevant sind

3.1.1 Grafische Ermittlung der statistischen Messunsicherheiten

Die statischen Unsicherheiten des Anstieges und des Absolutgliedes ergeben sich aus der Streuung der Messpunkte bezüglich der Ausgleichsgeraden. Das Vorgehen besteht nun darin, den Streubereich in Form eines $\pm\sigma$ -Unsicherheitschlauchs, der die Ausgleichsgerade umgibt, zu bestimmen und darin Geraden mit maximal und minimal möglichen Anstiegen (b_{\max} bzw. b_{\min}) einzupassen und die zugehörigen Absolutglieder (a_{\max} bzw. a_{\min}) zu ermitteln. Die Messunsicherheiten für die Parameter der Ausgleichsgeraden ergeben sich näherungsweise wie folgt:

$$\Delta a_{\text{stat}} \approx \frac{1}{2} \frac{|a_{\max} - a_{\min}|}{\sqrt{n}}$$

$$\Delta b_{\text{stat}} \approx \frac{1}{2} \frac{b_{\max} - b_{\min}}{\sqrt{n}}$$

Der Term \sqrt{n} in den Nennern trägt der Tatsache Rechnung, dass mit wachsender Anzahl von Messpunkten in einer Messreihe, die statistischen Messunsicherheiten kleiner werden müssen. Anders argumentiert, entspricht die Breite des Unsicherheitsbereich zunächst nur der Standardabweichung einer Einzelmessung - von Interesse ist aber die Standardabweichung der Mittelwerte. Da es sich um eine Näherung handelt, kann man bei wenigen Messwerten (< 10) $n \approx 1$ setzen.

Für die grafische Bestimmung des Unsicherheitschlauchs gibt es kein einheitliches Rezept, da die Ausgangssituationen oft sehr verschieden sein können. Wir betrachten exemplarisch im Folgenden vier Fälle und stellen die Vorgehensweisen im Einzelnen vor. Wir gehen davon aus, dass die Messunsicherheiten in Ordinateurichtung bestimmend sind. Sollten Unsicherheiten in Abszissenrichtung eine Rolle spielen, lässt sich dieses Verfahren verallgemeinern (siehe Behandlung der systematischen Unsicherheiten).

Fall 1: Messunsicherheit konstant aber unbekannt

Für den Fall, dass genügend viele Messwertepaare vorliegen (> 10) und unter der Annahme, dass diese mit gleicher Standardabweichung bezüglich der Ausgleichsgeraden schwanken, ist das folgende Vorgehen anzuwenden:

Für die Bestimmung der **statistischen Messunsicherheiten** wird die Ausgleichsgerade symmetrisch nach oben und unten verschoben, sodass ca. 68% aller Messwerte (ohne Fehlerbalken) eingegrenzt werden (Abb. 3.1). In Abszissenrichtung ist dieser Bereich durch den ersten und letzten Messwert eingegrenzt. In dem resultierenden Unsicherheitsbereich werden Geraden des minimal und maximal möglichen Anstiegs identifiziert (Abb. 3.1).

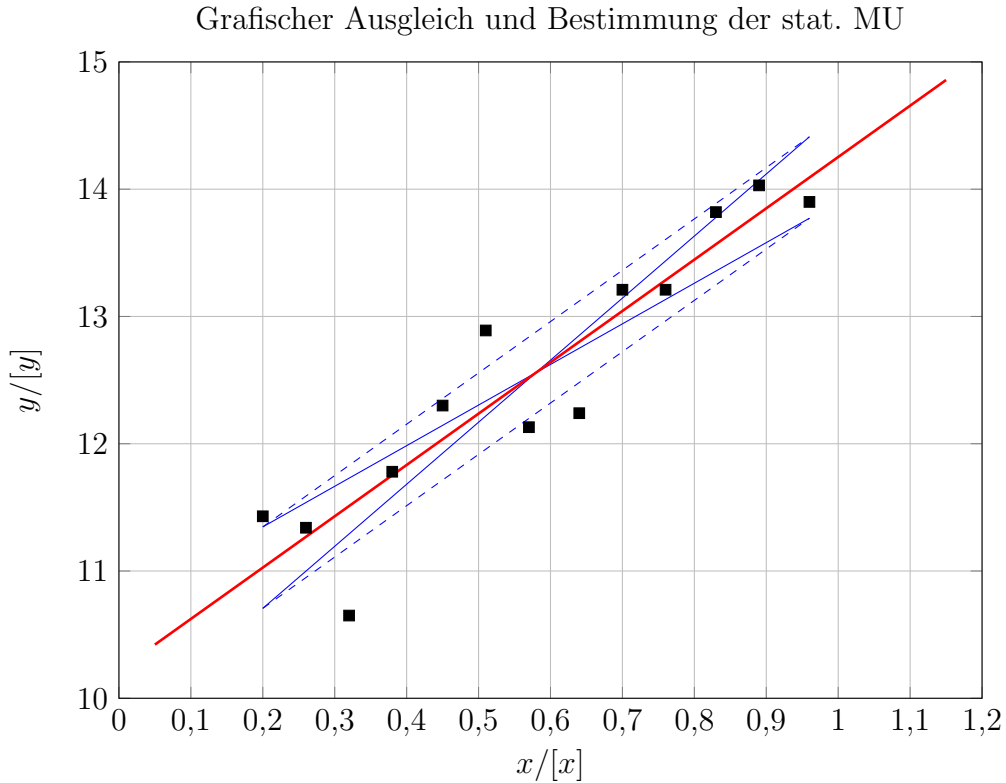


Abbildung 3.1: Durchführung eines grafischen Ausgleiches und der Ermittlung des statistischen Messunsicherheit im Anstieg und Absolutglied: Festlegung der Ausgleichsgeraden (rot), Konstruktion des Unsicherheitsbereichs (gestrichelt) und Ermittlung der Geraden des maximalen und minimalen Anstiegs (blau).

Hierbei sollte überprüft werden, dass die Grundannahme der gleichmäßigen Statistik insbesondere bei den großen Abweichungen konsistent zu den Messungen ist. Dabei sollten im Mittel nur 5% der Messpunkte außerhalb des 2σ -Bereichs liegen. Im vorliegenden Fall liegt von den 13 Messpunkten 1 Wert außerhalb 2σ . Dies ist statistisch mit einer Wahrscheinlichkeit von (bei $p = 0,05$, Binomialverteilung):

$$P(1 \text{ von } 13 \text{ Messwerten außerhalb } 2\sigma) = \binom{13}{1} p^1 (1 - p)^{12} = 35,1\%$$

möglich. In diesem Fall, stehen die Schwankungen der Messdaten bezüglich der Ausgleichsgeraden nicht in einem offensichtlichen Widerspruch zur zugrundeliegenden Statistik, obwohl die Wahrscheinlichkeit, dass keine Messwerte außerhalb liegen, dennoch höher ist (siehe Tab. 3.1).

Die Annahme der gleichen Statistik in jedem Messpunkt ist gerade bei Linearisierungen oft nicht mehr zu rechtfertigen. In diesen Fällen muss die statistische Messunsicherheit für jeden Messpunkt bestimmt werden und das folgende Verfahren angewandt werden.

Fall 2: Messunsicherheit für jeden Messpunkt bekannt

Ist die statistische Messunsicherheit in jedem Messpunkt bekannt, kann i.d.R. die Konstruktion des Unsicherheitsschlauchs durchgeführt werden (Abb. 3.2). Für jeden Messpunkt trägt man ausgehend von der Ausgleichsgeraden im Abstand von einer Fehlerbalkenlänge den oberen und unteren Stützpunkt (blaue Kreuze) auf und gleicht mögliche Variationen, die sich aus der Schätzung der Unsicherheiten ergeben können, durch Geraden aus (gestrichelt). Analog zum ersten Fall können nun Geraden des maximalen und minimalen Anstieges eingepasst werden.

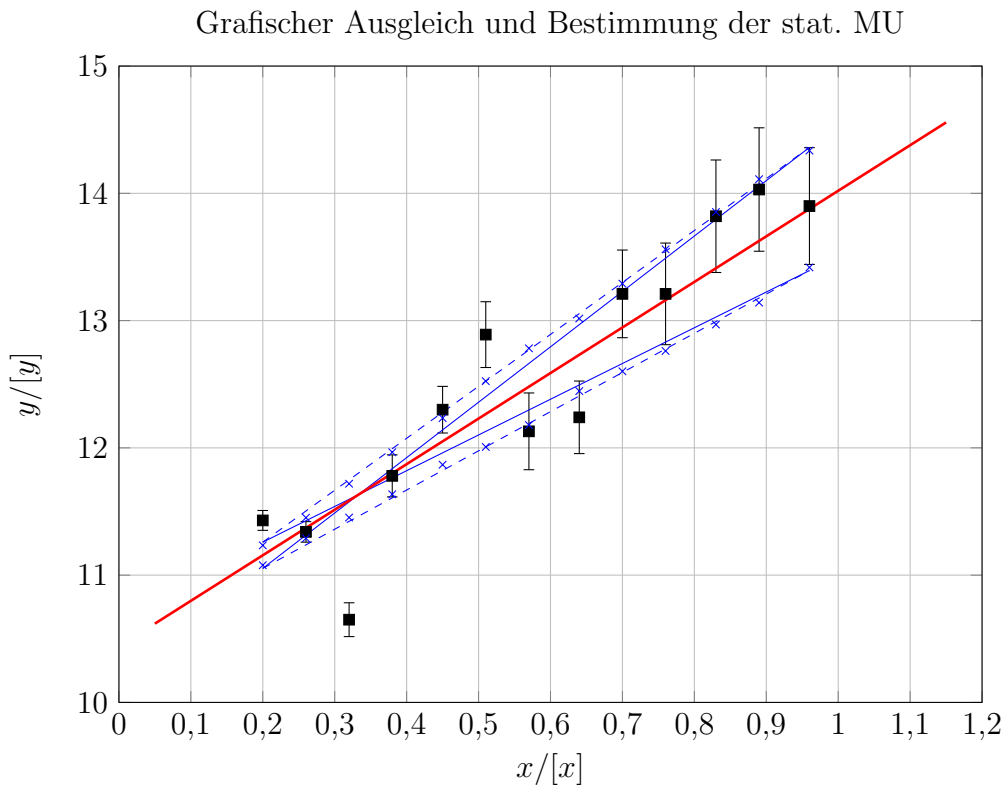


Abbildung 3.2: Durchführung eines grafischen Ausgleiches und der Ermittlung des statistischen Messunsicherheit im Anstieg und Absolutglied (gleiche Messpunkte wie in Fall 1, stat. Messunsicherheit proportional zu x): Festlegung der Ausgleichsgeraden (rot), Konstruktion des Unsicherheitsbereichs (gestrichelt) und Ermittlung der Maximal- und Minimalgeraden (blau).

