

Technische Universität Dresden Fachrichtung Physik A. Schwab, C. Schröter 09/2006	Physikalisches Praktikum Versuch: MZ
---	---

## Magnetfeldmessung an Zylinderspulen (MZ)

### 1. Einleitung

Nach dem Durchflutungsgesetz ist jeder stromdurchflossener Leiter von einem Magnetfeld umgeben. Durch das Aufwickeln des Leiters auf einen Spulenkörper können relativ hohe Feldstärken erreicht werden. Der Vorteil gegenüber Permanentmagneten liegt in der Regelbarkeit der Feldstärke über den Spulenstrom. Technisch interessant sind oft homogene Magnetfelder, d.h. eine möglichst kleine Änderung der Magnetfeldstärke über einen möglichst großen Raumbereich. Solche Magnetfelder kann man im Innern langer Spulen erzeugen, jedoch ist dieser Bereich experimentell schwer zugänglich. Dieses Problem kann durch die sog. Helmholtz-Konfiguration zweier Spulen gelöst werden, bei welcher in einem frei zugänglichen Bereich ein homogenes Magnetfeld besteht. Dieselbe Anordnung erlaubt auch die Erzeugung von Magnetfeldern mit konstantem Gradienten, wie sie beispielsweise in der Magnetresonanztomographie benötigt werden.

### 2. Aufgabenstellung

a) Messen Sie die axiale Flussdichte  $B_a(z)$  einer einlagigen Zylinderspule vom Radius  $R$  und der Länge  $L$  in Abhängigkeit von der  $z$ -Koordinate. Vergleichen Sie Ihr Messergebnis mit der nach dem Biot-Savartschen-Gesetz berechneten axialen Flussdichte.

b) Untersuchen Sie an einer einlagigen Zylinderspule den Zusammenhang zwischen der axialen Flussdichte  $B_a$  und der Windungszahldichte  $n$  in der Spulenmitte bei fest vorgegebener Stromstärke  $I=10$  A. Stellen Sie diesen Zusammenhang graphisch dar und bestimmen Sie aus dem Anstieg des  $B_a(n)$ -Zusammenhangs die magnetische Feldkonstante  $\mu_0$ .

c) Messen Sie die axiale Flussdichte  $B_a$  eines Helmholtzspulenpaares für den Fall, dass der Spulenabstand  $D$  gleich dem mittleren Spulenradius  $r_m$  (mehrlagige Zylinderspulen) ist. Untersuchen Sie dabei die Fälle:

- i) gleichsinniger Stromfluss durch das Spulenpaar
- ii) gegensinniger Stromfluss durch das Spulenpaar.

Vergleichen Sie Ihre Messergebnisse mit dem aus dem Biot-Savart-Gesetz folgendem Zusammenhang.

### 3. Theoretische Grundlagen

#### 3.1 Das Magnetfeld im Innern einer sehr langen Zylinderspule

Nach dem Durchflutungsgesetz (1. Maxwell'sche Gleichung der Magnetostatik)

$$\oint_{(A)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad (1)$$

ist jede elektrische Stromdichte  $\vec{j}$  mit einer magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  verknüpft. Das Linienelement  $d\vec{r}$  gehört zu einem beliebig wählbaren geschlossenen Integrationsweg (A), der die Fläche A umschließt.

Um mit Gl. (1) das Feld im Innern einer langen Spule (Radius  $R \ll$  Spulenlänge  $L$ ) berechnen zu können, ist folgender Integrationsweg (A) zu wählen: Man bewegt sich zunächst entlang der Spulenachse, auf der das Feld nahezu homogen ist, und schließt den Weg außerhalb der Spule, wo praktisch kein Feld mehr vorhanden ist. Die linke Seite von Gl. (1) ergibt somit  $H \cdot L$ . Die Fläche, die der Integrationsweg umschließt, wird  $N$ -mal von der Stromdichte  $\vec{j}$  durchsetzt ( $N$ -Windungszahl). Das Integral über die Fläche A (rechte Seite von Gl. (1)) ergibt daher  $N \cdot I$  ( $I$ -Stromstärke). Somit ergibt sich für die Magnetfeldstärke einer langen Zylinderspule

$$H_{z,\text{unendl}} = \frac{N \cdot I}{L} = n \cdot I \quad (2)$$

mit  $n=N/L$  der Windungszahldichte.

