

Lecherleitung

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	2
2	Allgemeine Grundlagen	2
2.1	Kennzeichen einer Parallel-Drahtleitung	2
2.2	Die Telegraphengleichung für die ideale Leitung	2
2.3	Wellenwiderstand und Reflexion	3
2.3.1	Wellenwiderstand $Z_0 = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$	3
2.3.2	Fortlaufende Welle	3
2.3.3	Reflexion	3
2.4	Stehende Wellen	4
2.5	Kurze Leitungen	5
2.6	Einflüsse der Dämpfung	5
3	Experimente	6
3.1	Anordnung	6
3.2	Nachweis der Bäuche	6
3.2.1	Strombäuche	6
3.2.2	Spannungsbauch, $\lambda/4$ - Leitung	6
3.3	Wellenausbreitung in Luft und in Wasser	6
4	Fragen	7
5	Aufgaben	7

1 Aufgabenstellung

1. Erzeugung von stehenden Wellen durch Reflexion an der am Ende kurzgeschlossenen und offenen Leitung.
2. Messung der Phasengeschwindigkeit in Luft und in Wasser.
3. Abschätzung der Frequenz des Senders

2 Allgemeine Grundlagen

2.1 Kennzeichen einer Parallel-Drahtleitung

Zur Übertragung von Wechselströmen können u. a. Koaxial- und Parallel-Drahtleitungen benutzt werden.

Lecher- oder Parallel- Drahtleitungen sind durch die Widerstände R' in der Leitung und die Ableitung $G' = 1/R'_{par.}$ pro Meter sowie durch die Geometrie, d. h. den Abstand d

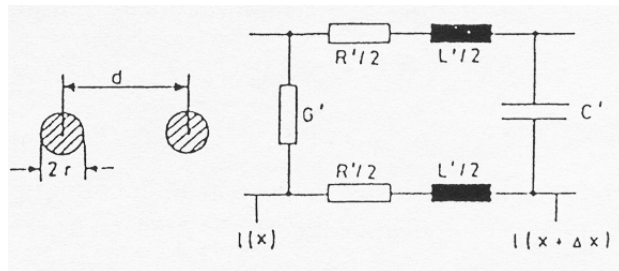


Abb. 1: Geometrie und Ersatzschaltung einer Paralleldrahtleitung

und den Durchmesser $2r$ der beiden Leiter charakterisiert. Durch die Geometrie werden die Kapazität C' und die Induktivität L' pro Meter bestimmt. Im Vakuum gilt:

$$\frac{L}{l} = L' = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\ln \frac{d}{r} + \frac{1}{4} \right) \approx \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r} \quad ; \text{ sowie} \quad (1)$$

$$\frac{C}{l} = C' = \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{(d-r)}{r}} \cong \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \left(\frac{d}{2r} + \sqrt{\left(\frac{d}{2r} \right)^2 - 1} \right)} \approx \frac{\pi \epsilon_0}{\ln \frac{d}{r}} \quad . \quad (2)$$

(Die Näherungen gelten für große Abstände d beider Drähte.)

2.2 Die Telegraphengleichung für die ideale Leitung

Große technische Bedeutung haben Leitungen z. B. auch bei der Hochspannungs-Energieübertragung mit Fernleitungen; historisch wurde die Theorie im Zusammenhang mit der Telegraphie entwickelt. Wendet man auf das Ersatzschaltbild der Abb. 1 den Maschen- bzw. Knoten-Satz an, so erhält man

$$\begin{aligned} U(x, t) - U(x + \Delta x, t) &= R' \Delta x I(x, t) + L' \Delta x \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} \\ I(x, t) - I(x + \Delta x, t) &= G' \Delta x U(x, t) + C' \Delta x \frac{\partial U(x + \Delta x, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (3)$$

Für die infinitesimalen Änderungen von Strom bzw. Spannung längs der Leitung findet man aus Gl.(3) im eingeschwungenen Zustand