In diesem Fall wächst die statistische Messunsicherheit proportional zu x , was durchaus eine Folge von Linearisierung sein kann. Auch hier kann schnell geprüft werden, ob etwa 68% der Messwertpunkte (ohne Fehlerbalken) im $\pm 1\sigma$ Unsicherheitsbereich (gestrichelte Geraden) liegen (in diesem Fall sind es 7 von 13). Weiterhin sollten auch Werte außerhalb von $\pm 2\sigma$ untersucht werden, die möglicherweise als Ausreißer in Betracht kommen. Da sowohl die Längen der Fehlerbalken als auch der Unsicherheitsbereich $\pm 1\sigma$ entsprechen,

erkennt man diese leicht anhand des fehlenden Überlapps. Im vorliegenden Beispiel sind es nun 3 von 13 Messwerten, die außerhalb von 2σ liegen. Dies ist statistisch mit einer Wahrscheinlichkeit von ($p = 0,05$):

$$P(3 \text{ von } 13 \text{ Messwerten außerhalb } 2\sigma) = \binom{13}{3} p^3 (1-p)^{10} = 2,1\%$$

möglich. Dies erscheint im Vergleich zum vorherigen Beispiel deutlich unwahrscheinlicher. Dennoch ist es nicht ausgeschlossen, dass sich die Abweichungen rein zufällig ergeben haben. Der weitere Umgang mit solchen Resultaten wird unten behandelt.

Fall 3: Umgang mit wenigen Messwerten

Mitunter kann es auch passieren, dass nur wenige Wertepaare (< 10) verfügbar sind, die einer deutlichen Streuung bezüglich der Ausgleichsgeraden unterworfen sind (Abb. 3.3) und selbst schwankende Messunsicherheiten aufweisen. Am ehesten lässt sich eine Ausgleichsgerade unter Berücksichtigung der Messunsicherheiten finden. Schwieriger gestaltet sich die Frage nach den Messunsicherheiten. Die stark schwankenden Messunsicherheiten, erlauben keinen linearen Unsicherheitsschlauch, so dass im Sinne einer Maximalunsicherheit lediglich durch Parallelverschiebung der Bereich erfasst werden soll, der alle Messpunkte enthält. Dies führt natürlich zu einer Überabschätzung der statistischen Messunsicherheit der Regressionsparameter, die zwingend zu diskutieren ist (siehe unten).

Offenbar liegen in diesem Fall 2 von 6 Messwerten außerhalb von 2σ , dies ist statistisch mit einer Wahrscheinlichkeit (bei $p = 0,05$) von

$$P(2 \text{ von } 6 \text{ Messwerten außerhalb } 2\sigma) = \binom{6}{2} p^2 (1-p)^4 = 3,1\%$$

möglich.

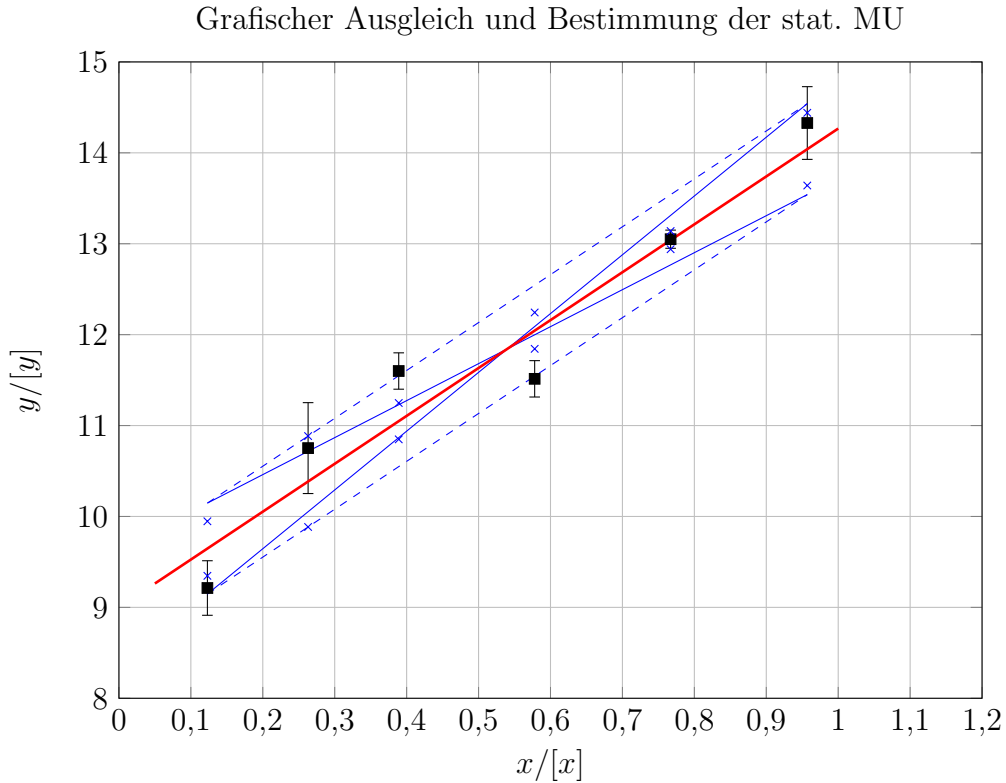


Abbildung 3.3: Durchführung eines grafischen Ausgleiches und der Ermittlung des statistischen Messunsicherheit im Anstieg und Absolutglied (wenige Messwerte, streuende stat. Messunsicherheiten): Festlegung der Ausgleichsgeraden (rot), Konstruktion des Unsicherheitsbereichs (gestrichelt) und Ermittlung der Maximal- und Minimalgeraden (blau).

Fall 4: Messpunkte liegen nahezu exakt auf der Ausgleichsgeraden

In einigen Fällen zeichnet sich schon nach wenigen Messungen ab, dass die Messpunkte sehr gut verträglich mit einer Geraden sind, sodass die Konstruktion eines Unsicherheitsbereichs zeichnerisch nicht wirklich umsetzbar ist. Dies muss sich natürlich auch in der Geringfügigkeit der entsprechenden Fehlerbalken zeigen (siehe oben). Hierbei ist die statistische Unsicherheit der gesuchten Parameter letztlich nur noch durch die Zeichen-/Ablesegenauigkeit (halbe Kästchenbreite) begrenzt, die allerdings rechnerisch erfasst werden sollte:

Seien (x_0, y_0) und (x_1, y_1) die Referenzpunkte für die Berechnung des Anstieges, so ergibt sich beispielsweise der maximal mögliche Anstieg bei $x_0 < x_1$ und $y_0 < y_1$ durch:

$$b_{\max} = \frac{y_1 - y_0 + \Delta y_s}{x_1 - x_0 - \Delta x_s}. \quad (3.1)$$

Die kleinste Skaleneinteilung in x - und y -Richtung ist mit Δx_s bzw. Δy_s gegeben. Analoge

Überlegungen ergeben sich für den minimalen Anstieg.

Umgang mit großen Messabweichungen (potenzielle Ausreißer)

In den obigen Fällen 2 und 3 wurden Messpunkte außerhalb von $\pm 2\sigma$ identifiziert, die sich bei gegebener Anzahl der Messwerte mit nur geringfügiger Wahrscheinlichkeit aus reinen statistischen Schwankungen ergeben (Tab. 3.1). Trotz dieser Geringfügigkeit kann damit nicht ausgeschlossen werden, dass es sich um mögliche Schwankungen handelt, die mit der Statistik verträglich sind.

In diesen Fällen muss abgeklärt werden, ob diese Abweichungen tatsächlich statistischer Natur oder auf bislang unerkannte systematische Abweichungen zurückzuführen sind. Im Zweifelsfall müsste eigentlich die gesamte Messreihe wiederholt werden, was für das Praktikum jedoch keine taugliche Lösung ist. Vielmehr empfiehlt es sich, nur die betreffenden Messpunkte mehrmals nachzumessen und den Mittelwert aus *allen* Werten zu bilden.

Zeigt sich, dass die Mittelwerte innerhalb der entsprechenden doppelten Standardabweichungen (Mittelwerte) bezüglich der Ausgleichsgeraden befinden, kann davon ausgegangen werden, dass die großen Abweichungen statistischer Natur sind. In diesem Fall wird die lineare Regression mit den genauer gemessenen Messpunkten und deren statistische Messunsicherheiten (Gewichtung) wiederholt.

Sollte ein Messpunkt mit großen Abweichungen auch nach Wiederholungsmessungen außerhalb des nun genauer bestimmten statistischen Unsicherheitsbereichs liegen, sind die folgenden Überlegungen anzustellen:

1. Sind grobe Messfehler unterlaufen?
2. Handelt es sich bei den großen Abweichungen um bislang nicht beachtete systematische Abweichungen?
3. Ist die Annahme des linearen Verlaufs gerechtfertigt (andere Physik)?

Messpunkte, die trotz Wiederholungsmessung unerwartet große Abweichungen zeigen, sind als Ausreißer kenntlich zu machen. Es ist zu überlegen, ob diese im Rahmen eines erweiterten Modells in die Auswertung einbezogen werden können oder von der Auswertung ausgeschlossen werden müssen. In der Diskussion ist zu begründen, warum bestimmte Messwerte nicht in die Auswertung einbezogen wurden.

Zur Beurteilung, ob eine bestimmte Anzahl von Messwerten außerhalb des 2σ Bereichs mit hoher Wahrscheinlichkeit zu erwarten sind, sind die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten in folgender Tabelle (Tab. 3.1) dargestellt.

3.1. GRAFISCHER AUSGLEICH MITTELS LINEARER FUNKTIONEN

Gesamtzahl der Messwerte	Anzahl der Messwerte außerhalb 2σ				
	0	1	2	3	4
1	0,95000	0,05000			
2	0,90250	0,09500	0,00250		
3	0,85738	0,13538	0,00713	0,00013	
4	0,81451	0,17148	0,01354	0,00048	0,00001
5	0,77378	0,20363	0,02143	0,00113	0,00003
6	0,73509	0,23213	0,03054	0,00214	0,00008
7	0,69834	0,25728	0,04062	0,00356	0,00019
8	0,66342	0,27933	0,05146	0,00542	0,00036
9	0,63025	0,29854	0,06285	0,00772	0,00061
10	0,59874	0,31512	0,07463	0,01048	0,00096
11	0,56880	0,32931	0,08666	0,01368	0,00144
12	0,54036	0,34128	0,09879	0,01733	0,00205
13	0,51334	0,35123	0,11092	0,02140	0,00282
15	0,46329	0,36576	0,13475	0,03073	0,00485
17	0,41812	0,37411	0,15752	0,04145	0,00764
20	0,35849	0,37735	0,18868	0,05958	0,01333
30	0,21464	0,33890	0,25864	0,12705	0,04514
50	0,07694	0,20249	0,26110	0,21987	0,13598
100	0,00592	0,03116	0,08118	0,13958	0,17814

Tabelle 3.1: Wahrscheinlichkeiten (Binomialverteilung), dass eine bestimmte Anzahl von Messpunkten außerhalb von 2σ liegt.

