TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN **Fakultät Physik** Physikalisches Grundpraktikum	Versuch: **FA** Aktualisiert: am 03. 05. 2023

Fehleranalyse

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung

Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T eines Fadenpendels in 10 bis 200 Einzelmessungen, und analysieren Sie die Resultate hinsichtlich des arithmetischen Mittels $\overline{T}$, der Standardabweichung bezüglich Einzelmessung s_T und Mittelwert $s_{\overline{T}}$ sowie der Verteilungsfunktion von T:

1. Für 10 Einzelmessungen sind von Hand $\overline{T}$, s_T und $s_{\overline{T}}$ zu berechnen.
2. Nach der Klasseneinteilung werden 200 Messungen durchgeführt und mit dem zur Verfügung stehenden Programm ausgewertet. Um die Entwicklung statistisch relevanter Größen in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang zu verfolgen, werden nach 10, 25, 50, 100 und 200 Messungen die Häufigkeiten der Messwerte ermittelt.
3. Aus den gewonnenen Daten sind die Fallbeschleunigung g und deren Messabweichungen zu bestimmen.
4. Für die einzelnen Messungen ist anhand der Häufigkeitsverteilung das Vorliegen einer Gauß-Verteilung zu prüfen. *Studierende mit Physik als Hauptfach* stellen zudem die Summenkurve auf Wahrscheinlichkeitspapier dar und vergleichen das Resultat mit den Ergebnissen aus Aufgabe 2.

2 Auswertung von Beobachtungen

2.1 Messen

Messen ist ein experimenteller Vorgang, durch den ein spezieller Wert einer physikalischen Größe (der *Messgröße*) als Vielfaches ihrer Maßeinheit oder eines Bezugswertes ermittelt wird. Jedes Messergebnis wird unter speziellen *Messbedingungen* erzielt. Diese sind möglichst konstant zu halten und stets anzugeben. Das Messresultat ist immer mit einer *Messunsicherheit* (*Messabweichung*, veraltet: *Fehler*) behaftet.

Kalibrieren bzw. – im Eichamt – *Eichen* ist der Vergleich einer bezifferten Skale mit einem *Normal*. Jedes *Messgerät* (Messeinrichtung), das auf einem physikalischen *Messprinzip* beruht, muss an ein *Sekundär*- oder *Primär-Normal* mit geringerer Messunsicherheit gekoppelt sein.

Zur Begrifflichkeit der Messfehler und Messunsicherheiten

Alle Messungen sind immer mit *Messabweichungen* behaftet. Im allgemeinen Sprachgebrauch wird für die Messabweichung meist (noch) der Begriff *Messfehler* oder kurz *Fehler* verwendet. Jedoch empfehlt z.B. die DIN-Norm 1319, diesen Begriff durch den der (Mess-)Abweichung zu ersetzen.

Dies betrifft somit auch die in der „Fehlerrechnungsliteratur“ verwendeten Begriffe *systematischer* und *zufälliger* Fehler, die durch *systematische* und *zufällige Messabweichung* zu ersetzen sind. Lediglich die sogenannten *groben Messfehler* können begrifflich so weiter geführt werden, denn deren Name drückt tatsächlich eine „fehlerhafte“, sprich: falsche Handlung aus. Grobe Fehler sind prinzipiell vermeidbar oder können durch einfache Kontrollen gefunden werden.

2.2 Zufällige und systematische Messabweichungen

Obwohl die Physik eine exakte Wissenschaft ist, geben Anzeigen von Messgeräten nicht notwendigerweise den exakten Wert einer Größe an. Vielmehr bleibt der wahre Wert (μ) unbekannt, und der gemessene Wert weicht infolge systematischer oder zufälliger Messabweichungen davon ab. Im folgenden werden grobe Fehler bzw. Irrtümer ausgeschlossen. **Messungen sollten wiederholt**

werden. Für die Erfassung von zufälligen Messabweichungen in Form einer sog. *Standardabweichung* gibt es im Gegensatz zu systematischen ein statistisches Verfahren, welches im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.

2.3 Zufällige Messabweichungen

Die Theorie der Abweichungen, die auf statistischen Rechnungen beruht, behandelt die zufälligen Messabweichungen. Die Anteile der zufälligen Messabweichungen können um so genauer erfasst werden, je mehr Messungen durchgeführt wurden. Sie werden überwiegend dem Beobachter und Einflüssen der Umgebung zugeschrieben, sofern sie nicht in der Natur des Messobjektes zu suchen sind (z.B. im statistischen Charakter des Rauschens von Messgeräten oder des radioaktiven Zerfalls). Sie treten bei Wiederholung der Messungen mit Unterschieden im Betrag und im Vorzeichen auf.

2.3.1 Standardabweichung von Messreihen einzelner Größen

Eine Größe x werde n-mal *unter identischen Bedingungen* gemessen (Messwerte $x_1, x_2, \ldots, x_n$). Den besten Schätzwert für den wahren Wert der Größe x stellt das *arithmetische Mittel* dar:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{1}$$

Bildet man die n Differenzen der Einzelmessungen vom Mittelwert und quadriert diese, so erhält man das mittlere Abweichungsquadrat und daraus das wichtigste Maß für die Streuung der Einzelmessung, die (empirische) *Standardabweichung*:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}} \quad (a) \quad \text{oder} \quad s_x = \sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \frac{1}{n}\cdot\sum_j x_j)^2}{n-1}} \quad (b) \tag{2}$$

Mit der Formel (2b) kann während der Aufnahme einer Messreihe die Veränderung der Standardabweichung verfolgt werden. Für große n ist s_x unabhängig von n und damit konstant und als ein Qualitätsmerkmal von Gerät und Beobachter anzusehen. Durch die doppelte Standardabweichung $\pm s_x$ rechts und links vom Mittelwert wird der Wertebereich markiert, in dem die Messwerte mit ca. 68 % Wahrscheinlichkeit (Vertrauensniveau 0,68) liegen.

Für den Mittelwert ergibt sich eine geringere (empirische) Standardabweichung

$$\Delta\overline{x} = s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n\cdot(n-1)}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}, \tag{3}$$

die für $n \to \infty$ verschwindet[1]. Die (empirische) *Standardabweichung des Mittelwertes* $s_{\overline{x}}$ charakterisiert eine Messreihe (n muss mit angegeben werden) und stellt ein Maß für die Streuung des Mittelwertes um den wahren Wert dar. Will man $s_{\overline{x}}$ z.B. auf den zehnten Teil reduzieren, so hat man die hundertfache Anzahl von Messungen durchzuführen.

- *(Für Physik im Hauptfach)*

  Im Praktikum für Studierende der Physik wird ein Vertrauensniveau von 0,68 zugrunde gelegt (s. Abschnitt 5.4), damit ist der Schätzwert der Standardabweichung des Mittelwerts der Wert für die *zufällige Messabweichung.*

$$\Delta x_z = \Delta\overline{x} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \tag{4}$$

[1] Aufgrund der Studentschen Verteilungsfunktion käme genau genommen noch ein Vorfaktor hinzu, welcher bei kleinen Stichproben durchaus relevant sein kann, aber im Grundpraktikum nicht berücksichtigt wird.