Die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  hängt mit der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  in Luft über das Materialgesetz

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} = \mu \cdot \vec{H} \quad (3)$$

zusammen, wobei  $\mu_0$  die magnetische Feldkonstante bezeichnet und  $\mu_r$  der relativen Permeabilität entspricht. Für Luft ist  $\mu_r \approx 1$ .

#### 3.2 Das Magnetfeld einer endlichen Zylinderspule

##### 3.2.1 Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Kreisringes

Die Grundlage für die Berechnung von beliebigen zylindrischen Spulen stellt die kreisförmige Stromschleife dar (Abb.1).

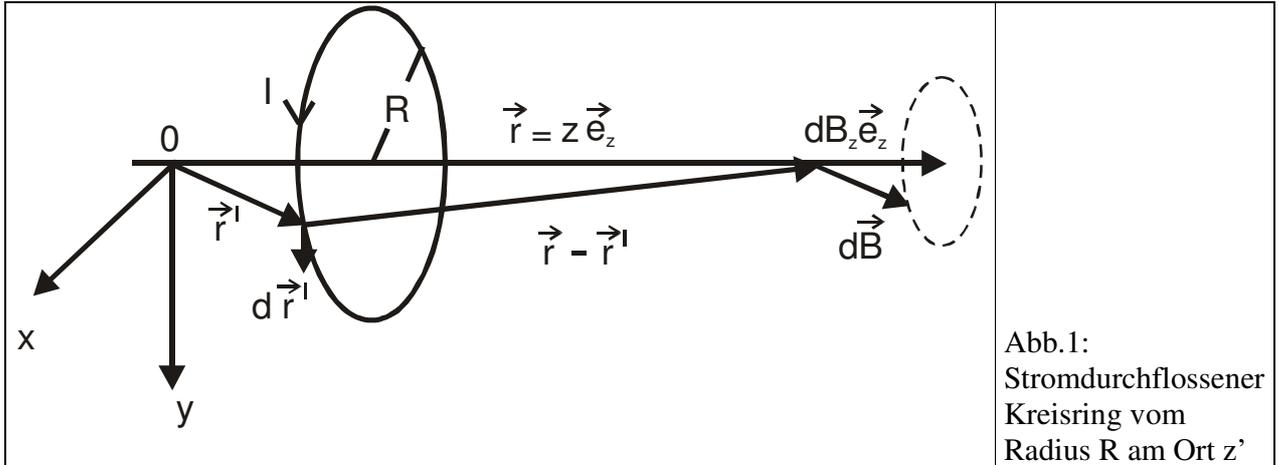


Abb.1:  
Stromdurchflossener  
Kreisring vom  
Radius R am Ort z'

Die magnetische Flussdichte des stromdurchflossenen Kreisrings  $\vec{B}_R$  auf der Symmetrieachse z folgt aus dem Gesetz von Biot-Savart zu

$$\vec{B}_R(z, z') = \oint_C d\vec{B} = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \oint_C \frac{d\vec{r}' \times (z \cdot \vec{e}_z - \vec{r}')}{|z \cdot \vec{e}_z - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu \cdot I}{2} \cdot \frac{R^2 \cdot \vec{e}_z}{[(z - z')^2 + R^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

mit  $d\vec{r}' = ds \vec{e}_\varphi$  dem Linienelement des Kreises C vom Radius R ( $\vec{e}_\varphi$ -Tangenteneinheitsvektor des Kreises C). Die Radialkomponenten des Magnetfeldes, erzeugt durch die einzelnen Stromelemente, kompensieren sich.

In großer Entfernung des jeweiligen Aufpunktes P (x,y,z) von der Kreisschleife am Ort z' (Dipolnäherung  $R \ll (x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{1/2}$ ) erzeugt diese ein Dipolfeld. In der x-z-Ebene gilt:

$$\vec{B}_{Dip}(x, z, z') = \frac{R^2 \cdot I \cdot \mu}{4 \cdot (x^2 + (z - z')^2)^{\frac{5}{2}}} (3 \cdot x \cdot (z - z') \cdot \vec{e}_x + (2 \cdot (z - z')^2 - x^2) \vec{e}_z). \quad (5)$$

### 3.2.2 Magnetfeld der einlagigen Zylinderspule

Bei genügend großer Windungszahldichte  $n = N/L$  kann die endliche Zylinderspule (Solenoid) als eine Aneinanderreihung einzelner vom Strom I durchflossener Kreisringe mit dem Radius R betrachtet werden (Abb.2).