3.1.2 Grafische Ermittlung der systematischen Messunsicherheiten

Zur Bestimmung der systematischen Messunsicherheiten geht man von der ermittelten Ausgleichsgerade f aus und konstruiert gemäß der Herstellerangaben ($1/\sqrt{3}$ nicht vergessen!) einen Unsicherheitsschlauch (Abb. 3.4). Im Grundpraktikum gehen wir davon aus, dass die systematischen Abweichungen höchstens linear von der Ausgleichsgerade abweichen. Daher genügt es, die beiden äußeren Messpunkte (x_1, y_1) und (x_n, y_n) für die Bestimmung der Stützpunkte $P_{1\pm}$ und $P_{n\pm}$ des linearen Unsicherheitsschlauchs mithilfe der jeweiligen systematischen Messunsicherheiten zu betrachten. Um eine Unterabschätzung zu vermeiden, sollte zwischen positivem und negativem Anstieg der Ausgleichsgerade wie folgt unterschieden werden (siehe Abb. 3.4):

- positiver Anstieg der Ausgleichsgerade:

$$\begin{aligned}
 P_{1\pm} &= (x_1 \mp \Delta x_{\text{syst},1}, f(x_1) \pm \Delta y_{\text{syst},1}) \\
 P_{n\pm} &= (x_n \mp \Delta x_{\text{syst},n}, f(x_n) \pm \Delta y_{\text{syst},n})
 \end{aligned}$$

- negativer Anstieg der Ausgleichsgerade:

$$\begin{aligned}P_{1\pm} &= (x_1 \pm \Delta x_{\text{sys},1}, f(x_1) \pm \Delta y_{\text{sys},1}) \\P_{n\pm} &= (x_n \pm \Delta x_{\text{sys},n}, f(x_n) \pm \Delta y_{\text{sys},n}).\end{aligned}$$

Die Ermittlung der systematischen Messunsicherheiten der Regressionsparameter erfolgt wieder anhand von Geraden mit maximal und minimal möglichen Anstiegen. Hierbei unterscheiden wir zwischen verschiedenen Annahmen zur Korrelation. Die entsprechenden Geraden verlaufen durch die folgenden Punkte

- vollständige Korrelation: $P_{1,+}$ und $P_{n,+}$ bzw. $P_{1,-}$ und $P_{n,-}$ (grün gestrichelt in Abb. 3.4)
- unkorreliert: $P_{1,+}$ und $P_{n,-}$ bzw. $P_{1,-}$ und $P_{n,+}$ (blau gepunktet in Abb. 3.4)
- korreliert in unbekannter Weise: $P_{1,+}$ und $P_{n,-}$ bzw. $P_{1,-}$ und $P_{n,+}$ (blau gepunktet in Abb. 3.4)

Aus den entsprechenden Geraden ergeben sich die systematischen Messunsicherheiten wie folgt:

$$\begin{aligned}\Delta a_{\text{sys}} &\approx \frac{1}{2}|a_{\text{max}} - a_{\text{min}}| \\ \Delta b_{\text{sys}} &\approx \frac{1}{2}(b_{\text{max}} - b_{\text{min}}).\end{aligned}$$

3.1. GRAFISCHER AUSGLEICH MITTELS LINEARER FUNKTIONEN

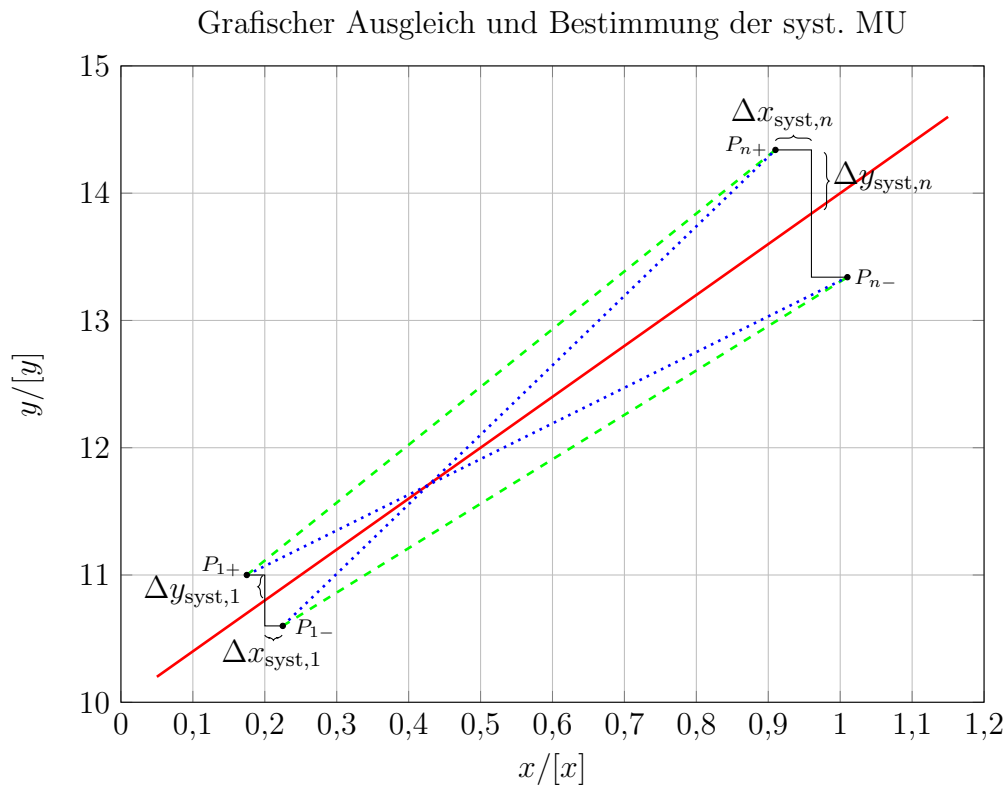


Abbildung 3.4: Ermittlung der systematischen Messunsicherheiten: Konstruktion des Unsicherheitsschlauches (gestrichelt) ausgehend von der Ausgleichsgeraden (rot) - beispielhaft für den Fall, dass die systematischen Messunsicherheiten mit wachsendem x linear ansteigen (z.B. Herstellerangaben für Spannungsmessung mit einem Voltmeter). Die gepunkteten Linien entsprechen den Geraden mit maximal und minimal möglichen Anstiegen für unkorrelierte oder in unbekannter Weise korrelierte Messwerte. Die Grenzgeraden (grün gestrichelt) sind im vollständig korrelierten Fall zu verwenden.

3.1.3 Vereinfachungen im Nebenfach

Der grafische Ausgleich erfolgt für die Studiengänge mit Physik im Nebenfach in vereinfachter Weise. So wie bei der Fortpflanzung von Messunsicherheiten, wird auch im Fall des linearen Ausgleichs nur die Gesamtunsicherheit bestehend aus einem systematischen und statistischen Anteil betrachtet. Wir gehen von einer Messreihe bestehend aus n Messwerten der Messgrößen x und y mit deren Gesamtunsicherheiten Δx und Δy aus:

x	Δx	y	Δy
x_1	Δx_1	y_1	Δy_1
x_2	Δx_2	y_2	Δy_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n	Δx_n	y_n	Δy_n

Die jeweiligen Messunsicherheiten beziehen sich auf einen Vertrauensbereich von 2σ und ergeben sich jeweils aus der Summe von statistischer und systematischer Messunsicherheit:

$$\Delta x_i = \Delta x_{\text{stat},i} + \Delta x_{\text{syst},i} \quad \text{bzw.} \quad \Delta y_i = \Delta y_{\text{stat},i} + \Delta y_{\text{syst},i} \quad \text{mit} \quad i = [1, \dots, n].$$

Die jeweiligen Gesamtunsicherheiten in x - und y -Richtung sind als Fehlerbalken darzustellen. Die weiteren Schritte des grafischen Ausgleichs erfolgen analog zu den Ausführungen für die Physik-Studiengänge.

Grafische Ermittlung der Gesamtmessunsicherheiten

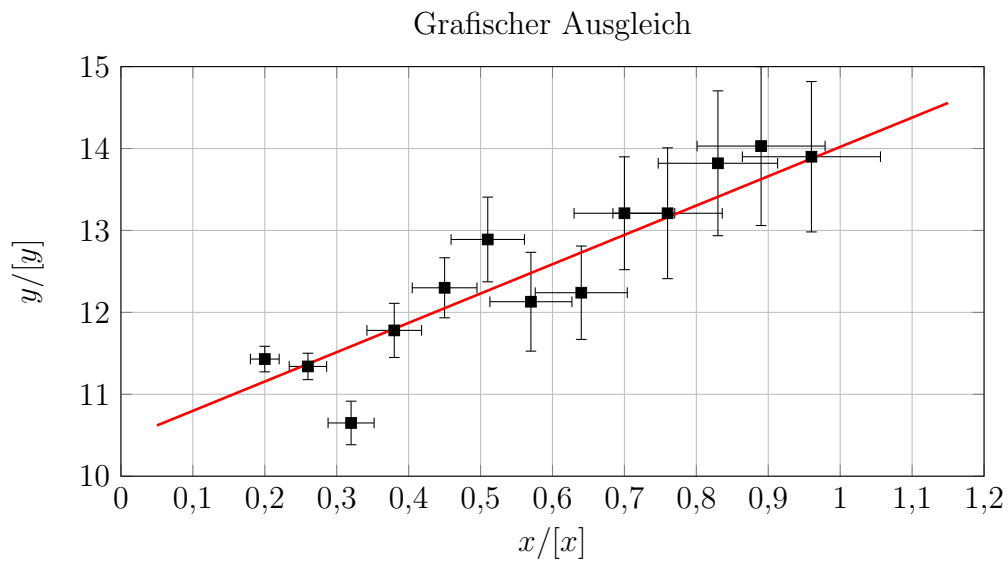
Die Unsicherheiten des Anstieges b und des Absolutgliedes a ergeben sich aus der Abweichung der Messpunkte von der Ausgleichsgerade. Das Vorgehen besteht nun darin, den Streubereich in Form eines Unsicherheitsschlauchs, der die Ausgleichsgerade umgibt, zu bestimmen und darin Geraden mit maximal und minimal möglichen Anstiegen (b_{max} , b_{min}) einzupassen sowie die zugehörigen Absolutglieder (a_{max} , a_{min}) zu bestimmen. Die Gesamtmessunsicherheiten für die Parameter der Ausgleichsgerade ergeben sich näherungsweise wie folgt:

$$\Delta a \approx \frac{|a_{\text{max}} - a_{\text{min}}|}{2}$$

$$\Delta b \approx \frac{b_{\text{max}} - b_{\text{min}}}{2}.$$

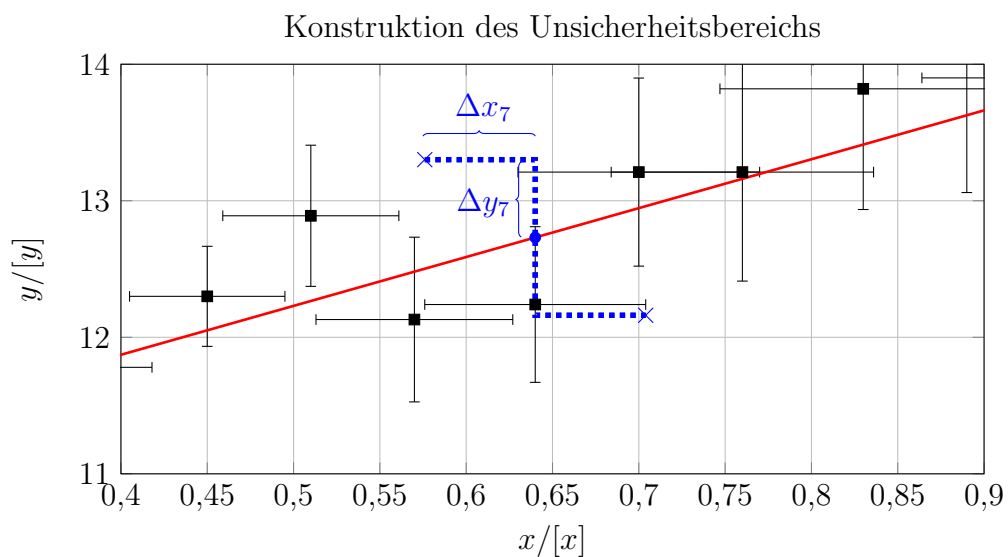
Ist die Messunsicherheit in jedem Messpunkt bekannt, kann i.d.R. die Konstruktion des Unsicherheitsschlauchs durchgeführt werden. Dies ist im Folgenden schrittweise dargestellt: Für jeden Messpunkt trägt man ausgehend von der Ausgleichsgerade im Abstand von einer Fehlerbalkenlänge den oberen und unteren Stützpunkt (blaue Kreuze) auf und gleicht mögliche Variationen, die sich aus der Schätzung der Unsicherheiten ergeben können, durch Geraden aus (gestrichelt). Analog zu den obigen Fällen können nun Geraden des maximalen und minimalen Anstieges in den Unsicherheitsbereich eingepasst werden (siehe unten).