- *(Für Physik im Nebenfach)*

  Im Praktikum für Studierende mit Physik im Nebenfach wird ein Vertrauensniveau von 0,95 zugrunde gelegt (s. Abschnitt 5.4), wodurch sich die *zufälligen Messabweichungen* Δx_z gemäß (2) und (3) etwa um den Faktor 2 (genauer: 1,960) erhöhen:

$$\Delta x_z = \Delta \overline{x}_{0,95} = \frac{2 \cdot s_x}{\sqrt{n}} \tag{5}$$

Wenn die Messbedingungen gleich bleiben, kann die Standardabweichung aus früheren Messungen übernommen werden und auf eine neue Einzelmessung übertragen werden.

2.3.2 Zufälliger Digitalisierungsfehler

Bei digitalen Messgeräten (z.B. Digitalvoltmeter, Digitalstoppuhr) entfallen bei konstanten Messbedingungen die subjektiven Einflüsse auf die zufälligen Messabweichungen (insb. *Ablesefehler*). Der Messwert wird durch Zählen von Impulsen gewonnen und ist damit um ein *Digit* (last digit), also eine Einheit der letzten Dezimale, unsicher.

- Ist der Mittelwert $\overline{x}$ konstant und die Auflösung des Messgerätes gering, sodass keine statistischen Schwankungen (verursacht z.B. durch ein Rauschen des Verstärkers) bemerkt werden, so liest man stets denselben Wert ab. Unter Berücksichtigung des Vertrauensniveaus von 0,68 (Studierende Physik) ergibt sich die Messunsicherheit der Digitalisierung durch Multiplikation der letzten Dezimale mit $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Bei der Berechnung der maximalen Messunsicherheit in der Nebenfachausbildung wird der Wert der letzten Dezimale als Messunsicherheit der Digitalisierung übernommen.
- Wird eine Streuung der Messwerte beobachtet, so muss die Standardabweichung bestimmt werden. Bereits ab $s_x \geq 3\,\text{Digit}$ hat der Digitalisierungsfehler praktisch keinen Einfluss mehr auf s_x.

2.3.3 Wichtige Hinweise

- Ergeben sich bei einer Messreihe stets die gleichen Werte, dann sollte die zufällige Messabweichung als Bruchteil der Skalenteilung (0,2 bis 0,5 Skalenteile) abgeschätzt werden. Das Experiment sollte möglichst mit einem empfindlicheren Gerät oder Messverfahren wiederholt werden.
- Bei der Messung von zeitlichen (oder räumlichen) Längen einer Periode empfiehlt es sich, über eine große Anzahl n^* von Perioden zu mitteln und dabei u.U. nur eine Einzelmessung (z.B. über $n^* \cdot T$) durchzuführen. Durch hohe n^*-Werte wird der Beitrag des konstanten Teils der systematischen Messabweichung sowie der Beitrag der zufälligen Messabweichung (s_T) zur resultierenden Messabweichung reduziert, während der vom Messwert abhängige Term der systematischen Messabweichung für beliebig große n^* die verbleibende Messunsicherheit begrenzt.

2.4 Systematische Messabweichungen

Die systematische Messunsicherheit (oder Messabweichung) ist eine bestimmte gemeinsame Abweichung aller einzelnen Messwerte vom wahren Wert einer physikalischen Größe. Charakteristisch für eine systematische Messabweichung ist, dass sie bei einer Wiederholungsmessung unter gleichen Messbedingungen nach Betrag und Vorzeichen gleich bleibt. Folglich können systematische Messabweichungen durch Wiederholung von Einzelmessungen weder erkannt noch eliminiert werden.

Die Ursachen systematischer Messabweichungen liegen z.B. in Unvollkommenheiten der Messgeräte und der Versuchsbedingungen sowie in nicht erfassten Umwelteinflüssen, in mangelnder Kalibrierung oder Justierung etc. Hinzu kommt, dass diese Abweichungen oft korreliert sind (siehe unten).

Für die Identifikation systematischer Messabweichungen gibt es keine allgemeine Vorgehensweise, da deren Ursachen sehr vielfältig sind. Diese Aufgabe erfordert im Grunde mitunter die ganze Kraft des Experimentalphysikers für eine präzise Analyse des spezifischen Messverfahrens.

2.4.1 Erfasste systematische Messabweichungen

In vielen Fällen können systematische Messabweichungen durch Experimente oder Berechnungen bestimmt und durch eine Korrektion nach Betrag und Vorzeichen berücksichtigt werden.

Ist z.B. ein metallischer Maßstab bei 20 °C kalibriert worden und weicht die Messtemperatur bei Messung einer Länge $l^*(T)$ von diesem Wert um ΔT ab, so kann eine Korrektion K über den bekannten Ausdehnungskoeffizienten α des Metalls erfolgen:

$$l(T) = l^*(T) \cdot K = l^*(T) \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

2.4.2 Systematische Messabweichungen mit zufälligem Charakter

Bei konstanten Bedingungen (z.B. Temperatur) bleiben die systematischen Messabweichungen konstant, sind aber nicht bekannt. Es ist zweckmäßig, die vom Hersteller angegebenen Garantie-Fehlergrenzen als maximal mögliche systematische Messabweichungen einzusetzen. Für einen Maßstab kann diese Herstellerangabe zum Beispiel lauten:

$$\pm(0{,}1\,\mathrm{mm} + 10^{-5} \cdot l)$$

Bei systematischen Messabweichungen ist jedoch zu beachten, dass sie sich bei Differenzmessungen mit dem *gleichen* Gerät teilweise kompensieren können. Das liegt daran, dass Messabweichungen *ein und desselben Messgerätes* i.d.R. in die gleiche Richtung ausschlagen (für gleiche Messwerte sogar mit gleichem Betrag). Dieses Phänomen wird rechnerisch allgemein mittels „Kovarianzen" erfasst, wofür im Praktikum sinnvolle Annahmen getroffen werden müssen.

Hilfsmittel zur Abschätzung dieses Anteils der Messabweichungen sind im Rahmen des Praktikums die Garantie- und Eichfehler-Grenzen (*Fehlergrenzen*), die einen vereinbarten Höchstbetrag für (positive oder negative) Abweichungen der Anzeige der Messgeräte (s. Tabelle 1) angeben.

Bei vielen analogen Messgeräten besteht diese Herstellerangabe aus einem konstanten und einem vom Messwert abhängigen Term. Zum Beispiel wird bei der Stoppuhr eine konstante Messabweichung Δt_{ruck} durch das Ankuppeln und eine Messabweichung durch den Uhrengang (Frequenzfehler) verursacht.