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = R' I + L' \frac{\partial I}{\partial t} \quad (a); \quad -\frac{\partial I}{\partial x} = G' U + C' \frac{\partial U}{\partial t} \quad (b) \quad . \quad (4)$$

Bei der idealen Leitung sind der Leitungswiderstand $\frac{R}{l} = R'$ und die Querableitung $\frac{G}{l} = G'$ zu vernachlässigen. Durch Differenzieren von Gl. (4a) und Einsetzen von $\frac{\partial I}{\partial x}$ aus Gl. (4b) ergeben

sich für die Spannung und den Strom Wellengleichungen. Diese Telegraphengleichungen lauten bei vernachlässigter Dämpfung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = L' C' \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = L' C' \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (5)$$

mit den Lösungen, gleichphasig für Strom und Spannung

$$U(x, t) = \hat{U}_{(+)} \cos(\omega t - kx) \quad (a); \quad I(x, t) = \hat{I}_{(+)} \cos(\omega t - kx) \quad (b) \quad (6)$$

$$\text{mit} \quad v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{L' C'}} \quad . \quad (7)$$

Danach breiten sich entsprechend der Gln. (1,2,7) die Wellen unabhängig von der Frequenz und im Vakuum für größere Abstände d näherungsweise mit Lichtgeschwindigkeit aus ($v_{ph} \approx c_0$; z. B. in positiver x-Richtung (+)). Die den Lösungen (6a,b) zugeordneten Felder $\vec{E}(x, t)$; $\vec{H}(x, t)$ stehen senkrecht aufeinander.

2.3 Wellenwiderstand und Reflexion

2.3.1 Wellenwiderstand $Z_0 = \frac{\hat{U}}{\hat{I}}$

Wendet man auf Gl. (6a) die Gl. (4a) an, so folgt in (+x)-Richtung:

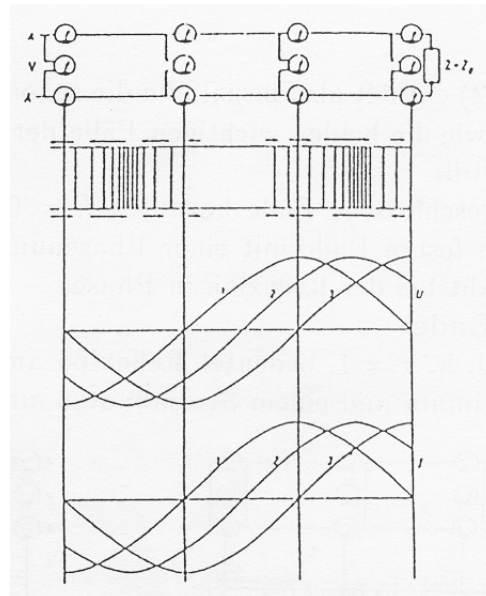
$$k \hat{U}_{(+)} = \hat{I}_{(+)} \omega L' \quad ; \quad \frac{\hat{U}_{(+)}}{\hat{I}_{(+)}} = \frac{\omega L'}{k} = v_{ph} L' = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = Z_0 \quad ; \quad (8)$$

bzw. $\frac{\hat{U}_{(-)}}{\hat{I}_{(-)}} = -Z_0$ für eine sich in (-x)-Richtung ausbreitende Welle.

2.3.2 Fortlaufende Welle

Ist die Lecherleitung mit einem Ohmschen Widerstand $R = Z_0$ abgeschlossen, so läuft über die Leitung eine Welle und transportiert Energie zum Abschlußwiderstand, z. B. bei der Energieübertragung auf einer Hochspannungsleitung.