Schritt 1: Durchführen des Geradenausgleichs

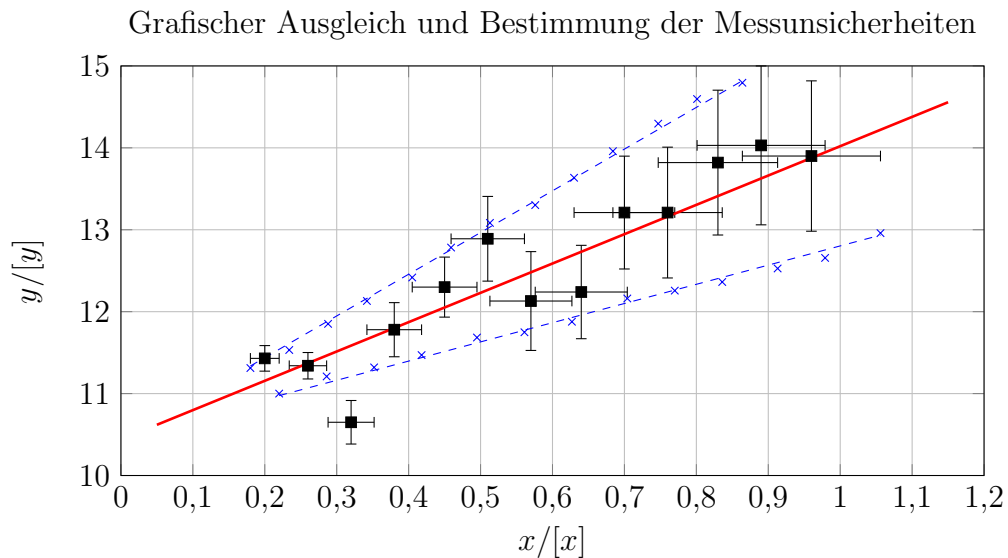


Schritt 2: Konstruktion des Unsicherheits Schlauchs

Anhand des 7. Messpunktes (x_7, y_7) ist exemplarisch gezeigt, dass ausgehend von der Ausgleichsgerade (blauer Punkt) in vertikalem Abstand von Δy_7 und in horizontalem Abstand von Δx_7 ein unterer bzw. oberer Stützpunkt symmetrisch aufgetragen wird (blaue Kreuze). Bei negativem Anstieg ist das Vorgehen analog.



Dies wird nun für eine hinreichende Anzahl von Messpunkten durchgeführt (blaue Kreuze) und im oberen sowie unteren Bereich jeweils mit einer Gerade ausgeglichen (blau gestrichelt).



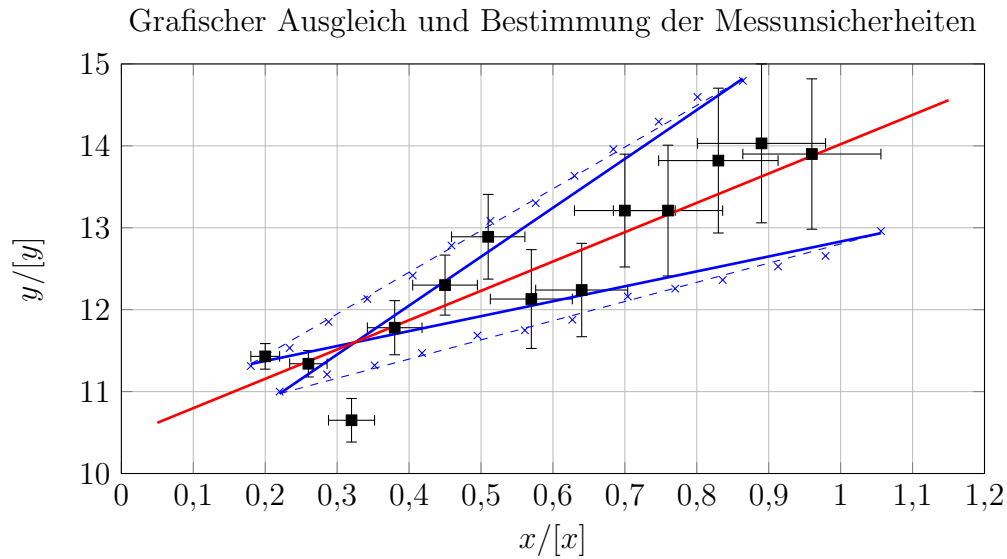
In dem sich ergebenden Unsicherheitsbereich sollten 95% aller Messwerte (ohne Fehlerbalken) liegen. Im vorliegenden Beispiel befindet sich einer von 13 Messwerten außerhalb. Aus Tab. 3.1 ist zu entnehmen, dass dies mit einer Wahrscheinlichkeit von 35,1% statistisch möglich ist. Wahrscheinlicher (51,3%) wäre es jedoch, wenn alle Messwerte in diesem Bereich liegen. Eine Wiederholungsmessung des betreffenden Messpunktes sollte daher eine kleinere Abweichung liefern. Ist dies nicht der Fall, handelt es sich um einen Ausreißer, der als solcher kenntlich gemacht werden muss und nicht in der Auswertung berücksichtigt werden darf. Die genaueren Umstände eines solchen Ausreißers sollten in der Diskussion erklärt werden.

Bestimmung der Maximal- und Minimalgeraden

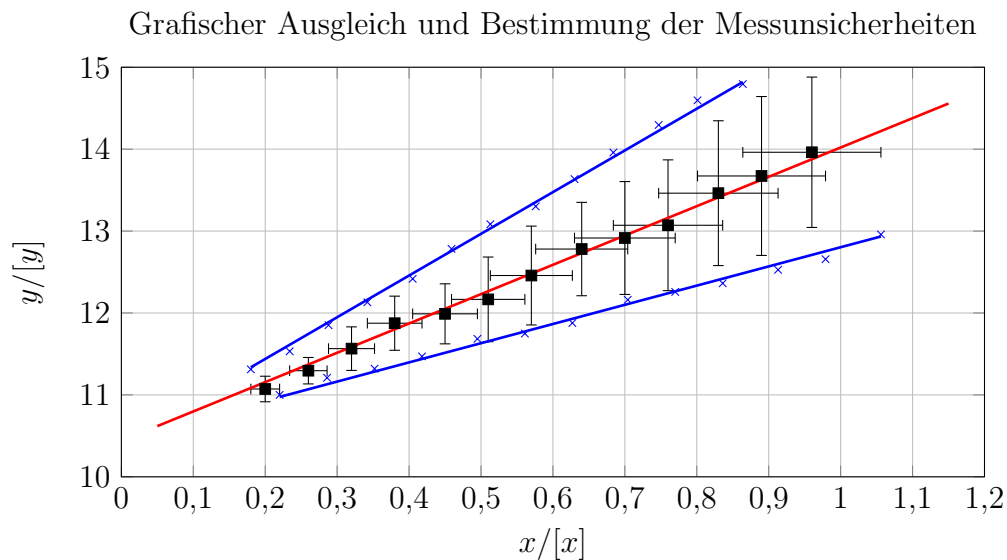
In dem oben konstruierten Unsicherheitsbereich sollen nun die Geraden mit maximal und minimal möglichen Anstiegen eingepasst werden. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Messwerte, die vorwiegend statistisch (regellos) von der Ausgleichsgerade abweichen: Hierbei sind Geraden mit den tatsächlich maximalen und minimalen Anstiegen zu verwenden (blau, durchgezogen).

3.1. GRAFISCHER AUSGLEICH MITTELS LINEARER FUNKTIONEN



2. Bei eher systematisch dominierten Gesamtmessabweichungen ist eine regellose Streuung um die Ausgleichsgerade i.d.R. nicht erkennbar. In diesem Fall sind die den Unsicherheitsbereich begrenzenden Geraden zu verwenden (blau, durchgezogen).



Sollte nicht offensichtlich sein, ob statistische oder systematische Abweichungen überwiegen, ist grundsätzlich der erste Fall anzuwenden.

3.2 Rechnerischer Ausgleich mittels linearer Funktionen

- Wir nehmen im Rahmen des Grundpraktikums an, dass die Messunsicherheiten der Messwerte x_i vernachlässigbar klein sind. Sollte das nicht der Fall sein, muss das entsprechend protokolliert (Fehlerbalken in der grafischen Darstellung) werden.
- Weiterhin nehmen wir an, dass die statistische Streuung der Messwerte Gaußverteilungen unterliegen jeweils mit den gegebenen zufälligen Messabweichungen als entsprechende Standardabweichungen.
- In Einzelfällen kann angenommen werden, dass die Standardabweichung in jedem Punkt identisch und damit direkt aus der vorliegenden Messreihe bestimmbar ist.
- Nach Bestimmung der Parameter und deren statistische Messabweichungen werden die systematischen Abweichungen unter Berücksichtigung möglicher Korrelationen ermittelt.

3.2.1 Ausgleichsrechnung unter vereinfachenden Annahmen

Wir betrachten eine Messreihe bestehend aus n Messwertepaaren der folgenden Art:

x	y	Δy_{stat}
x_1	y_1	Δy_1
x_2	y_2	Δy_2
\vdots	\vdots	\vdots
x_n	y_n	Δy_n

Weiterhin zeige eine grafische Darstellung, dass ein linearer Zusammenhang zwischen den Messgrößen x und y besteht, wodurch die Wahl der Funktion $y = a + bx$ zur Anpassung zweckmäßig ist.