Da die von den Herstellern veröffentlichten Garantiefehlergrenzen so angegeben sind, dass der wahre Wert mit 100%-iger Sicherheit innerhalb dieser Grenzen liegt, der Hersteller aber keinerlei Aussage

Gerät	Grenze des Messbereiches	Fehlergrenze
mechanischer Messschieber	15 cm	$50\,\mu\mathrm{m} + 10^{-4} \cdot l$
digitaler Messschieber	15 cm	0,03 mm + 1Digit
Drehspulinstrument	100 V	0,5 % des Endausschlages
Digital-Multimeter M 3610 B	20 V	0,3 % des Wertes + 1 Digit
Laborthermometer höchster Güte	0 bis 50 °C	0,15 K
Stoppuhr (ein Umlauf in 30 s)	z.B. 80 s	$0{,}2\,\mathrm{s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$

Tabelle 1: Beispiele für Garantie- und Eichfehler-Grenzen von Messgeräten

über die Verteilungsfunktion macht, muss eine Gleichverteilung innerhalb der Garantiefehlergrenzen angenommen werden.

- *(Für Physik im Hauptfach)*

  Die angegebenen Garantiefehlergrenzen sind nicht als systematische Messabweichungen übernehmbar, da das im Physikalischen Praktikum für Studierende der Physik geforderte Vertrauensniveau von 0,68 (s. Abschnitt 5.4) weit überschätzt würde. Hier ist ein Korrekturfaktor von $\frac{1}{\sqrt{12}}$ bei Herstellerangabe des Intervalls zwischen Ober- und Untergrenze bzw. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ bei Herstellerangabe des einseitigen Garantiefehlers zu verwenden.

- *(Für Physik im Nebenfach)*

  Die angegebenen Garantiefehlergrenzen sind als systematische Messabweichungen übernehmbar, da die kleine Abweichung von dem im Physikalischen Praktikum für Physik im Nebenfach verwendeten Vertrauensniveau von 0,95 (s. Abschnitt 5.4) akzeptabel ist.

2.5 Fortpflanzung von Messunsicherheiten

Vielfach sind für die Bestimmung einer Größe die Messungen verschiedener (meist unabhängiger) Einzelgrößen $x, y, z, \ldots$ notwendig, aus deren Mittelwerten sich der Mittelwert der gesuchten Funktion $\overline{f} = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots)$ berechnet. (Zum Beispiel ergibt sich der spezifische Widerstand aus vier Einzelmessungen, der Strom- und Spannungsmessung sowie der Bestimmung der Leitergeometrie (Querschnittsfläche A und Länge l) zu $\varrho = \frac{A}{l} \cdot \frac{U}{I}$.)

Die resultierende Messabweichung der Funktion Δf wird nach dem *Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz* durch die partiellen Ableitungen ($\frac{\partial f}{\partial x}$ etc.) und die Messabweichung der Einzelmessungen ($\Delta x, \ldots$) bestimmt. Sind die einzelnen Größen $(x, y, z, \ldots)$ unabhängig (unkorreliert), gilt für Δf das *Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz* in der folgenden Form.

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cdot (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cdot (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \cdot (\Delta z)^2 + \ldots} \tag{6}$$

Da nach obiger Annahme die einzelnen Anteile der Messabweichung unabhängig voneinander wirken, ist es unwahrscheinlich, dass alle Anteile der Messabweichungen in die gleiche Richtung wirken. Daher werden die Quadrate der einzelnen Anteile addiert – so wie beim Betrag einer Summe von zueinander orthogonalen Vektoren.

Treten hingegen Korrelationen auf, was v.a. bei systematischen Messabweichungen der Fall sein kann, müssen strenggenommen auch die Kovarianzterme unter der Wurzel von Gl. 6 berücksichtigt werden (siehe „Einführung in das Physikalische Praktikum"). Für den Grenzfall, dass z.B. alle Messgrößen miteinander 100% korreliert sind, ergibt sich mit den entsprechenden Kovarianztermen schlussendlich der Betrag des *totalen Differentials* (der Studierende überzeuge sich selbst):

$$\Delta f = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \Delta z + \ldots \right| \tag{7}$$

In dieser Form können die einzelnen Beiträge in Abhängigkeit vom Vorzeichen der entsprechenden partiellen Ableitungen gegeneinander aufgerechnet werden. Dabei kann sich die resultierende Messabweichung gegenüber Gl. 6 u.U. merklich reduzieren (aber auch erhöhen).

Korrelationen können z.B. bei der Verwendung ein und desselben Messgerätes bei der Aufnahme einer Messreihe vorliegen. Leider sind diese aber in der Regel nicht bekannt, so dass lediglich eine Maximalabschätzung der systematischen Messunsicherheiten als einzig sinnvolle und praktikable Alternative übrigbleibt (siehe Dreiecksungleichung):

$$\Delta f \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}\cdot \Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\cdot \Delta y\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\cdot \Delta z\right| + \ldots \tag{8}$$

- *(Für Physik als Hauptfach)*

  In der Physik wird im Endergebnis f des physikalischen Experiments der wahrscheinlichste Wert $\overline{f}$ und die Werte der zufälligen Δf_z und systematischen Δf_s Messabweichung (üblich in dieser Reihenfolge) separat angegeben. Hierfür wird die zufällige bzw. systematische Messabweichung jeweils mit Hilfe des *Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes* (Gl. 6, ev. mit Kovarianzen) aus den zufälligen bzw. systematischen Messabweichungen der Messgrößen getrennt berechnet.

  $$f = \overline{f} \pm \Delta f_z \pm \Delta f_s \tag{9}$$

- *(Für Physik als Nebenfach)*

  Wie in den Ingenieurwissenschaften bevorzugt, wird im Praktikum für die Berechnung von Δf als Vereinfachung des *Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes* der Betrag der sogenannten *maximalen Messabweichung* benutzt:

  $$\Delta f = \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\cdot \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\cdot \Delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\cdot \Delta z + \ldots\right) \tag{10}$$

  Die so berechnete Messunsicherheit entspricht unter Einbeziehung aller möglicher Korrelationen einer strengen Abschätzung von Gl. 6 nach oben („Maximalfehlerrechnung"). In Gl. 10 wird für jede einzelne Messgröße (z.B. $\Delta x = \Delta x_z + \Delta x_s$) die Summe aus zufälliger und systematischer Messabweichung eingesetzt. Der zufällige Anteil wird nach (5) berechnet (bzw. im Falle einer Einzelmessung der geschätzte Anteil eingesetzt), der systematische Anteil wird beispielsweise der Tabelle (1) entnommen. Δf ist dann die maximale Messabweichung des Endergebnisses, die sowohl die systematische als auch zufällige Messabweichung enthält.