Abb. 2: Strom, Spannung und Amplituden bei der leitungsgeführten, fortlaufenden Welle für drei Zeiten (n. Simonyi)



2.3.3 Reflexion

Von $-\infty$ kommend soll die ungedämpfte Welle den Ort $x=0$ erreichen, wo die Leitung mit einem Ohmschen Widerstand $R \neq Z_0$ abgeschlossen sei. Als Randbedingung bestimmt R das Verhältnis von U und I , d. h.

$$\left(\frac{U(x, t)}{I(x, t)} \right)_{(x=0)} = R \quad . \quad (9)$$

Die Bedingung (9) kann nur erfüllt werden, wenn man als Lösung von Gl. (5) gleichzeitig eine sich in (+x)- sowie in (-x)- Richtung ausbreitende Welle zuläßt.

$$U(x, t)_{(+)} + U(x, t)_{(-)} = \hat{U}_{(+)} \cos(\omega t - kx) + \hat{U}_{(-)} \cos(\omega t + kx) \quad (10)$$

$$I(x, t)_{(+)} + I(x, t)_{(-)} = \hat{I}_{(+)} \cos(\omega t - kx) + \hat{I}_{(-)} \cos(\omega t + kx) \quad (11)$$

Daraus folgt unter Beachtung der Gln. (9,8) und $x=0$

$$\left(\frac{U(x, t)}{I(x, t)} \right)_{(x=0)} = R = \frac{U(x, t)_{(+)} + U(x, t)_{(-)}}{I(x, t)_{(+)} + I(x, t)_{(-)}} = \frac{(\hat{U}_{(+)} + \hat{U}_{(-)})}{(\hat{I}_{(+)} + \hat{I}_{(-)})};$$

$$R = \frac{(\hat{U}_{(+)} + \hat{U}_{(-)})}{(\frac{\hat{U}_{(+)}}{Z_0} - \frac{\hat{U}_{(-)}}{Z_0})} = Z_0 \cdot \frac{(1 + \frac{\hat{U}_{(-)}}{\hat{U}_{(+)}})}{(1 - \frac{\hat{U}_{(-)}}{\hat{U}_{(+)}})} = Z_0 \cdot \frac{(1 + r)}{(1 - r)} \quad \text{oder} \quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{R} - \mathbf{Z}_0}{\mathbf{R} + \mathbf{Z}_0}. \quad (12)$$

Abweichungen des Abschlußwiderstandes R von Z_0 führen demnach zu teilweiser Reflexion mit dem Reflexionsfaktor r als relatives Maß für die reflektierte Amplitude ($r = \frac{\hat{U}_{(-)}}{\hat{U}_{(+)}}$).

Die Gl. (12) enthält als Spezialfälle die schon erwähnte fortlaufende Welle ($r = 0$) sowie die beiden wichtigen Fälle der **Lecherleitung**:

Kurzschluß:

Das kurzgeschlossene Ende bedeutet $R = 0$ bzw. $r = -1$ und eine Reflexion am festen Ende mit einer Phasenumkehr für die Spannung. Der Strom bleibt bei der Reflexion in Phase.

Offenes Ende:

$R \rightarrow \infty$, d. h. $r = 1$, bedeutet Reflexion am losen Ende mit einem Spannungsmaximum und einem Stromknoten am Ende.