Unter der Annahme, dass die gemessenen y -Werte Stichproben aus Verteilungen mit gleichen Standardabweichungen repräsentieren - also jeweils dieselben statistischen Messunsicherheiten aufweisen, lassen sich die Parameter für Absolutglied a und Anstieg b durch Minimierung der folgenden Funktion f ermitteln:

$$f = \sum_{i=1}^n (y_i - (bx_i + a))^2 \rightarrow \min. \quad (3.2)$$

Da die Annahme gleicher statistischer Messunsicherheiten in der Regel z.B. aufgrund von Linearisierung nicht erfüllt ist, müssen die einzelnen Beiträge zu obiger Summe gewichtet

3.2. RECHNERISCHER AUSGLEICH MITTELS LINEARER FUNKTIONEN

werden, so dass Messwerte mit größerer Unsicherheit mit kleinerem Gewicht eingehen. Dies erfolgt mit den Standardabweichungen Δy_i

$$f = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - (bx_i + a))^2}{\Delta y_i^2} \rightarrow \min. \quad (3.3)$$

Mit den Gewichten $w_i = \frac{1}{\Delta y_i^2}$ führt das Nullsetzen der entsprechenden partiellen Ableitungen auf ein lineares Gleichungssystem:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -2 \left(\sum_i w_i y_i - b \sum_i w_i x_i - a \cdot \sum_i w_i \right) = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -2 \left(\sum_i w_i x_i y_i - b \sum_i w_i x_i^2 - a \cdot \sum_i w_i x_i \right) = 0. \quad (3.5)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt Bestimmungsgleichungen für die Parameter:

$$b = \frac{\sum_k w_k \sum_i w_i x_i y_i - \sum_i w_i x_i \sum_j w_j y_j}{\sum_k w_k \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i w_i x_i)^2} \quad (3.6)$$

$$a = \frac{\sum_i w_i y_i \sum_j w_j x_j^2 - \sum_i w_i x_i \sum_j w_j x_j y_j}{\sum_k w_k \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i w_i x_i)^2}. \quad (3.7)$$

Mit den folgenden Konventionen lässt sich eine übersichtlichere Form finden:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sum_i^n w_i & C_1 &= \sum_i^n w_i y_i \\ A_{12} &= \sum_i^n w_i x_i & C_2 &= \sum_i^n w_i y_i x_i \\ A_{22} &= \sum_i^n w_i x_i^2 & D &= A_{11} A_{22} - A_{12}^2 \end{aligned}$$

$$b = \frac{1}{D} (C_2 A_{11} - C_1 A_{12}) \quad (3.8)$$

$$a = \frac{1}{D} (C_1 A_{22} - C_2 A_{12}) \quad (3.9)$$

Anhand dieser beiden Gleichungen erfolgt die Schätzung des Anstieges b und des Absolutgliedes a . Die entsprechenden Summen können mittels Tabellenkalkulation berechnet werden. Wie berechnet man nun die zufälligen und systematischen Messunsicherheiten dieser Parameter?

3.2.2 Berechnung von zufälligen Messunsicherheiten der Regressionsparameter

Für die Berechnung der zufälligen Messunsicherheiten müssen wir aus Gründen der Praktikabilität in den Grundpraktika vereinfachende Annahmen treffen:

1. Messunsicherheiten nur in y -Richtung tragen bei
2. Messunsicherheiten sind unkorreliert

Damit lässt sich die allgemeine Fortpflanzungsformel

$$(\Delta F(y_1, \dots, y_n))^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2 + \sum_{i \neq j}^n \frac{\partial F}{\partial y_i} \frac{\partial F}{\partial y_j} \text{cov}(y_i, y_j) \quad (3.10)$$

umschreiben als:

$$(\Delta F(y_1, \dots, y_n))^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2. \quad (3.11)$$

Bemerkung: Die Fehlerfortpflanzung gilt zunächst nur als lineare Näherung. Da die Regressionsparameter hier nur linear von den y -Messwerten abhängen, gilt die Fehlerfortpflanzung in diesem Fall sogar exakt.

Die Abweichungen der y -Werte von der Ausgleichsgeraden werden als zufällig angenommen und die Standardabweichung der jeweiligen Verteilungen als bekannt vorausgesetzt. Nun wenden wir die Fortpflanzungsformel (Gl. 3.11) auf die Bestimmungsgleichung für den Anstieg b (Gl. 3.6) an ($F = b$). Mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{w_i x_i \sum_k w_k - w_i \sum_j w_j x_j}{\sum_k w_k \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i w_i x_i)^2} = \frac{1}{D} (A_{11} w_i x_i - A_{12} w_i) \quad (3.12)$$

ergibt sich für das Quadrat von Δb

$$\begin{aligned}
 \Delta b^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial b}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{D^2} (A_{11} w_i x_i - A_{12} w_i)^2 \frac{1}{w_i} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{D^2} (A_{11}^2 w_i x_i^2 - 2A_{11} A_{12} w_i x_i + A_{12}^2 w_i) \\
 &= \frac{1}{D^2} (A_{11}^2 A_{22} - 2A_{11} A_{12}^2 + A_{12}^2 A_{11}) \\
 &= \frac{1}{D^2} A_{11} \underbrace{(A_{11} A_{22} - A_{12}^2)}_{=D} \\
 &= \underline{\underline{\frac{A_{11}}{D}}}. \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

Als nächsten Schritt wenden wir die Fortpflanzungsformel (Gl. 3.11) auf die Bestimmungsgleichung für das Absolutglied a (Gl. 3.7) an ($F = a$). Mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial a}{\partial y_i} = \frac{w_i \sum_j w_j x_j^2 - w_i x_i \sum_j w_j x_j}{\sum_k w_k \sum_i w_i x_i^2 - (\sum_i w_i x_i)^2} = \frac{1}{D} (A_{22} w_i - A_{12} w_i x_i) \tag{3.14}$$

ergibt sich für das Quadrat von Δa

$$\begin{aligned}
 \Delta a^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a}{\partial y_i} \right)^2 \Delta y_i^2 \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{D^2} (A_{22} w_i - A_{12} w_i x_i)^2 \frac{1}{w_i} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{D^2} (A_{22}^2 w_i - 2A_{22} A_{12} w_i x_i + A_{12}^2 w_i x_i^2) \\
 &= \frac{1}{D^2} (A_{22}^2 A_{11} - 2A_{22} A_{12}^2 + A_{12}^2 A_{22}) \\
 &= \frac{1}{D^2} A_{22} \underbrace{(A_{11} A_{22} - A_{12}^2)}_{=D} \\
 &= \underline{\underline{\frac{A_{22}}{D}}}. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

Zusammenfassend ergeben sich die folgenden Formeln der Messabweichungen für b und a , welche im Praktikum für die Behandlung von zufälligen Messunsicherheiten im Rahmen der Linearen Regression Anwendung finden sollen:

$$\Delta b_{\text{stat}} = \sqrt{\frac{A_{11}}{D}} = \sqrt{\frac{\sum_i^n w_i}{\sum_i^n w_i \sum_k^n w_k x_k^2 - (\sum_i^n w_i x_i)^2}} \quad (3.16)$$

$$\Delta a_{\text{stat}} = \sqrt{\frac{A_{22}}{D}} = \sqrt{\frac{\sum_i^n w_i x_i^2}{\sum_i^n w_i \sum_k^n w_k x_k^2 - (\sum_i^n w_i x_i)^2}} \quad (3.17)$$

Für die Bestimmung der Messunsicherheiten müssen also lediglich die Ausdrücke A_{11} , A_{22} und D (Determinante) berechnet werden.

Wichtige Bemerkung: Die stat. Unsicherheiten von a und b sind korreliert, was bei weiterführenden Berechnungen berücksichtigt werden muss. Der entsprechende Ausdruck für die Kovarianz lässt sich im Rahmen der χ^2 -Methode bestimmen und lautet

$$\text{cov}(a, b) = -\frac{A_{12}}{D}. \quad (3.18)$$

Offensichtlich zeigt sich für positive Anstiege im ersten Quadranten ein entgegengesetzt korreliertes Verhalten.

Problem bei widersprüchlichen Daten

Anhand der in Abb. 3.3 dargestellten Messpunkte soll im Weiteren auf ein Problem des rechnerischen Ausgleichs hingewiesen werden. Als Grundannahme wurde vorausgesetzt, dass es sich um Gauß-verteilte Zufallsvariablen handelt, die mit den entsprechenden Standardabweichungen ($\sigma_i = \Delta y_i$) bezüglich der Ausgleichsgeraden streuen. In der linken Darstellung von Abb. 3.5 ist dies mit hoher Wahrscheinlichkeit erfüllt, da 6 von 6 Messwerten innerhalb des 2σ -Bereichs liegen (nach Tab. 3.1 mit 73,5%) und die statistischen Messunsicherheiten (blau gestrichelt) sind somit plausibel. Insofern sind die tatsächlichen Abweichungen der Messdaten konsistent zur den Fehlerbalken.

3.2. RECHNERISCHER AUSGLEICH MITTELS LINEARER FUNKTIONEN

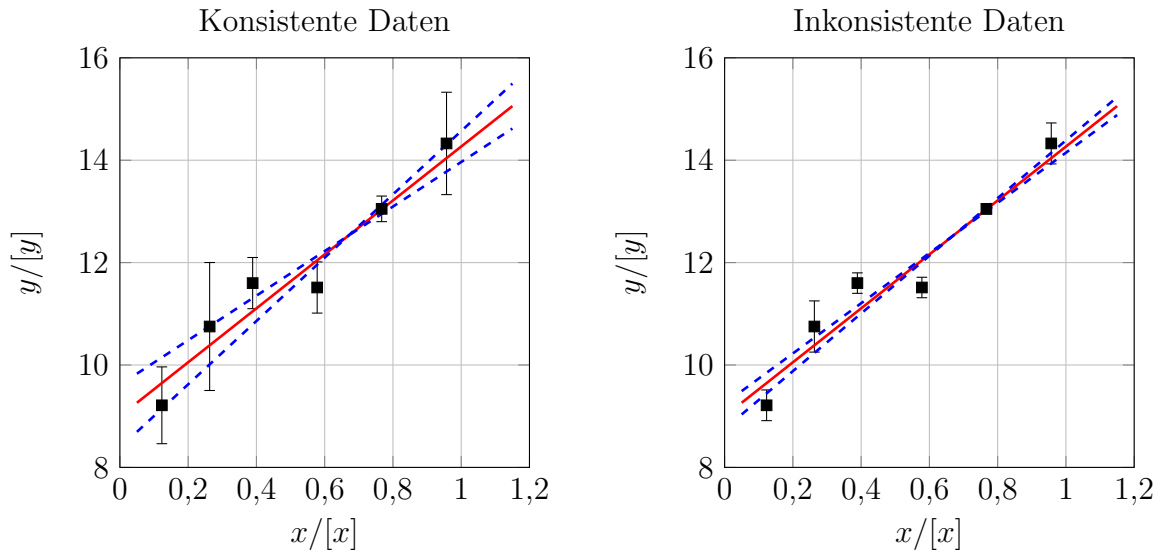


Abbildung 3.5: Lineare Regression (rechnerisch) mit identischen Messwerten aber unterschiedlichen Messunsicherheiten: Fall 1 (links): Konsistente Daten (alle Messwerte innerhalb 2σ) liefern realistische Maximal- und Minimal-Geraden (gestrichelt). Fall 2 (rechts): Inkonsistente Daten liefern zu geringerfügig abweichende Maximal und Minimalgeraden.