  Im Physikalischen Praktikum für Physik im Nebenfach wird im Endergebnis f des physikalischen Experiments der wahrscheinlichste Wert $\overline{f}$ und der Wert der maximalen Messabweichung Δf nach Gl. 10 angegeben:

  $$f = \overline{f} \pm \Delta f \tag{11}$$

2.6 Angabe des Messergebnisses und der resultierenden Messabweichung

2.6.1 Absolute und relative Messabweichungen

Die resultierende Messabweichung kann sowohl absolut als auch relativ angegeben werden. Die *relative Messabweichung* ist definiert als Quotient aus absoluter Messabweichung und Mittelwert. Wird die absolute Messabweichung getrennt in systematische und zufällige Messabweichung angegeben, ist sinnvollerweise auch die relative Messabweichung getrennt anzugeben. Die relative Messabweichung ist besonders gut geeignet, um die Qualität einer Messung oder eines Messverfahrens einzuschätzen. In Sonderfällen hat sie jedoch keine Bedeutung, z.B. bei der Angabe einer Temperatur in der Celsius-Skala.

2.6.2 Angabe des Messergebnisses

Die vollständige Auswertung (im Protokoll) sollte neben dem Mittelwert und eventuell notwendigen Korrekturen sowie den Messabweichungen auch die Anzahl n der Messungen und das zugrunde gelegte Vertrauensniveau P enthalten.

Die letzte angegebene Dezimalstelle des Ergebnisses richtet sich bei Einhaltung der Rundungs-Regeln vor allen Dingen nach der Messabweichung. Zuerst muss die letzte Dezimalstelle der Messabweichung sinnvoll gerundet werden.

Stellenzahl bei geringen Messabweichungen Bei relativ geringen Messabweichungen und sorgfältig und aufwendig (große Anzahl n) bestimmten Messreihen sollte die Messabweichung auf soviel Dezimalen angegeben werden, dass die letzte Dezimale einer relativen Genauigkeit der Messabweichung von ca. 3 % entspricht.

Genaue Angaben der Messabweichung sind vor allem bei Wiederholungen der gleichen Messreihe von Interesse, um damit Mittelwerte und Standardabweichungen vergleichen und die zugrundliegende Statistik beurteilen zu können.

Stellenzahl bei großen Messabweichungen Liegt die relative Messabweichung über 20 % oder liegen überwiegend grobe Schätzungen für die Ermittlung der resultierenden Messabweichung zugrunde, so genügt eine Angabe der Messabweichung auf die gerundete Dezimalstelle, die einer relativen Genauigkeit der Messabweichung von etwa 10 % bis 20 % entspricht.

Stellenzahl des Messergebnisses Die sinnvoll gerundete resultierende Messabweichung bestimmt dann die letzten Dezimalstellen des Ergebnisses, zum Beispiel:

$$x_1 = (307{,}3 \pm 1{,}2)\ \mathrm{m} \quad \text{(Nebenfach)} \quad x_2 = (310 \pm 120 \pm 110)\,\mathrm{mm} \quad \text{(Hauptfach)}$$

2.6.3 Beispiele

- *(Für Physik als Hauptfach)*
  1. Ein Längenmessgerät mit der Herstellerangabe der Garantiefehlergrenzen (Annahme Gleichverteilung) $\Delta x = (0{,}01\,\mathrm{mm} + 5 \cdot 10^{-3} \cdot x)$ wird benutzt, um $n = 50$-mal die Länge x zu bestimmen. Es ergibt sich $\overline{x} = 3{,}75\,\mathrm{mm}$ mit $s_x = 0{,}071\,\mathrm{mm}$. Die systematische und zufällige Messabweichung dieser Messung sind:

     $$\begin{aligned} \Delta x_s &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(0{,}01\,\mathrm{mm} + 5 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}75\,\mathrm{mm}\right) = 0{,}016\,\mathrm{mm} \\ \Delta x_z &= \frac{s_x}{\sqrt{n}} = 0{,}01\,\mathrm{mm} \end{aligned}$$

  2. Mit einem Vorversuch wurde die Schwingungsdauer eines Fadenpendels $n = 10$-mal gemessen: $\overline{T} = 1{,}509\,\mathrm{s}$ mit $s_T = 0{,}085\,\mathrm{s}$. Vom Hersteller werden Garantiefehlergrenzen (Annahme Gleichverteilung) $\Delta t = 0{,}2\,\mathrm{s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$ angegeben. Nun wird die Zeit einmalig für $n^* = 100$ Perioden gemessen.

     Die resultierenden systematischen und zufälligen Messabweichung für die Schwingungsdauer resultieren aus:

     $$\begin{aligned} \Delta(n^*T)_s &= \frac{1}{\sqrt{3}}(0{,}2\,\mathrm{s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot n^*T) \\ \Delta(n^*T)_z &= s_T \\ \Delta T_s &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{0{,}2\,\mathrm{s}}{n^*} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot T\right) = 0{,}0016\,\mathrm{s} \\ \Delta T_z &= \frac{1}{n^*} \cdot s_T = 0{,}0008\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

  3. Die Fallbeschleunigung wird mit einem Fadenpendel bestimmt. Für eine punktförmige Masse und hinreichend kleine Amplituden gilt näherungsweise: $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$. Dabei wurde die Fadenlänge zu $l = (0{,}566 \pm 0{,}0012 \pm 0{,}0014)\,m$ bestimmt, die Schwingungsdauer T ist die

aus Beispiel 2. Daraus folgt $g = (9{,}813 \pm 0{,}023 \pm 0{,}026)\, m/s^2$, wobei die systematische und zufällige Messabweichung jeweils mit dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz ermittelt wird:

$$\frac{\Delta g_{s/z}}{g} = \sqrt{\left(2 \cdot \frac{\Delta T_{s/z}}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_{s/z}}{l}\right)^2}$$

- *(Für Physik als Nebenfach)*
  1. Ein Längenmessgerät mit der Herstellerangabe der Garantiefehlergrenzen $\Delta x = (0{,}01\,\mathrm{mm} + 5 \cdot 10^{-3} \cdot x)$ wird benutzt, um $n = 50$-mal die Länge x zu bestimmen. Es ergibt sich $\overline{x} = 3{,}75\,\mathrm{mm}$ mit $s_x = 0{,}071\,\mathrm{mm}$. Die systematische und zufällige Messabweichung dieser Messung sind:

     $$\Delta x_s = 0{,}01\,\mathrm{mm} + 5 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}75\,\mathrm{mm} = 0{,}03\,\mathrm{mm}$$
     $$\Delta x_z = \frac{2 \cdot s_x}{\sqrt{n}} = 0{,}02\,\mathrm{mm}$$

     In der Summe ist $\Delta x = 0{,}05\,\mathrm{mm}$, die relative Messabweichung ist $\frac{\Delta x}{x} = \frac{0{,}05}{3{,}75} = 0{,}013 = 1{,}3\,\%$.
  2. Mit einem Vorversuch wurde die Schwingungsdauer eines Fadenpendels $n = 10$-mal gemessen: $\overline{T} = 1{,}51\,\mathrm{s}$ mit $s_T = 0{,}085\,\mathrm{s}$. Vom Hersteller werden Garantiefehlergrenzen (Annahme Gleichverteilung) $\Delta t = 0{,}2\,\mathrm{s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$ angegeben. Nun wird die Zeit einmalig für $n^* = 100$ Perioden gemessen.