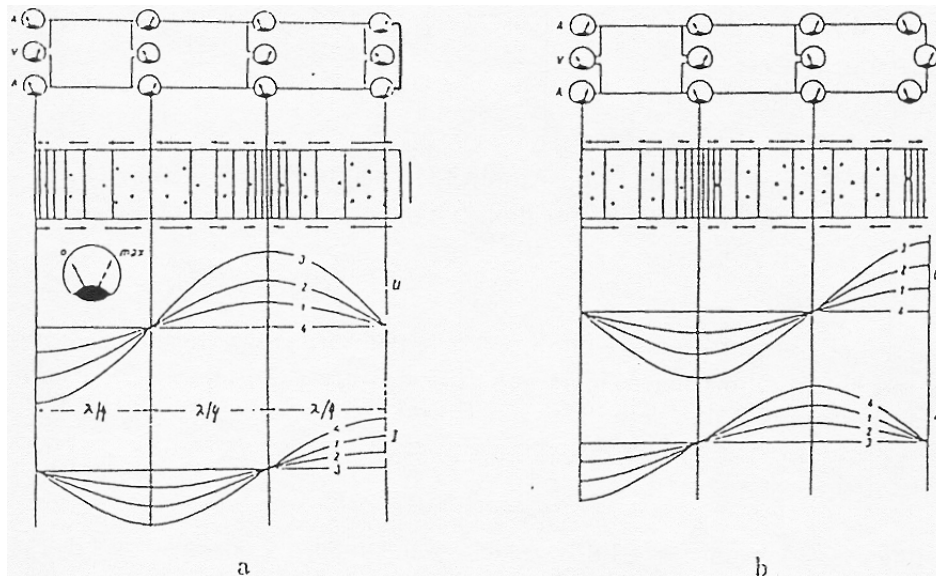


Abb. 3: Strom und Spannungsamplituden für vier Zeiten für die kurzgeschlossene (a) und offene (b) ideale Lecherleitung

2.4 Stehende Wellen

Sowohl bei der kurzgeschlossenen als auch der offenen Lecher-Leitung kommt es zur Ausbildung stehender Wellen. Bezüglich des Phasensprungs ($\varphi = 0$ oder π) bei der Reflexion und auch hinsichtlich der Lage der Knoten und Bäuche verhalten sich Strom und Spannung komplementär.

In der Abbildung 3 a bzw. 3b sind diese komplementären Verhältnisse für die Strom- und Spannungs-Bäuche bzw. -Knoten für beide Fälle dargestellt.

Überlagert man z. B. $U(x,t)_{(+)} = \hat{U} \cos(\omega t - kx)$ mit $U(x,t)_{(-)} = \hat{U} \cos(\omega t + kx + \pi) = -\hat{U} \cos(\omega t + kx)$, so folgt als Gleichung für die stehende Welle

$$U_{res} = 2\hat{U} \sin kx \cdot \sin \omega t \quad . \quad (13)$$

Zusammenfassend stellen sich alle 4 komplementären Fälle wie folgt dar (Tab. 1):

Tab. 1:

Ende	Phasensprung φ		Resultierende	
	U	I	U_{res}/\hat{U}	I_{res}/\hat{I}
kurz	π	0	$2\sin kx \cdot \sin \omega t$	$2\cos kx \cdot \cos \omega t$
offen	0	π	$2\cos kx \cdot \cos \omega t$	$2\sin kx \cdot \sin \omega t$

2.5 Kurze Leitungen

Beträgt die Gesamtlänge l nur wenige Vielfache von $\lambda/4$, so ergeben sich analog zu den Musikinstrumenten Resonanzkreise. Diese können ohne Änderung der Eigenschaften im Spannungsknoten kurzgeschlossen bzw. im Stromknoten geöffnet werden. Die zugeordneten Wellenlängen bestimmen sich für die beiderseits offene (a), beiderseits geschlossene (b) ($n=1,2,3,\dots$) und einseitig offene Lecherleitung ($n=0,1,2,3,\dots$) (c) zu

$$\lambda_n = \frac{2}{n} l \quad (a) \quad ; \quad \lambda_n = \frac{2}{n} l \quad (b) \quad ; \quad \lambda_n = \frac{4}{2n+1} l \quad (c) \quad . \quad (14)$$

2.6 Einflüsse der Dämpfung

Sind R' und G' im Vergleich mit den Scheinwiderständen nicht zu vernachlässigen, so wird die Theorie wesentlich komplizierter. Der Wellenwiderstand wird komplex ($Z_0 = \sqrt{\frac{R+j\omega L'}{G+j\omega C'}}$) und die Phasengeschwindigkeit größer und frequenzabhängig. Zu beachten ist ferner, daß R' infolge des Skin-Effekts und G' wegen der dielektrischen Verluste mit der Frequenz ansteigen.