In der rechten Darstellung sind die Fehlerbalken aus didaktischen Gründen herunter skaliert, sodass 2 von 6 Messwerten außerhalb von 2σ liegen. Hier trifft dies nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit von 3,1% zu. Obwohl die Ausgleichsgerade unter Verwendung der entsprechenden Gewichtung möglicherweise richtig berechnet wurde, ist die Berechnung der Messunsicherheit in diesem Fall zweifelhaft. Der Widerspruch ergibt sich daraus, dass die relativ großen Abweichungen bezüglich der Ausgleichsgeraden im Missverhältnis zu den Fehlerbalken stehen. Daher sind in diesem Fall obige Maßnahmen zum Umgang mit großen Messabweichungen zu ergreifen. Hier sind die tatsächlichen Abweichungen der Messdaten mit hoher Wahrscheinlichkeit inkonsistent zur den Fehlerbalken.

Die folgenden Regressionsparameter wurden ermittelt:

Konsistent:

$$b = 5,268 \pm 0,916$$

$$a = 8,999 \pm 0,614$$

Inkonsistent:

$$b = 5,268 \pm 0,366$$

$$a = 8,999 \pm 0,246$$

Sowohl Anstieg als auch Absolutglied stimmen überein. Die Messunsicherheiten für die inkonsistenten Daten sind kleiner, obwohl die tatsächlichen Abweichungen signifikanter als im konsistenten Fall sind.

Annahme: Konstante aber unbekannte Messunsicherheiten in y-Richtung

Nicht selten kommt es vor, dass die zufälligen Messunsicherheiten für alle Messwertepaare gleich sind, wenn es sich beispielsweise um das Ablesen von Skalen oder Reaktionszeiten handelt. Zusammengefasst gehen wir nun von den folgenden Annahmen aus:

1. Messunsicherheiten nur in y -Richtung tragen bei
2. Messunsicherheiten sind unkorreliert
3. Messunsicherheiten sind konstant $\Delta y_i = \Delta y = s$.

In diesem Fall lässt sich die gemeinsame Abweichung der y -Werte zur Ausgleichsgeraden statistisch erfassen (vgl. Fall 1 im grafischen Ausgleich):

$$s = \Delta y_i = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i))^2}.$$

Es handelt sich hier um eine modifizierte Standardabweichung bezogen auf eine Einzelmessung. Die 2 im Nenner deutet auf den Umstand hin, dass wir durch die Berechnung der Parameter a und b zwei Freiheitsgrade verlieren. Anders ausgedrückt: Durch zwei Messwertepaare ist eine Gerade eindeutig festgelegt, so dass es zu keiner Abweichung kommen kann. Für die Berechnung der Standardabweichung sind Anstieg und Absolutglied erforderlich:

$$b = \frac{1}{D} (C_2 A_{11} - C_1 A_{12}) \tag{3.19}$$

$$a = \frac{1}{D} (C_1 A_{22} - C_2 A_{12}) \tag{3.20}$$

Nach entsprechender Fehlerfortpflanzung ergibt sich:

$$\Delta b_{\text{stat}} = \sqrt{\frac{A_{11}}{D}} = s \cdot \sqrt{\frac{n}{n \sum_k x_k^2 - (\sum_i x_i)^2}} \tag{3.21}$$

$$\Delta a_{\text{stat}} = \sqrt{\frac{A_{22}}{D}} = s \cdot \sqrt{\frac{\sum_i x_i^2}{n \sum_k x_k^2 - (\sum_i x_i)^2}} \tag{3.22}$$

Für den Fall, dass x mit konstanter Schrittweite aufgenommen wurde ($x_k = k \cdot x_1$ mit $k = 1, \dots, n$), vereinfachen sich die Ausdrücke weiter:

$$\Delta b_{\text{stat}} = s \cdot \sqrt{\frac{12}{x_1^2 \cdot n(n^2 - 1)}} \quad (3.23)$$

$$\Delta a_{\text{stat}} = s \cdot \sqrt{\frac{2(2n + 1)}{n(n - 1)}} \quad (3.24)$$

Für $x_1 = 1$ ist x eine reine Zählgröße.

3.2.3 Berechnung von systematischen Messunsicherheiten der Regressionsparameter

Die Berechnung der systematischen Messunsicherheiten erfolgt nach dem Vorgehen in Abb. 3.4. Nehmen wir an, dass der systematische Unsicherheitsschlauch durch die Punkte $P_{1,+}$, $P_{1,-}$ und $P_{n,+}$, $P_{n,-}$ definiert ist. Weiterhin unterscheiden wir auch hier zwischen dem vollständig korrelierten Fall und dem unkorrelierten bzw. unbekannt korrelierten Fall. Die Betrachtungen erfolgen für einen positiven Anstieg. Negative Anstiege werden analog behandelt. Die Funktion f beschreibe die Ausgleichsgerade.

Für die Unsicherheit des Anstiegs folgt:

- vollständig korreliert (grün gestrichelt in Abb. 3.4):

$$b_{\text{max}} = \frac{y_{n,+} - y_{1,+}}{x_{n,-} - x_{1,-}} = \frac{f(x_n) - f(x_1) + (\Delta y_{n,\text{syst}} - \Delta y_{1,\text{syst}})}{x_n - x_1 - (\Delta x_{n,\text{syst}} - \Delta x_{1,\text{syst}})}$$

$$b_{\text{min}} = \frac{y_{n,-} - y_{1,-}}{x_{n,+} - x_{1,+}} = \frac{f(x_n) - f(x_1) - (\Delta y_{n,\text{syst}} - \Delta y_{1,\text{syst}})}{x_n - x_1 + (\Delta x_{n,\text{syst}} - \Delta x_{1,\text{syst}})}$$

Hier erkennen wir, dass die Anstiege b_{max} und b_{min} äquivalent sind, wenn die systematischen Messunsicherheiten für alle Messpunkte gleich sind und die Annahme der vollständigen Korrelation gilt.

- unkorreliert / unbekannt korreliert (blau gepunktet in Abb. 3.4):

$$b_{\text{max}} = \frac{y_{n,+} - y_{1,-}}{x_{n,-} - x_{1,+}} = \frac{f(x_n) - f(x_1) + (\Delta y_{n,\text{syst}} + \Delta y_{1,\text{syst}})}{x_n - x_1 - (\Delta x_{n,\text{syst}} + \Delta x_{1,\text{syst}})}$$

$$b_{\text{min}} = \frac{y_{n,-} - y_{1,+}}{x_{n,+} - x_{1,-}} = \frac{f(x_n) - f(x_1) - (\Delta y_{n,\text{syst}} + \Delta y_{1,\text{syst}})}{x_n - x_1 + (\Delta x_{n,\text{syst}} + \Delta x_{1,\text{syst}})}$$

Die systematische Messunsicherheit des Anstiegs ergibt sich somit durch:

$$\Delta b_{\text{syst}} = \frac{1}{2}(b_{\text{max}} - b_{\text{min}}).$$

Das Absolutglied berechnet sich durch:

$$a = y_1 - bx_1.$$

Für die Unsicherheit des Absolutgliedes folgt:

- vollständig korreliert:

$$\begin{aligned} a_{\text{max}} &= f(x_1) + \Delta y_{1,\text{syst}} - b_{\text{max}}(x_1 - \Delta x_{1,\text{syst}}) \\ a_{\text{min}} &= f(x_1) - \Delta y_{1,\text{syst}} - b_{\text{min}}(x_1 + \Delta x_{1,\text{syst}}). \end{aligned}$$

Mit b_{max} und b_{min} für $\rho = 1$ ergibt sich für die systematische Unsicherheit:

$$\Delta a_{\text{syst},\rho=1} = \frac{1}{2}|a_{\text{max}} - a_{\text{min}}| = \left| \Delta y_{1,\text{syst}} + \left(\frac{b_{\text{max}} + b_{\text{min}}}{2} \right) \Delta x_{1,\text{syst}} - \Delta b_{\text{syst}} x_1 \right|.$$

- $\rho \neq 1$:

$$\begin{aligned} a_{\text{max}} &= f(x_1) - \Delta y_{1,\text{syst}} - b_{\text{max}}(x_1 + \Delta x_{1,\text{syst}}) \\ a_{\text{min}} &= f(x_1) + \Delta y_{1,\text{syst}} - b_{\text{min}}(x_1 - \Delta x_{1,\text{syst}}) \end{aligned}$$

Mit b_{max} und b_{min} für $\rho \neq 1$ folgt für die systematische Unsicherheit:

$$\Delta a_{\text{syst},\rho \neq 1} = \frac{1}{2}|a_{\text{max}} - a_{\text{min}}| = \left| \Delta y_{1,\text{syst}} + \left(\frac{b_{\text{max}} + b_{\text{min}}}{2} \right) \Delta x_{1,\text{syst}} + \Delta b_{\text{syst}} x_1 \right|.$$

3.3 Die χ^2 -Methode zur allgemeinen Kurvenanpassung

Die Formeln für den rechnerischen Geradenausgleich in Abschn. 3.2 basieren auf der Minimierung einer Funktion, die im Folgenden als χ^2 bezeichnet wird, die die gewogenen quadrierten Abweichungen der Messwerte y_i zur einer allgemeinen Zielfunktion $f(x_i; a)$ beschreibt, welche durch einen Satz von Parametern $a = [a_1, \dots, a_M]$ bestimmt wird. Im Falle des Geradenausgleichs besteht dieser Satz aus zwei Parametern. Wir betrachten den folgenden experimentellen Datensatz:

x	Δx_{stat}	y	Δy_{stat}
x_1	$\Delta x_{\text{stat},1}$	y_1	$\Delta y_{\text{stat},1}$
x_2	$\Delta x_{\text{stat},2}$	y_2	$\Delta y_{\text{stat},2}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_N	$\Delta x_{\text{stat},N}$	y_N	$\Delta y_{\text{stat},N}$

Wir gehen von den folgenden Grundannahmen aus:

- Die Messwerte y_i mit $i \in [1, \dots, N]$ sind gaußverteilte Zufallsvariablen mit den Erwartungswerten $\mathcal{E}[y_i] = f(x_i, a)$ und den Standardabweichungen $\sigma_i = \Delta y_{\text{stat},i}$.
- Die stat. Messunsicherheiten sind unkorreliert $\text{cov}(y_i, y_j) = \delta_{ij} \sigma_i^2$.
- Die stat. Messunsicherheiten der unabhängigen Variable sind nicht relevant, d.h. $\Delta y \gg f'(x, a) \Delta x$.

Unter diesen Annahmen lautet die zu minimierende Funktion:

$$\chi^2 = \sum_i^N \left(\frac{y_i - f(x_i; a)}{\sigma_i} \right)^2.$$

Die optimalen Parameter a erhalten wir durch:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a_i} = 0 \quad \forall i \in [1, \dots, N].$$

Ist die Zielfunktion f linear in den Anpassungsparametern a so führt das Nullsetzen aller partiellen Ableitungen von χ^2 auf ein lineares Gleichungssystem, das bei einer genügend großen Anzahl von Messwerten im Prinzip durch Inversion der Koeffizienten Matrix gelöst wird. Ist die Funktion nicht-linear in den Anpassungsparametern, bleibt nur, die Funktion zu linearisieren oder auf numerische Methoden zurückzugreifen.