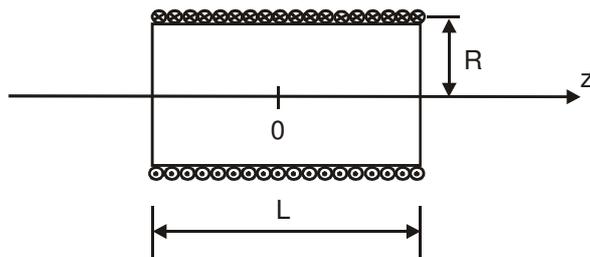


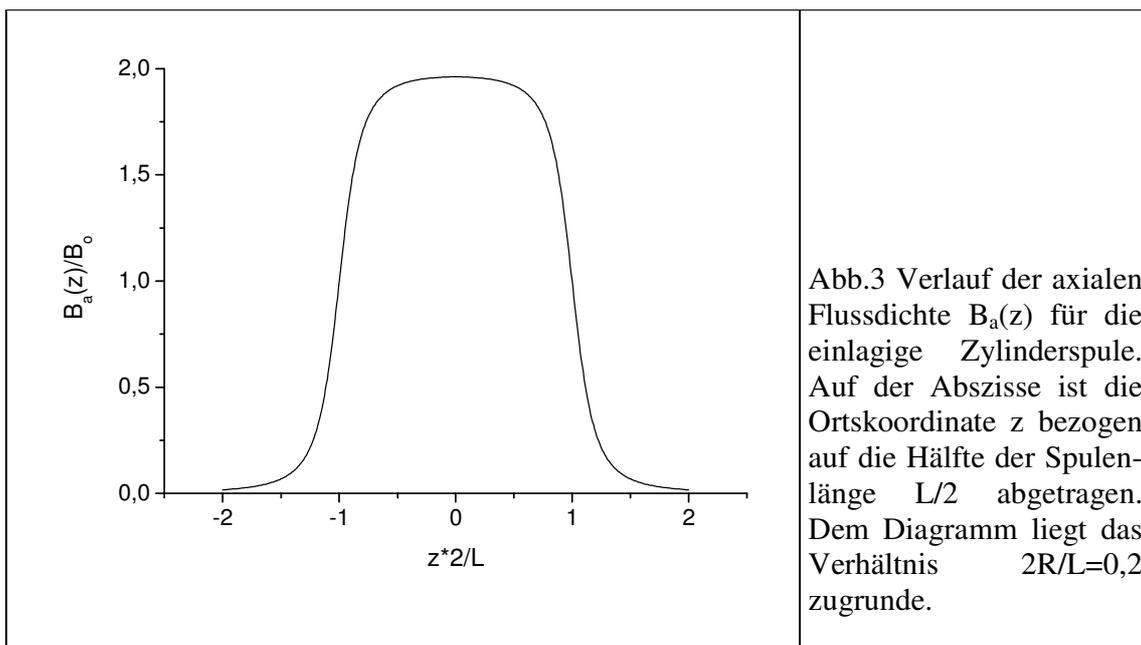
Abb.2: Zylinderspule vom Radius R und der Länge L

Das Magnetfeld der Spule folgt aus der Superposition der Magnetfelder der einzelnen stromdurchflossenen Kreisringe. Für eine als konstant angenommene Windungszahldichte n ergibt sich das Magnetfeld auf der Spulenachse z aus der Integration von Gl.(4) mit dem Bruchteil der Windungen  $dN=n \cdot dz'$  im Intervall  $dz'$  zu

$$\vec{B}(z) = n \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \vec{B}_R(z, z') dz' = \frac{nI\mu}{2} \left( \frac{z + \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2}} - \frac{z - \frac{L}{2}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} \right) \vec{e}_z = B_o \cdot f(z, R, L) \cdot \vec{e}_z = B_a(z) \cdot \vec{e}_z \quad (6)$$

mit  $B_o = nI\mu/2$ .

Aus Gl. (6) ist ersichtlich, dass die axiale Flussdichte  $B_a(z)$  sowohl vom Radius R als auch von der Länge L der Spule abhängt. Der Feldstärkeverlauf ist in Abb.3 für das Verhältnis  $2R/L=0,2$  aufgezeichnet.