Die Amplitude der fortlaufenden Welle nimmt mit $e^{-\alpha x}$ ($\alpha =$ komplexer Dämpfungsfaktor) ab entsprechend

$$U(x,t) = \hat{U} e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - kx)} \quad . \quad (15)$$

Nur in zwei Fällen ergeben sich für α und v_{ph} übersichtliche Resultate:

Für **Geringe Dämpfung und $G'=0$** (gut isolierte Leitungen) gilt:

$$\alpha \cong \frac{R'}{2} \sqrt{\frac{C'}{L'}} \quad ; \quad v_{ph} \cong \frac{1}{L'C'} \left[1 - \frac{R'^2}{8\omega^2 L'^2} \right] \quad , \quad (16)$$

worauf die für Fernleitungen wichtige Erkenntnis beruht, durch Einbau von (Pupin-) Spulen die Dämpfung zu reduzieren (Erhöhung von L').

Bei **sehr großer Dämpfung** werden α und v_{ph} reell und frequenzunabhängig.

$$\alpha \cong \sqrt{R'G'} \quad \text{sowie} \quad v_{ph} \cong \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \quad . \quad (17)$$

Die Ausbildung von **stehenden Wellen mit starker Dämpfung** auf der Lecherleitung wird nur in der Nähe der Reflexionsstelle zu beobachten sein, da in größer Entfernung davon die Amplituden beider Wellen zu unterschiedlich sind.

3 Experimente

3.1 Anordnung

Der Dezimeterwellen-Sender wird induktiv an den kurzgeschlossenen Anfang der Lecherleitung angekoppelt. Im Fall der am Ende offenen Leitung kommt es nur dann zur Ausbildung einer stehenden Welle, wenn die Gesamtlänge entsprechend Gl. (14c) ein ungerades Vielfaches von $\lambda/4$ ist. Demgegenüber kann im Falle des kurzgeschlossenen Endes der Kurzschlußbügel zur Abstimmung beliebig verschoben und damit die Gesamtlänge nach Gl. (14b) abgestimmt werden.

3.2 Nachweis der Bäuche

3.2.1 Strombäuche

1. Eine entsprechend Abb. 4a symmetrisch zum Strom-Maximum eingehängte Drahtschleife mit Glühlampe leuchtet infolge der induzierten Spannung.
2. Nach Abb. 4b legt man die Anschlußdrähte der Lampe quer über die Leitung.

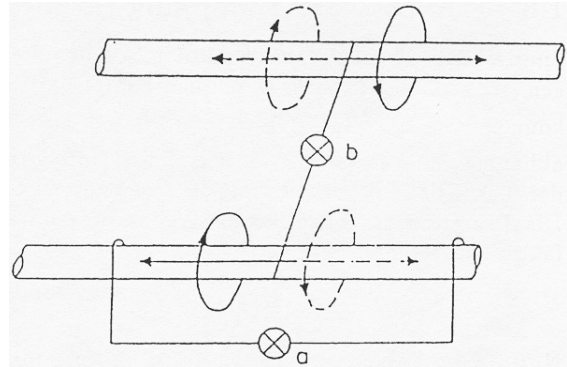


Abb. 4: Nachweis des Strombauches

3.2.2 Spannungsbauch, $\lambda/4$ - Leitung

1. Im Spannungsbauch leuchtet eine Glimmlampe.
2. Eine am Ende kurzgeschlossene $\lambda/4$ - Leitung, die mit dem offenen Ende senkrecht zur Lecherleitung am Ort des Bauches angebracht wird, koppelt Energie aus und zeigt am ihrem geschlossenen Ende einen Strombauch. Dieser Strombauch kann über die induzierte Spannung mit einer Glühlampe, die entsprechend Abb. 4a beiderseits des Maximums anliegt, angezeigt werden.