Die Bestimmung der Kovarianz der Anpassungsparameter erfolgt mithilfe der inversen Hesse-Matrix von χ^2 in der folgenden Weise:

$$\text{cov}(a_k, a_l) = 2 \cdot \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_1^2} & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_1 \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_1 \partial a_M} \\ \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_1 \partial a_2} & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_2 \partial a_M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_M \partial a_1} & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_M \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial a_M^2} \end{array} \right)_{k,l}^{-1}$$

Ist die Zielfunktion f linear in den Anpassungsparametern, so ist die Hesse-Matrix von χ^2 äquivalent zur Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems, wodurch die Bestimmung der Unsicherheiten keine zusätzlichen Rechenschritte bedarf.

Der Konfidenzbereich der Ausgleichskurve bestimmt sich durch Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{k,l} \text{cov}(a_k, a_l) \frac{\partial f}{\partial a_k} \frac{\partial f}{\partial a_l}}$$

Δy beschreibt die halbe Breite des lokalen 1σ -Konfidenzintervalls bezüglich der Ausgleichskurve und ist analog zur Standardabweichung des Mittelwertes einer Serie von Einzelmessungen zu verstehen.

Zur Beurteilung der Güte der Anpassung wird oft die Größe χ^2 pro Freiheitsgrad betrachtet. Da die Größe χ^2 aus Stichproben gebildet wird, ist diese zwangsläufig statistisch verteilt. Die zugehörige Verteilungsfunktion ist die χ^2 -Verteilung. Von dieser Verteilung sind Erwartungswert \mathcal{E} und Varianz \mathcal{V} bekannt:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\chi^2] &= n \\ \mathcal{V}[\chi^2] &= 2n, \end{aligned}$$

wobei n die Anzahl der Freiheitsgrade beschreibt, welche durch Differenz der Anzahl der Messwerte N und der Anzahl der anzupassenden Parameter M bestimmt: $n = N - M$. Daher erwarten wir im Grenzfall unendlich vieler Stichproben aus derselben Grundgesamtheit, dass

$$\frac{\mathcal{E}[\chi^2]}{\text{Freiheitsgrad}} = \frac{n}{N - M} = 1$$

ist. Der Wert für χ^2 pro Freiheitsgrad einer Stichprobe sollte mit einer (1σ) -Konfidenz im Intervall von

$$\frac{\chi^2}{\text{Freiheitsgrad}} \in \left[1 - \sqrt{\frac{2}{N - M}}, 1 + \sqrt{\frac{2}{N - M}} \right]$$

zu finden sein. Falls dies nicht zutrifft, sind die berechneten statistischen aber auch systematischen Messunsicherheiten der Anpassungsparameter in Zweifel zu ziehen.

3.3. DIE χ^2 -METHODE ZUR ALLGEMEINEN KURVENANPASSUNG

Sollte der Wert für χ^2 pro Freiheitsgrad signifikant größer als 1 sein, so könnte das ein Hinweis auf systematische Unsicherheiten oder auf ein unzureichendes physikalisches Modell sein, was sich darin zeigen kann, dass die Messpunkte eher systematisch von der Ausgleichskurve abweichen. Anhand des systematischen Unsicherheitsbereichs kann in diesem Fall geklärt werden, ob derartige Abweichungen durch die bekannten oder möglicherweise unbekannt systematischen Unsicherheiten zu verstehen sind. Es kann aber auch vorkommen, dass die zufälligen Unsicherheiten der Messpunkte unterschätzt wurden. Hier würde man eher eine zu große regellose Streuung der Messwerte bezüglich der Ausgleichskurve erwarten. In diesem Fall werden die statistischen Unsicherheiten der Anpassungsparameter unterschätzt. Ist der Wert für χ^2 pro Freiheitsgrad signifikant kleiner als eins, könnte die Ursache hingegen in einer Überabschätzung der stat. Messunsicherheiten liegen, die auch eine Überabschätzung der stat. Unsicherheiten der Anpassungsparameter zur Folge hat. Signifikante Abweichungen von χ^2 pro Freiheitsgrad können auch zufallsbedingt sein, jedoch mit geringfügiger Wahrscheinlichkeit.

Im Vergleich verschiedener Modelle kann der minimale Wert für χ^2 pro Freiheitsgrad auf die bessere Anpassung hindeuten. Jedoch sollte dieser Wert hinterfragt werden, da lokale zufällige Schwankungen von Messdaten beispielsweise mit demselben Vorzeichen Modelle begünstigen können, die physikalisch hingegen nicht zu rechtfertigen sind. Im Zweifelsfall müssen Messungen wiederholt bzw. der Messbereich erweitert werden.

Kapitel 4

Anhang

4.1 Gesundheits-, Arbeits- und Brandschutz

In den Laborräumen sind durch aufmerksames und rücksichtsvolles Verhalten Gefährdungen für Personen und Geräte zu vermeiden. Rauchen sowie die Einnahme von Speisen oder Getränken sind nicht statthaft. Die experimentellen Arbeiten sind entsprechend den vom Betreuungspersonal ausgegebenen Weisungen auszuführen. Verletzungen, Brände, Beschädigungen des Versuchsinventars u.ä.m. sind dem betreuenden Personal unverzüglich anzuzeigen.

Exemplarisch soll auf folgende mögliche Gefahrenquellen hingewiesen werden:

Brände: Brennbare Gegenstände und Flüssigkeiten dürfen nicht in der Nähe offener Flammen oder Heizkörper abgelegt werden. Über den Ausbruch eines Brandes sind alle in der Nähe befindlichen, gefährdeten Personen sowie die Feuerwehr umgehend zu informieren. Bis zum Eintreffen der Feuerwehr ist der Brand mit den zur Verfügung stehenden Löschmitteln (Brandschutzdecken, Feuerlöscher – kein Nasslöscher an elektrischen Anlagen) zu bekämpfen. Fenster und Türen sind geschlossen zu halten.

Gesundheitsgefährdende Stoffe:

- **Quecksilber:** Da Quecksilberdämpfe zu Vergiftungserscheinungen führen können, sind freie Quecksilbertropfen schnellstmöglich zu beseitigen.
- **Ätzeffekte (Säuren, Laugen, ...):** Verätzungen der Haut, Schleimhäute oder Augen sind sofort mit Wasser zu spülen, anschließend muss ein Arztbesuch erfolgen.

Elektrische Anlagen, Röntgen- und Laserstrahlen, radioaktive Präparate: Diese Anlagen dürfen nur nach arbeitsplatzspezifischer Einweisung und Abnahme durch den Betreuer in Betrieb genommen werden. Jedwede eigenmächtige Veränderung oder Inbetriebnahme durch den Studenten kann zu Gefährdungen führen und ist deshalb strikt untersagt.

4.1. GESUNDHEITS-, ARBEITS- UND BRANDSCHUTZ

Sonstige Verletzungen: Verletzungen jeder Art wie z.B. Schnittwunden o.ä. sind unbedingt der Praktikumsleitung anzuzeigen und ärztlich behandeln zu lassen.

4.2 Anhang: Angaben zu systematischen Messunsicherheiten ausgewählter Messgeräte

Anhang: Angaben zu systematischen Messunsicherheiten ausgewählter Meßgeräte

Längenmaße mit Teilung

l = gemessene Länge, Δl = Betrag der Unsicherheit

Stahlmaßstäbe:	$\Delta l = 50 \mu\text{m} + 5 \times l \times 10^{-4}$
Bankmaßstäbe, Schulmaßstäbe:	$\Delta l = 200 \mu\text{m} + 5 \times l \times 10^{-4}$
Büromaßstäbe:	$\Delta l = 200 \mu\text{m} + 1 \times l \times 10^{-3}$

Messschieber

l = gemessene Länge, $\Delta l = 50 \mu\text{m} + 5 \times l \times 10^{-4}$

Digitaler Messschieber

Messbereich $l = 0 \dots 200 \text{ mm}$	$\Delta l = 0,03 \text{ mm}$
Messbereich $l > 200 \text{ mm}$	$\Delta l = 0,04 \text{ mm}$

Laser-Entfernungsmesser

Bosch Professional GLM 30 Messbereich $l = 0 \dots 30 \text{ m}$ $\Delta l = 2 \text{ mm}$

Messuhren und Bügelmessschrauben

Tabelle enthält Gesamtunsicherheit für Längendifferenzen Δl in μm

Messbereich	0 mm ... 3 mm	0 mm ... 10 mm	0 mm ... 25 mm
Genauigkeitsgrad I	10	15	22
Genauigkeitsgrad II	15	25	40

Masstabprüfokulare

Messunsicherheit für Längendifferenzen: $\Delta l = 20 \mu\text{m}$

Masstabmessplatten

Messunsicherheit für Längendifferenzen: $\Delta l = 2 \mu\text{m}$

4.2. ANHANG: HERSTELLERANGABEN

Winkelmesser

Skalenwert = 1° , $x = \alpha \times \pi / 180^\circ$ = gemessener Winkel (Bogenmaß), $\Delta\alpha$ = Messunsicherheit

Durchmesser: 100 mm $\Delta\alpha = 10' + 0,1' \times \alpha / 1^\circ$

Durchmesser: 150 mm, 200 mm $\Delta\alpha = 10' + 0,05' \times \alpha / 1^\circ$

Messzylinder

Nicht eichfähig. V_N = Nenninhalt

V_N /ml	10	25	50	100	250	500	1000	2000
ΔV /ml	0,1	0,5	0,5	1	2	5	10	20

Pyknometer

V_i = angegebener Istinhalt, V_N = Nenninhalt

Genauigkeitsklasse A (amtlich geeicht)

V_i /ml	bis 10	über 10 bis 50	über 50
ΔV /ml	0,001	0,002	0,003

Genauigkeitsklasse B

V_N /ml	1	5	10	25	50
ΔV /ml	0,003	0,003	0,005	0,010	0,020

Stoppuhren

t = gemessene Zeit

Halbschwingungsdauer	Dauer eines Zeigerumlaufs	Δt
0,1 s	30 s	$0,2 \text{ s} + 5 \times t \times 10^{-4}$
0,2 s	60 s	$0,4 \text{ s} + 5 \times t \times 10^{-4}$

Digitale Stoppuhren

Wird vom Hersteller keine Unsicherheit angegeben: $\Delta t = 0,01 \text{ s} = 1 \text{ Digit}$

Feinwaagen

Einfache, gleicharmige Balkenwaagen mit Einspielungslage:

E = Empfindlichkeit, m = gemessene Masse, m_m = Höchstbelastung

Δm ist gleich dem jeweils größten der drei Ausdrücke $\Delta_1 m$, $\Delta_2 m$, $\Delta_3 m$:

$$\Delta m = \text{Max}(\Delta_1 m, \Delta_2 m, \Delta_3 m)$$

für alle Belastungen	gilt $\Delta_1 m = 1 \text{ Skt}/E$
für $m_m = \begin{cases} 0 \text{ kg} \dots 0,5 \text{ kg} \\ 0,5 \text{ kg} \dots 1 \text{ kg} \\ 1 \text{ kg} \dots 25 \text{ kg} \end{cases}$	gilt $\Delta_2 m = \begin{cases} 4 \times m_m \times 10^{-6} \\ 2 \text{ mg} \\ 2 \times m_m \times 10^{-6} \end{cases}$
für $m = \begin{cases} 0 \text{ g} \dots 100 \text{ g} \\ 100 \text{ g} \dots 200 \text{ g} \\ 200 \text{ g} \dots 5000 \text{ g} \end{cases}$	gilt $\Delta_3 m = \begin{cases} 2 \times m \times 10^{-5} \\ 2 \text{ mg} \\ 1 \times m \times 10^{-5} \end{cases}$