Das Magnetfeld ist maximal in der Spulenmitte bei  $z=0$  und hat den Wert

$$B_m = B_a(0) = \frac{2 \cdot B_o}{\sqrt{\frac{4 \cdot R^2}{L^2} + 1}} \quad (7)$$

Für  $R \ll L$  geht Gl. (7) über in

$$B_m \cong 2 \cdot B_o = n \cdot I \cdot \mu, \quad (8)$$

was dem Magnetfeld der langen Spule (Gl.(2,3)) entspricht.

Am Spulenanfang ( $z_a=-L/2$ ) und am Spulenende ( $z_e=L/2$ ) ist der Wert des Magnetfeldes durch

$$B_{Rand} = \frac{B_o}{\sqrt{\frac{R^2}{L^2} + 1}} \quad (9)$$

gegeben. Für  $R \ll L$  geht Gl. (9) über in

$$B_{Rand} \cong B_o = \frac{1}{2} \cdot n \cdot I \cdot \mu. \quad (10)$$

Das heißt, unmittelbar am Spulenrand ist die Feldstärke noch gerade halb so groß wie in der Spulenmitte.

### 3.2.3 Das Magnetfeld der mehrlagigen Zylinderspule

Für mehrlagige Zylinderspulen ist bei bekannten Radien ( $r_i$  -innerer Radius;  $r_a$  -äußerer Radius) des Wickelkörpers und bei homogen verteilter Windungszahl  $N$  ( $dN = N \cdot \frac{dz'}{L} \cdot \frac{dR}{r_a - r_i}$ ) das Magnetfeld auf der Spulenachse durch das Integral

$$B_a(z) = N \int_{r_i}^{r_a} \frac{dR}{r_a - r_i} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} B_R(z, z') \frac{dz'}{L} = \frac{n \cdot I \cdot \mu}{2} \cdot g(z, L, r_a, r_i) = B_o \cdot g(z, L, r_a, r_i), \quad (11)$$

gegeben, wobei

$$g(z, L, r_a, r_i) = \left( \left( z + \frac{L}{2} \right) \cdot \ln \left( \frac{r_a + \sqrt{r_a^2 + \left( z + \frac{L}{2} \right)^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + \left( z + \frac{L}{2} \right)^2}} \right) - \left( z - \frac{L}{2} \right) \cdot \ln \left( \frac{r_a + \sqrt{r_a^2 + \left( z - \frac{L}{2} \right)^2}}{r_i + \sqrt{r_i^2 + \left( z - \frac{L}{2} \right)^2}} \right) \right) \cdot \frac{1}{r_a - r_i}$$

bezeichnet.

Ist  $\Delta r = r_a - r_i \ll r_m = (r_a + r_i)/2$  ( $r_m$ -mittlerer Spulenradius), dann ist Gl. (6) mit  $R = r_m$  eine sehr gute Näherung für den axialen Feldverlauf der mehrlagigen Zylinderspule.

### 3.3 Das Magnetfeld der Helmholtzspule

Untersuchungen, die einen hohen Homogenitätsgrad des Magnetfeldes erfordern, werden oft mit der sog. Helmholtz-Spule durchgeführt (Abb.4).

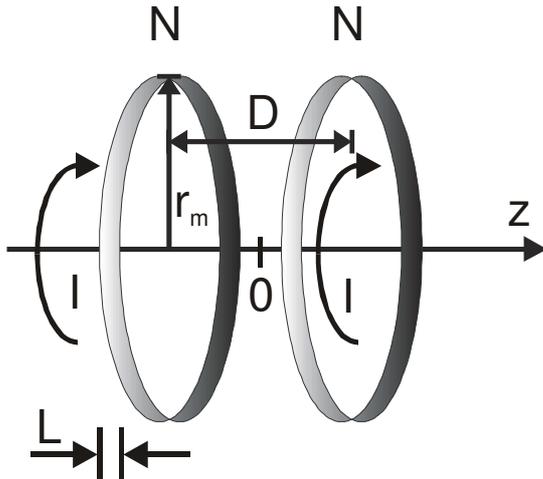


Abb. 4: Helmholtz-Spule: Zwei Zylinderspulen, die sich im Abstand D gegenüberstehen