     Die resultierende Messabweichung für die Schwingungsdauer resultiert aus:

     $$\Delta(n^*T) = (0{,}2\,\mathrm{s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot n^*T) + 2 \cdot s_T$$
     $$\Delta T = \left(\frac{0{,}2\,\mathrm{s}}{n^*} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot T\right) + \frac{2}{n^*} \cdot s_T$$
     $$\Delta T = \left(\frac{0{,}2\,\mathrm{s}}{100} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}51\,\mathrm{s}\right) + \frac{2}{100} \cdot 0{,}085\,\mathrm{s} = 0{,}011\,\mathrm{s}$$

     Somit ist $T = (1{,}51 \pm 0{,}01)$ s mit einer relativen Messabweichung $\frac{\Delta T}{T} = 0{,}0066 \approx 0{,}7\,\%$.
  3. Die Fallbeschleunigung wird mit einem Fadenpendel bestimmt. Für eine punktförmige Masse und hinreichend kleine Amplituden gilt näherungsweise: $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$. Dabei wurde die Fadenlänge zu $l = (0{,}566 \pm 0{,}0017)$ m bestimmt, die Schwingungsdauer T ist die aus Beispiel 2. Daraus folgt $g = (9{,}81 \pm 0{,}16)\ \mathrm{m/s^2}$, wobei die Messabweichung mit dem vereinfachten Fehlerfortpflanzungsgesetz ermittelt wird:

     $$\left|\frac{\Delta g}{g}\right| = \left|2 \cdot \frac{\Delta T}{T}\right| + \left|\frac{\Delta l}{l}\right| = 0{,}013 + 0{,}003 \approx 1{,}6\,\%$$

3 Statistik der zufälligen Messabweichungen

3.1 Diskrete Häufigkeitsverteilung

Im Folgenden werden nur zufällige Messabweichungen betrachtet. Für die Größe x werden n Einzelmessungen durchgeführt, wobei n sehr groß sei (z.B. $n > 50$). Zu deren Analyse wird der durch die x_i (mit $i = 1, \ldots, n$) überstrichene Wertebereich an den Stellen x_j in r Intervalle mit gleicher Intervallbreite $x_j - x_{j-1}$ ($j = 1, \ldots, r$) eingeteilt. Eine sinnvolle Intervall-Breite kann mit Integralbreite $\approx \sigma/2$ oder auch mit $r \approx \sqrt{n}$ abgeschätzt werden.

In den einzelnen Intervallen wird die Anzahl der Messwerte, die innerhalb des Intervalls liegen, bestimmt. Dies ist die *Häufigkeit* H_j. Liegt ein Messwert auf einer Intervall-Grenze, kommt er zu je 50 % in beide Intervalle. Die diskrete Darstellung $H_j(x_j)$ heißt *Häufigkeitsverteilung.* Mithilfe der Summe $S = \sum_{j=1}^{r} H_j(x_j)$ kann man die Häufigkeitsverteilung normieren, man erhält die *relativen Häufigkeiten* $h_j = H_j/S$.

Häufigkeitsverteilungen haben ein Maximum in der Nähe des Mittelwertes, und ihre Breite steht in direktem Zusammenhang zur Standardabweichung s (s. Gauß-Verteilung).

3.2 Kontinuierliche Gauß-Verteilung

In den meisten Fällen zeigt sich, dass die beste mathematische Näherung für eine relative Häufigkeits-Verteilungskurve bei hinreichend großen n und nur zufälligen Messabweichungen durch die kontinuierliche *Normalverteilung* oder *Gaußsche Verteilung* gegeben ist. Tatsächlich spielt die Gauß-Verteilung in der Statistik eine ähnlich zentrale Rolle wie die Gerade in der Geometrie.

Die Gauß-Verteilung wird durch zwei Parameter, den wahren Wert μ (in der Praxis durch den Mittelwert $\overline{x}$ abgeschätzt) und die Streuung σ (Grenzfall von s für große n, siehe Abschnitt 5.3) eindeutig bestimmt. Aus der exakten Wahrscheinlichkeitsdichte $W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ bzw. der *Summenkurve* $S(x)$ ergibt sich mit $\mu \approx \bar{x}$ und $\sigma \approx s$ die an eine Messreihe angepasste Näherung:

$$W(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\overline{x})^2}{2s^2}\right] \tag{12a}$$

$$S(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{(t-\overline{x})^2}{2s^2}\right] \, \mathrm{d}t \tag{12b}$$

Mit der Gleichung (12a) als Modell der Häufigkeitsverteilung gibt $\Delta W = W(x) \cdot \Delta x$ für kleine Δx die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein einzelner Messwert im Intervall $[x, x + \Delta x]$ liegt.

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung W hat einen glockenförmigen Verlauf mit einem Maximum beim Mittelwert $\overline{x}$. Nach beiden Seiten nimmt W um so schneller ab, je geringer die Streuung σ ist. Der Abszissen-Abstand der beiden Wendepunkte der exakten Wahrscheinlichkeitsdichte beträgt $2 \cdot \sigma$. Die zugehörige Verteilungskurve S entspricht der Summenkurve über die Häufigkeiten und ist wie folgt *normiert*:

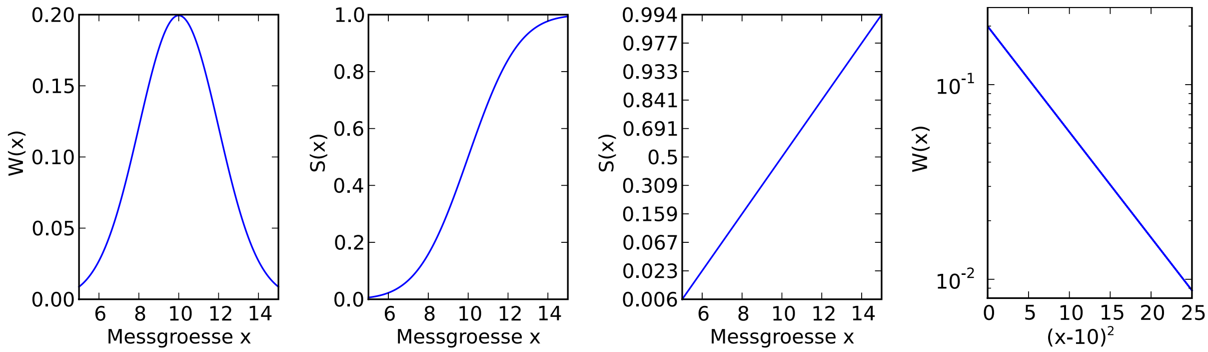
$$S(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \, \mathrm{d}t = 1 \tag{13}$$

3.3 Grafische Tests

Die beiden nichtlinearen Beziehungen (12) (siehe Abb. 1(a) und 1(b)) können für statistische Tests gemessener Häufigkeitsverteilungen auf das Vorliegen einer Normalverteilung linearisiert werden.