Wägestücke

Tabelle enthält Messunsicherheiten Δm in mg

Nennmasse	2 kg	1 kg	500 g	200 g	100 g	50 g	20 g
Handelsgewichtstücke	1200	800	500	200	120	100	60
Feingewichtstücke Klasse F	-	7,50	3,00	1,50	0,75	0,45	0,30

Nennmasse	10 g + 5 g	2 g + 1 g
Handelsgewichtstücke	40	40
Feingewichtstücke Klasse F	0,23	0,15

Nennmasse	500 mg ... 100 mg	50 mg ... 20 mg	10 mg ... 0,5 mg
Handelsgewichtstücke	-	-	-
Feingewichtstücke Klasse F	0,075	0,045	0,030

Feingewichtstücke von 0,5 mg bis 500 mg werden als Plättchen ausgeführt:

Form A (ohne Angabe des Massewertes und der Maßeinheit)

Sollwert der Masse in mg	Gestalt (eine Kante aufgebogen)
1 10 100	gleichseitiges Dreieck
2 20 200	Quadrat
0,5 5 50 500	regelmäßiges Sechseck

Sollwert der Masse in mg	Gestalt
0,5 bis 5	Rechteck mit abgeschrägten Ecken und aufgebogener Schmalkante
10 bis 500	Rechteck mit abgeschrägten Ecken und aufgebogener Ecke

4.2. ANHANG: HERSTELLERANGABEN

Feinwaage Mettler (digital)

Typ	AE 260 DeltaRange	PM 3000
Ablesbarkeit	1 mg	0,1 g
Wägebereich	0 g ... 205 g	0 g ... 3100 g
Tarierbereich (subtraktiv)	0 g ... 205 g	0 g ... 3100 g
Standardabweichung	0,5 mg	0,03 g
Linearität	± 1 mg	$\pm 0,1$ g

Manometer mit elastischem Messglied

$$\text{Verkehrsfehlergrenzen} = \frac{(\text{Skalenendwert}) \times (\text{Klasse})}{100}$$

Laborthermometer

Tabelle enthält $\Delta\theta$ in K, θ = gemessene Temperatur

Skalenwert / K	1	0,5	0,2	0,1
$\theta = -5^{\circ}\text{C} \dots 60^{\circ}\text{C}$	0,7	0,5	0,2	0,15
$\theta = 60^{\circ}\text{C} \dots 110^{\circ}\text{C}$	1	-	0,3	0,25
$\theta = 110^{\circ}\text{C} \dots 210^{\circ}\text{C}$	1,5	1,0	0,5	-
$\theta = 210^{\circ}\text{C} \dots 310^{\circ}\text{C}$	2,0	1,5	-	-
$\theta = 310^{\circ}\text{C} \dots 400^{\circ}\text{C}$	2,5	-	-	-

Kalorimeterthermometer

$$\Delta T = 0,02 \text{ K}$$

Elektrische Messgeräte

Angabe der Genauigkeitsklasse (zulässige Messunsicherheit in Prozenten des Messbereichendwertes) auf dem Skalenträger.

Beispiel: Ein Strommesser der Genauigkeitsklasse 1,5 mit 400 mA Vollausschlag besitzt unabhängig von der Höhe der gemessenen Stromstärke eine, unter anderem durch die Herstellung bedingte, maximale Unsicherheit der Anzeige von $1,5 \times 10^{-2} \times 400 \text{ mA} = 6 \text{ mA}$. Hinzu tritt noch der Ableseunsicherheit!

Liegt der Skalennullpunkt innerhalb der Skale, so gilt als Messbereichendwert die Summe beider Skalenendwerte.

Ist das Zeichen für die Genauigkeitsklasse in einem Kreis angegeben, so ist der Anzeige-fehler auf den Sollwert bezogen (Frequenzmesser mit Vibrationszungen). Außerdem kann durch Einflussgrößen, z.B. Temperatur, Frequenz, Fremdfelder und Lage, die Anzeige des Messinstrumentes verändert werden.

Beispiel: Ist auf dem Skalenträger nichts anderes festgelegt, dann kann eine Abweichung um 50 von der Nennlage zu einer zusätzlichen Messunsicherheit von der Größe der oben angegebenen zulässigen Messunsicherheit führen (ebenso eine Abweichung von der normalen Nenntemperatur von 20°C um 10 K).

Digital - Multimeter**Ältere Multimeter:** gemessene Größen: U , I , R

Betriebsart	Messbereich	Genauigkeit		
		HGL 2000 N	M 3610 B / VC220	91
Gleichspannung	200 mV ... 200 V	$\pm 0,5\% + 1$ Digit	$\pm 0,3\% + 1$ Digit	$\pm 0,5\% + 1$ Digit
Gleichspannung	1000 V	$\pm 0,8\% + 1$ Digit	alle Bereiche	alle Bereiche
Wechselspannung	200 mV	$\pm 1,2\% + 3$ Digits	$\pm 1,2\% + 3$ Digits	$\pm 1,2\% + 1$ Digit
Wechselspannung	2 V ... 200 V	$\pm 0,8\% + 3$ Digits	$\pm 0,8\% + 3$ Digits	alle Bereiche
Wechselspannung	200 mV	$\pm 1,2\% + 3$ Digits	$\pm 1,2\% + 3$ Digits	
Gleichstrom	200 μ A ... 20 μ A	$\pm 0,8\% + 1$ Digit	$\pm 0,5\% + 1$ Digit	$\pm 1,0\% + 1$ Digit
Gleichstrom	200 mA ... 2 A	$\pm 1,2\% + 1$ Digit	$\pm 1,2\% + 1$ Digit	$\pm 1,0\% + 1$ Digit
Gleichstrom	10 A	$\pm 2,0\% + 5$ Digits	$\pm 2,0\% + 5$ Digits	$\pm 2,0\% + 3$ Digits
Wechselstrom	200 μ A	$\pm 1,8\% + 3$ Digits		
Wechselstrom	2 mA ... 20 mA	$\pm 1,0\% + 3$ Digits		
Wechselstrom	200 mA ... 2 A			
Wechselstrom	10 A			
Widerstand	200 Ω			
Widerstand	2 k Ω ... 2 M Ω			
Widerstand	20 M Ω			
Widerstand	200 M Ω		-	-

PeakTech® 2015: gemessene Größen: U , I , R

Betriebsart	Messbereich	Genauigkeit
Gleichspannung	400 mV ... 400 V	$\pm 0,5\% + 4$ Digit
Gleichspannung	1000 V	$\pm 1,0\% + 4$ Digit
Wechselspannung	4 V ... 400 V	$\pm 0,8\% + 6$ Digits
Wechselspannung	750 V	$\pm 1,0\% + 8$ Digits
Gleichstrom	400 μ A ... 400 mA	$\pm 1,0\% + 10$ Digit
Gleichstrom	20 A	$\pm 1,2\% + 10$ Digits
Wechselstrom	400 μ A ... 400 mA	$\pm 1,5\% + 5$ Digits
Wechselstrom	20 A	$\pm 2,0\% + 15$ Digits
Widerstand	400 Ω	$\pm 0,8\% + 5$ Digits
Widerstand	4 k Ω ... 4 M Ω	$\pm 0,8\% + 4$ Digits
Widerstand	40 M Ω	$\pm 1,2\% + 5$ Digits

PeakTech® 2010 und PeakTech® 3725: gemessene Größen: U , I , R , f

Betriebsart	Messbereich	Genauigkeit	
		PeakTech® 2010	PeakTech® 3725
Gleichspannung	200 mV ... 200 V	$\pm 0,5\% + 3$ Digits	$\pm 0,5\% + 1$ Digit
Gleichspannung	1000 V	$\pm 1,0\% + 5$ Digits	
Gleichspannung	600 V		$\pm 0,8\% + 2$ Digits
Wechselspannung	200 mV	$\pm 1,2\% + 3$ Digits	$\pm 1,2\% + 3$ Digits
Wechselspannung	2 V ... 200 V	$\pm 1,0\% + 3$ Digits	$\pm 0,8\% + 3$ Digits
Wechselspannung	750 V	$\pm 1,0\% + 8$ Digits	
Wechselspannung	600 V		$\pm 1,2\% + 3$ Digits
Gleichstrom	20 μ A ... 2 mA		$\pm 0,8\% + 1$ Digit
Gleichstrom	2 mA ... 20 mA	$\pm 0,8\% + 3$ Digits	
Gleichstrom	200 mA	$\pm 1,2\% + 4$ Digits	$\pm 1,5\% + 1$ Digit
Gleichstrom	10 A		$\pm 2,0\% + 5$ Digits
Gleichstrom	20 A	$\pm 2,0\% + 5$ Digits	
Wechselstrom	20 μ A ... 2 mA		$\pm 1,0\% + 3$ Digits
Wechselstrom	2 mA ... 20 mA	$\pm 1,0\% + 5$ Digits	
Wechselstrom	200 mA	$\pm 2,0\% + 5$ Digits	$\pm 1,8\% + 3$ Digits
Wechselstrom	10 A		$\pm 3,0\% + 7$ Digits
Wechselstrom	20 A	$\pm 3,0\% + 10$ Digits	
Widerstand	200 Ω		$\pm 0,8\% + 3$ Digits
Widerstand	200 Ω ... 2 k Ω	$\pm 0,8\% + 5$ Digits	
Widerstand	2 k Ω ... 2 M Ω		$\pm 0,8\% + 1$ Digits
Widerstand	20 k Ω ... 2 M Ω	$\pm 0,8\% + 3$ Digits	
Widerstand	20 M Ω	$\pm 1,0\% + 15$ Digits	$\pm 1,0\% + 5$ Digits
Widerstand	2000 M Ω	$\pm 5,0\% + 20$ Digits	$\pm 5,0\% + 10$ Digits
Frequenz	2 kHz ... 10 MHz	$\pm 0,5\% + 4$ Digits	$\pm 0,1\% + 3$ Digits

Joy-it® VM-533 (Versuch MV modifizierte Spannungsanzeige im High Voltage Power Puply)

für $U > 5V$: $\Delta U = \pm 0,3\% \times U + 1V$

Normalwiderstände

Bei 15°C ... 25°C und geringer Belastung.

Widerstandssätze

Bei 20°C und geringer Belastung. R = eingeschalteter Widerstand.

4.2. ANHANG: HERSTELLERANGABEN

$$\text{Für } \begin{cases} R < 0,1 \Omega \\ 0,1 \Omega \leq R < 10 \Omega \\ R \geq 10 \Omega \end{cases} \quad \text{gilt } \Delta R = \begin{cases} 0,02 \Omega + 1 \times 10^{-2} \times R \\ 0,02 \Omega + 1 \times 10^{-3} \times R \\ 0,02 \Omega + 1 \times 10^{-4} \times R \end{cases} .$$