Bei der Helmholtzspule, die im Experiment verwendet wird, stehen im Abstand D zwei mehrlagige dünne Spulen mit den Radien  $r_i$ ,  $r_a$ , der Windungszahl N, und der Länge L parallel zueinander. Zwischen den Spulen ergibt sich bei gleichsinnigem Stromfluss der Stromstärke I ein nahezu homogenes Magnetfeld, wenn der Abstand  $D \cong r_m$  ist. Die magnetische Feldstärke auf der Spulenachse z folgt aus der Addition der Magnetfelder der einzelnen Spulen. Mit Hilfe von Gl. (11) ergibt sich für die magnetische Flussdichte der Helmholtzspule

$$B_{a,H}(z) = B_o \cdot \left( g\left(z + \frac{D}{2}, L, r_a, r_i\right) + g\left(z - \frac{D}{2}, L, r_a, r_i\right) \right), \quad (12)$$

wobei man den Nullpunkt der z-Achse zweckmäßigerweise in den Mittelpunkt 0 der Spulenordnung legt. Die axiale Homogenität des Feldes ist der Abb. 5a zu entnehmen. Bei gegensinnigem Stromfluss in den einzelnen Spulen der Helmholtzkonfiguration ergibt sich im Bereich zwischen den Spulen nahe der Achse z ein Raumbereich, in dem der Gradient des Magnetfeldes nahezu konstant ist (Abb.5b). Es gilt in diesem Fall für die magnetische Flussdichte

$$B_{a,G}(z) = B_o \cdot \left( g\left(z + \frac{D}{2}, L, r_a, r_i\right) - g\left(z - \frac{D}{2}, L, r_a, r_i\right) \right). \quad (13)$$

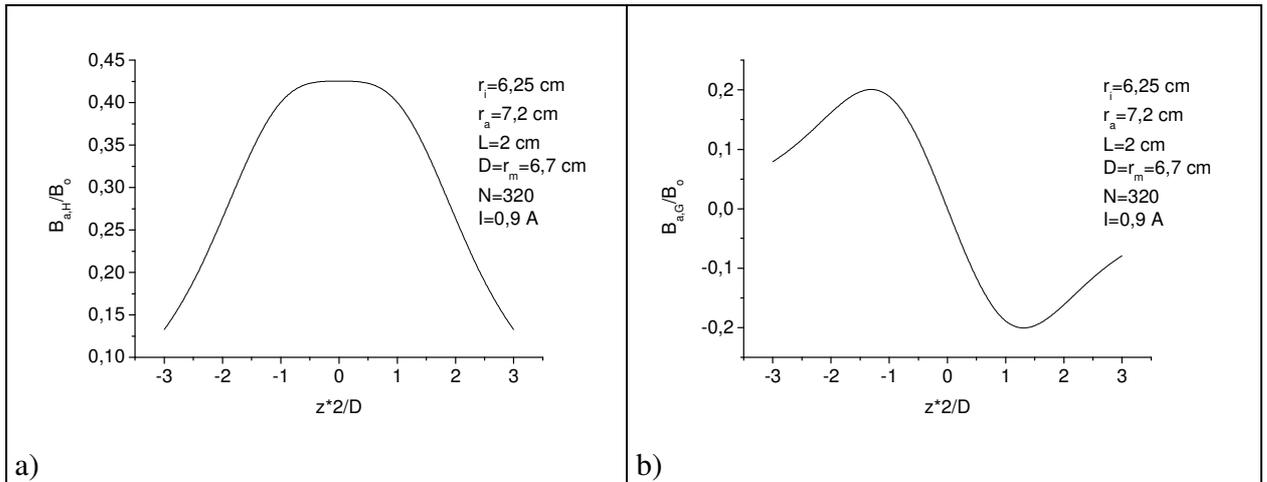


Abb.5: Axiale Flussdichte der Helmholtzspule bei gleichsinnigem Stromfluss (a) und bei gegensinnigem Stromfluss (b)

#### 2.4 Der Hall-Effekt

Wird ein stromdurchflossener Leiter (Stromstärke  $I$ ) senkrecht zur Stromrichtung von einem Magnetfeld durchsetzt (Abb.6), so wirkt auf die Leitungselektronen, die sich mit der Driftgeschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegen, die Lorentzkraft  $\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$ .