Oder eine Diode richtet die induzierte Spannung gleich und nach Glättung mit einer Drossel und einem Ladekondensator wird die Gleichspannung mit einem Multi-
meter gemessen (Abb. 5).

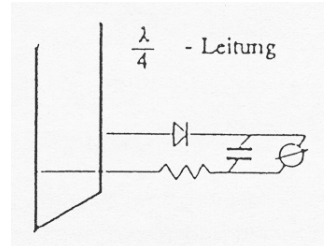


Abb. 5: Messung des Spannungsbauches mit der $\lambda/4$ - Leitung

3.3 Wellenausbreitung in Luft und in Wasser

Die Wellenlänge wird zunächst aus den Knoten- oder Bauch- Abständen in Luft bestimmt.

Anschließend wird nach Abb. 6 verfahren. Durch die $\lambda/2$ - Strecke in Luft wird erreicht, daß die Welle an einem Spannungsknoten in die Flüssigkeit eintritt.

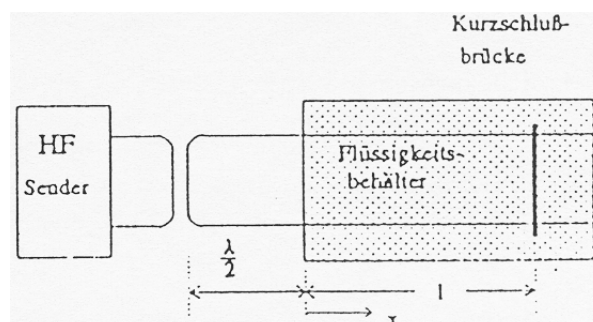


Abb. 6: Lecherleitung in Wasser

Bei festgehaltenem Indikator (z. B. am Ort des Strombauches) wird bei Variation der Position des Kurzschlußbügels unter Wasser dessen Stellung für jedes erreichte Maximum notiert. Der Abstand der Maxima entspricht $\lambda/2$. Da die Permeabilität des Wassers $\mu_W = 1$ ist, verhalten sich entsprechend Gl. (7) die Wellenlänge bzw. die Phasengeschwindigkeit im Wasser zu den Werten in Luft wie $\sqrt{\epsilon_W} : 1$. (Man vergleiche das Ergebnis mit der bekannten Brechzahl des Wassers für optische Frequenzen!)

4 Fragen

1. Maxwell'sche Gleichungen.
2. Gleichung ebener elektromagnetischer Wellen.
3. Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen auf Leitungen.
4. Kennwerte einer Parallel-Drahtleitung; Unterschied zur Koaxialleitung.
5. Ersatzschaltbild und Feldlinienbild bei einer Lecherleitung.
6. Wellenwiderstand und Reflexion.
7. Spannung und Strom am Ende der kurzgeschlossenen und offenen Lecherleitung; stehende Wellen.
8. Nachweis von Spannungs- und Strom-Bäuchen bei stehenden Wellen.
9. Brechzahl, Dispersion, Maxwell'sche Relation.

5 Aufgaben

1. Überprüfen Sie Tab. 1!
2. Für die theoretische Vorbereitung sind für die Lecherleitung: $r = 2,5$ mm; $d = 22$ mm; $R' = 0,01$ Ω /m; $G' = 0$; $f = 500$ MHz in verschiedenen Näherungen die Leitungsgrößen C' ; L' ; Z_0 sowie v_{ph} zu berechnen.

Literatur

- [1] . Recknagel, Physik, E.- Lehre
- [2] . Simonyi, Theoretische Elektrotechnik, V.d. Wiss. Bln. 1989
- [3] . -G. Unger, Elektromagnetische Wellen auf Leitungen, V. Hüthig, Heidelberg 1991.
- [4] Bergmann-Schäfer, Physik, E.- Lehre, V. de Cruyter 1987