Beim *Wahrscheinlichkeitsnetz* wird von der Summenkurve (12b) ausgegangen: Auf dem Wahrscheinlichkeitspapier ist die Ordinate so verzerrt, dass die Darstellung der Summenhäufigkeit über den Messwerte-Klassen eine Gerade ergibt (Abb. 1(c)). Können die Messpunkte einer Regressionsgeraden zugeordnet werden, so kann von einer Gaußschen Verteilung gesprochen werden.

Beim *Logarithmieren* der Häufigkeitsverteilung (Wahrscheinlichkeitsdichte, (12a)) und Auftragen über dem Quadrat der Differenz aus dem jeweiligen Klassenwert (x_j) und dem Mittelwert ($\overline{x}$) ergibt sich eine Gerade (siehe Abb. 1(d)), deren Anstieg $\Delta(\ln(h))/\Delta(x_j - \overline{x})^2 \approx -1/2\sigma^2$ ist. Kann man durch die streuenden Punkte in dieser Darstellung eine Regressionsgerade legen, und entspricht deren Anstieg der Streuung $\sigma = s$ der Verteilung, so ist ebenfalls der Nachweis erbracht, dass eine Gauß-Verteilung vorliegt.



(a) Glockenkurve (b) Verteilungskurve (c) Wahrscheinlichkeitsnetz (d) Logarithmierte Häufigkeitskurve

Abb. 1: Gauß-Verteilung in verschiedenen Darstellungen für die Parameter $\overline{x} = 10$ und $\sigma = 2$: Häufigkeitskurve linear (a) und logarithmisch-quadratisch (d), Summenhäufigkeit linear (b) und auf Wahrscheinlichkeitspapier (c)

4 Experimente

4.1 Schwingungsdauer eines Fadenpendels

4.1.1 Vorversuch

Im Vorversuch wird die Schwingungsdauer eines ca. 2 m langen Fadenpendels zehnmal einzeln gemessen, wobei die Zeitdifferenz zwischen Start und Ende, von Hand durch Knopfdruck signalisiert, mit dem Rechner erfasst wird. Von diesen zehn Werten werden mit dem Taschenrechner der Mittelwert $\overline{T}$ und die Standardabweichung s_T berechnet.

4.1.2 Hauptversuch

Anhand der Ergebnisse des Vorversuchs wird nach Beratung mit dem Betreuer die Anzahl und die Breite der Intervalle für die Ermittlung der Häufigkeitsverteilung festgelegt und in den Rechner eingegeben. Dann wird von einer Person unter möglichst gleichen Bedingungen 200-mal die Schwingungsdauer T gestoppt und automatisch vom Rechner erfasst. Bei einigen Zwischenwerten (nach 10, 25, 50, 100 Perioden) wir die dahin erzielte Statistik dargestellt und ausgewertet, so dass deren Entwicklung mit zunehmenden Stichprobenumfang analysiert werden kann. Die Messung kann zu beliebigen Zeiten unterbrochen werden, um das Pendel erneut auszulenken und ggf. ein elliptisches Schwingverhalten zu beheben.

4.2 Statistische Analyse

Wir erwarten im Falle einer Gaußverteilung, dass *im Mittel* 68% aller Intervalle im 1σ - Unsicherheitsbereich der Gaußkurve zu finden sein sollten. Die ist von allen Studierenden im Sinne eines vereinfachten Tests zu prüfen. Für Studierende mit Physik im Hauptfach erfolgt eine weiterführende Analyse: Entsprechend Abb. 1(c) werden die Summen der relativen Häufigkeiten in Wahrscheinlichkeitspapier eingetragen. Zu beachten ist hierbei, dass auf der Zeitachse die jeweiligen Intervallenden eingetragen werden. Bei Vorliegen einer Gaußverteilung sollten die eingetragenen Werte mit einer Gerade verträglich sein, welche die experimentell bestimmten Werte für Mittelwert und Standardabweichung wiedergibt.

5 Anhang

5.1 Methode der kleinsten Quadrate und die Gauß-Verteilung

Der wahrscheinlichste Wert einer beobachteten Größe hat die Eigenschaft, dass die Summe der quadratischen Abweichungen der Beobachtungen von diesem Wert in ihm ihr Minimum findet.

Es liegen z.B. n Messwerte $x_1, \ldots, x_n$ mit dem unbekannten wahren Wert μ vor. Mit dem zunächst noch unbekannten wahrscheinlichsten Wert x_w ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Beobachtungswertes x_1 nach (12a) zu:

$$\mathrm{d}W(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left[-\frac{(x_1 - x_w)^2}{2\sigma^2}\right] \cdot \mathrm{d}x_1 \tag{14}$$

Die Wahrscheinlichkeit, die Werte x_1 bis x_n zu messen, ist gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten, d.h.

$$\mathrm{d}W_{\text{ges}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \cdot \exp\left[-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - x_w)^2}{2\sigma^2}\right] \cdot \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n \tag{15}$$

Diese Wahrscheinlichkeit erreicht ihr Maximum, das heißt: das Resultat ist am wahrscheinlichsten, wenn die Summe $\sum_{i=1}^n (x_i - x_w)^2$ der Abweichungsquadrate minimal wird. Aus dieser Forderung resultiert (1) – der Mittelwert ist tatsächlich der wahrscheinlichste Wert –, denn:

$$\frac{\partial}{\partial x_w} \sum_{i=1}^n (x_i - x_w)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad n \cdot x_w = \sum_{i=1}^n x_i \quad \rightarrow \quad x_w = \overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i$$

5.2 Gewichtetes (gewogenes) Mittel

Bei Durchführung verschiedener Messreihen der gleichen Größe x mit verschiedenen empirischen Mittelwerten $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots$ kann es vorkommen, dass die einzelnen Messreihen unterschiedliche Standardabweichungen $s_{x,1}, s_{x,2}, \ldots$ aufweisen, weil Sie zum Beispiel in verschiedenen Laboratorien oder von verschiedenen Personen durchgeführt wurden.

In diesem Falle erscheint es sinnvoll, einen Mittelwert $\overline{\overline{x}}$ aller Mittelwerte unter Benutzung von Gewichtungsfaktoren so zu berechnen, dass die genaueste Messreihe am stärksten berücksichtigt wird. Dies erreicht man mit dem *gewichteten Mittel*:

$$\overline{\overline{x}} = \frac{g_1 \cdot \overline{x}_1 + g_2 \cdot \overline{x}_2 + \ldots}{g_1 + g_2 + \ldots} = \frac{\sum_i g_i \cdot \overline{x}_i}{\sum_i g_i} \quad \text{mit} \quad g_i = \frac{1}{s^2_{\overline{x},i}} = \frac{n_i}{s^2_{x,i}} \tag{16}$$

5.3 Standardabweichung und Streuung der Normalverteilung

Wir wollen uns davon überzeugen, dass die Standardabweichung s im Grenzfall großer Zahlen n mit der Streuung σ zusammenfällt. Aus dem Quadrat der Standardabweichung aus (2) wird nach der Klasseneinteilung mit der relativen Häufigkeit h_j eine Summe bzw. für $n \to \infty$ ein Integral:

$$s^2 = \frac{\sum_{j=1}^r h_j \cdot \Delta x \cdot (x_j - \overline{x})^2}{\sum_{j=1}^r h_j \cdot \Delta x} \quad \rightarrow \quad s^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} W(x) \cdot (x - \overline{x})^2 \, \mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{+\infty} W(x) \, \mathrm{d}x}$$

Das Integral im Nenner entspricht $S(x = \infty) = 1$ (siehe Gl. (13)). In das Integral im Zähler setzen wir die Darstellung (12a) für $W(x)$ ein:

$$s^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \overline{x})^2 \cdot \exp\left[-\frac{(x - \overline{x})^2}{2\sigma^2}\right] \mathrm{d}x$$

Quantil α	Quantil $(1-\alpha)$	max. u-Wert
α	$(1-\alpha)$	$(k_{1-\alpha})$
0,5	0,5	0,0
0,16	0,84	1
0,05	0,95	1,64
0,025	0,975	1,96
0,01	0,99	2,32

Tabelle 2: Beispiele für α-Quantile und Vertrauensniveau $(1-\alpha)$ der Standard-Normalverteilung

Zur Lösung des rechten Integrals ersetzen wir $y \equiv x - \overline{x}$ sowie $a = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$:

$$s^2 = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot \mathrm{e}^{-a^2 y^2} \, \mathrm{d}y$$

Das Integral rechts ist tabelliert mit dem Wert $\frac{\sqrt{\pi}}{2a^3}$. Letztendlich ist also $s^2 = \frac{1}{2a^2} = \sigma^2$.

5.4 Standard-Normal-Verteilung, Quantile, Vertrauensniveau

Durch die Substitution $u = \frac{x-\overline{x}}{\sigma}$ entsteht aus den Gln. (12) die normierte Standard-Normal-Verteilung bzw. die zugehörige Summenfunktion (Verteilungsfunktion):

$$w(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \quad \text{bzw.} \quad s(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$$

Diese Verteilung liegt mit der Streuung $\sigma_u = 1$ symmetrisch zum Nullpunkt der normierten Zufallsvariablen u und ermöglicht einen quantitativen Vergleich verschiedener Verteilungen. Die Symmetrien haben die folgende Form:

$$w(u) = w(-u) \quad \text{bzw.} \quad s(-u) = 1 - s(u)$$

Hierbei werden $s(u_\alpha) = \alpha$ bzw. $(1-\alpha)$ als *Quantile* der Standard-Verteilung bezeichnet. Mit den Quantilen und dem daraus abgeleiteten Begriff *Vertrauensniveau* (Konfidenzniveau) wird es möglich, statistische Vorhersagen zu quantisieren.

Beispiel 1 Mit einem Vertrauensniveau von 0,95 kann vorhergesagt werden, dass höchstens 5 % der Messwerte den normierten Wert $u = 1{,}64$ einseitig überschreiten. Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist also $\alpha = 0{,}05$.

Beispiel 2 Beidseitig des Mittelwertes liegen 95 % der Messwerte in einem Bereich, der durch $\alpha = 0{,}025$ und $(1-\alpha) = 0{,}975$ gekennzeichnet ist. Der zugehörige maximale u-Wert beträgt auf jeder Seite $1{,}96 \approx 2$ (s. Tabelle 2).

Gelegentlich wird für große n der Standardfehler der Standardabweichung angegeben:

$$s_{s_x} = \frac{s_x}{\sqrt{2(n-1)}} \approx \frac{s_x}{\sqrt{2n}} \tag{17}$$

5.5 Lineare Regression

Häufig ist zwischen zwei (oder mehr) gemessenen Größen theoretisch ein linearer Zusammenhang zu erwarten. Für die lineare Funktion, die gegebenenfalls erst mathematisch durch Linearisierung erzeugt wird (s. Abb. 1(c) und Abb. 1(d)), werden die Koeffizienten a und b gesucht, für die gilt:

$$y = a + b \cdot x \tag{18}$$

Für x und y liegen im Allgemeinen mit Messunsicherheiten behaftete Messreihen vor. Für den einfacheren Fall, dass nur die y-Messwerte mit identischen[2] Messunsicherheiten ist, ergeben sich aus der Forderung minimaler quadratischer Messabweichungen, also $\sum(y_i - a - b \cdot x_i)^2 \to \min.$, als beste Schätzungen für $\overline{a}$ und $\overline{b}$:

$$\overline{a} = \frac{\sum y_i \cdot \sum x_i^2 - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \quad \text{bzw.} \quad \overline{b} = \frac{n \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{19}$$

Die Berechnungen von $\overline{a}$ und $\overline{b}$ nach (19) sowie des Korrelationskoeffizienten können mit jedem wissenschaftlichen Taschenrechner durchgeführt werden und sind mit jedem Standard-Tabellenkalkulationsprogramm beherrschbar. Sind die x-Werte äquidistant mit x^*, so ergibt sich für die Quadrate der Standardabweichungen:

$$s_y^2 = \frac{\sum(\Delta y_i)^2}{n-2} \quad \text{und} \quad s_a^2 = s_y^2 \cdot \frac{2(2n+1)}{n(n-1)} \quad \text{sowie} \quad s_b^2 = \frac{s_y^2}{x^{*2}} \cdot \frac{12}{n(n^2-1)} \tag{20}$$

Im allgemeineren Fall von nicht-äquidistanten x-Werten ergibt sich mit s_y^2 aus (20):

$$s_a^2 = s_y^2 \cdot \frac{\sum_i x_i^2}{n \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \quad \text{sowie} \quad s_b^2 = s_y^2 \cdot \frac{n}{n \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2} \tag{21}$$

Ist hingegen auch die Größe x mit signifikanten Messunsicherheiten behaftet, so geben die Kovarianz s_{xy} und besser der Korrelationskoeffizient r_{xy} Aufschluss über die Schärfe der linearen Beziehung:

$$s_{xy} \coloneqq \frac{\sum(x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{n-1} \quad \text{und} \quad r_{xy} \coloneqq \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{(\sum_i (x_i - \bar{x}))(\sum_j (y_j - \bar{y}))}} \tag{22}$$

Dabei bedeutet $r_{xy} \approx 0$, dass beide Messgrößen in keinem Zusammenhang stehen. $r_{xy} = \pm 1$ besagt, dass x und y streng korreliert sind, wobei ein negatives Vorzeichen auf eine gegenläufige Korrelation hinweist.

Autorenschaft

Diese Versuchsanleitung wurde in ihrer ursprünglichen Form von R. Goldberg, L. Jahn und R. Schwierz erstellt und von M. Kreller, J. Kelling, F. Lemke und S. Majewsky bearbeitet. Aktuelle Änderungen werden von der Praktikumsleitung durchgeführt.

[2]Dies ist häufig gerade nach Linearisierung nicht mehr gegeben.

Fragen

1. Wie berechnen sich für eine Messreihe aus n Einzelmessungen der Mittelwert, die Standardabweichung der Einzelmessung und des Mittelwertes sowie die relative Messabweichung?
2. Was besagt das Fehlerfortpflanzungsgesetz? Berechnen Sie bei gegebenen systematischen und zufälligen Messabweichungen und Mittelwerten der unabhängigen Messgrößen x, y, z die absoluten und relativen Messabweichungen der folgenden Funktionen!

$$f_1(x,y,z) = \frac{x^2}{y^4 \cdot \sqrt{z^3}} \quad \text{und} \quad f_2(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad \text{und} \quad f_3(x,y,z) = \frac{x^2 - y^2}{y - z}$$

3. Zu Beispiel 2 auf Seite 9: Bis zu welchem Wert n^* lohnt sich dessen Erhöhung in Hinblick auf eine möglichst geringe resultierende Messunsicherheit für die Periodendauer T?
4. Wie kann man für eine Serie von unter konstanten Bedingungen durchgeführten Messungen einer physikalischen Größe zeigen, dass die zufälligen Abweichungen vom Mittelwert einer Gaußschen Normalverteilung genügen?
5. Wie kann man sich die 1 im Nenner der Standardabweichung (2) plausibel machen?
6. Man beweise, dass die Wendepunkte der Gauß-Verteilung (12a) den Abszissen-Abstand σ vom Mittelwert haben.

Literatur

[1] W. Walcher, *Praktikum der Physik*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1989

[2] W. Ilberg (Hrsg.), M. Krötzsch (Hrsg.) et. al., *Physikalisches Praktikum für Anfänger*, Teubner-Verlag, Leipzig 1994

[3] F. Kohlrausch, *Praktische Physik, Band 3: Tabellen*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1996

[4] H. Weber, *Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Ingenieure*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1992

[5] J. Topping, *Fehlerrechnung: eine Einführung für Naturwissenschaftler*, Physik-Verlag, Weinheim 1975

[6] P. Täubert, *Abschätzung der Genauigkeit von Messergebnissen*, Technik-Verlag, Berlin 1987

[7] W. Lichten, D. Meschede, *Skriptum Fehlerrechnung*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1988

[8] W. H. Gränicher, *Messung beendet, was nun?*, vdf, Hochschulverlag an der ETH Zürich, Zürich 1996

[9] R. Waldi, *Statistik für's Physik-Praktikum*, Skriptum der TU Dresden, Dresden 1996

[10] P. Profos, *Handbuch der industriellen Messtechnik*, Oldenbourg-Verlag, München, Wien 1992

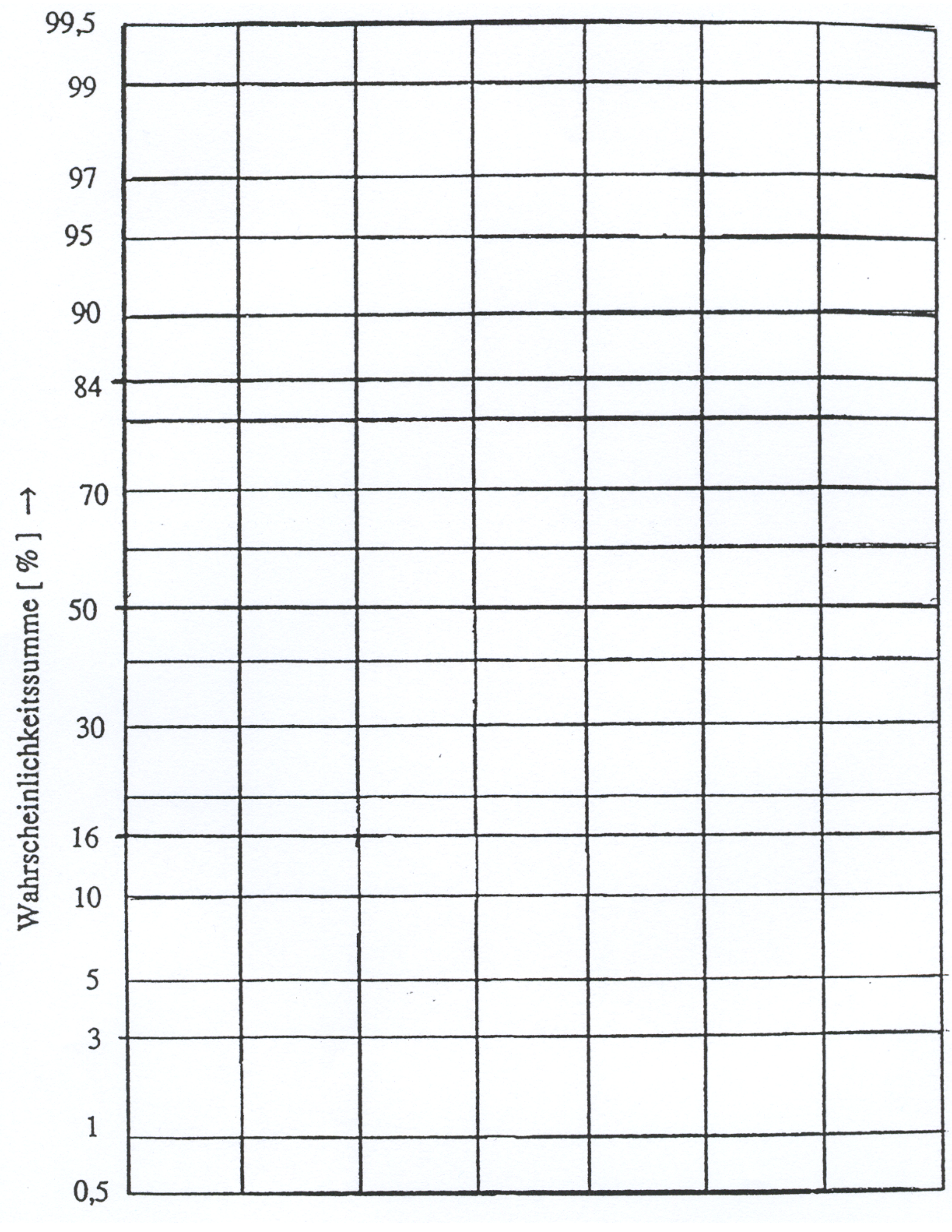


Abb. 2: Vorlage für ein Wahrscheinlichkeitsnetz