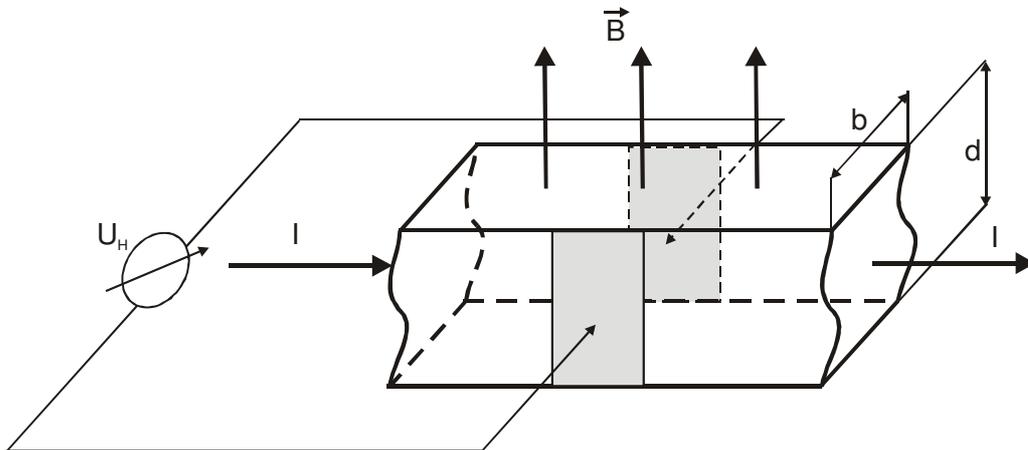


Abb. 6: Hall-Effekt

Die Elektronen werden senkrecht zu  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  abgelenkt und bauen quer zur Stromrichtung ein elektrisches Feld mit der Feldstärke  $E=U_H/b$  auf. Dieses Feld übt auf die Elektronen eine elektrostatische Kraft  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  aus. Zwischen  $\vec{F}_L$  und  $\vec{F}_e$  stellt sich ein Kräftegleichgewicht ein. Aus dem Kräftegleichgewicht folgt

$$-e \cdot v \cdot B - e \cdot \frac{U_H}{b} = 0. \quad (14)$$

Durch die Querschnittfläche des Leiters  $A=b \cdot d$  tritt während der Zeitspanne  $\Delta t$  die Ladungsmenge

$$\Delta Q = -b \cdot d \cdot v \cdot \Delta t \cdot n_e \cdot e \quad (15)$$

( $n_e$ - Anzahldichte der Leitungselektronen,  $e$ - Elementarladung).

Wegen  $I=\Delta Q/\Delta t$  ist

$$I = -b \cdot d \cdot v \cdot n_e \cdot e. \quad (16)$$

Wird  $e \cdot v$  in Gl. (16) ersetzt durch  $e \cdot v$  aus Gl. (14), dann ergibt sich die Spannung  $U_H$  zu

$$U_H = \frac{1}{n_e \cdot e} \frac{I \cdot B}{d}. \quad (17)$$

Der Zusammenhang (17) zeigt, dass mit einem Leiter- oder Halbleiterplättchen (Hallsonde) die magnetische Flussdichte  $B$  über die Messung der Hallspannung  $U_H$  bestimmt werden kann, vorausgesetzt, die Hall-Konstante  $R_H=1/n_e \cdot e$ , die Stromstärke  $I$  und die Dicke  $d$  des Plättchens sind bekannt.

#### 4. Versuchsaufbau

- **Hinweis: Netzverbindung der Schaltung erst nach Prüfung durch den Betreuer herstellen!**
- Schließen Sie die jeweils zu untersuchende Zylinderspule an das Hochstromnetzgerät 52155 (einlagige Zylinderspulen) bzw. an das Statron Typ 3207 (mehrlagige Zylinderspulen) und verbinden Sie die Spule zur Messung des Spulenstromes  $I_S$  mit der 30-A-Box auf dem Sensor-Cassy, welches an das Cassy-Display angesteckt ist (Abb.7). Für die Magnetfeldmessungen mit den **einlagigen** Zylinderspulen ist als Spulenstrom  **$I= 10 \text{ A}$**  zu verwenden und bei den Magnetfeldmessungen mit den **mehrlagigen** Zylinderspulen ist  **$I= 0,9 \text{ A}$**  zu wählen.

- Verbinden Sie die axiale B-Sonde mit der B-Box auf dem Sensor-Cassy und justieren Sie die axiale B-Sonde auf die Längsachse der Zylinderspule ein. Der Reiter, in dem sich die Hallsonde befindet, ist vorher auf einer Schiene mit Bankmaßstab zu positionieren (fehlt in Abb.7).
- Das Cassy- Display ist über ein Steckernetzgerät 12 V/ 1,6 A an das Netz an zu-schließen.
- Details zur Bedienung des Cassy- Displays entnehmen Sie bitte der Platanleitung.

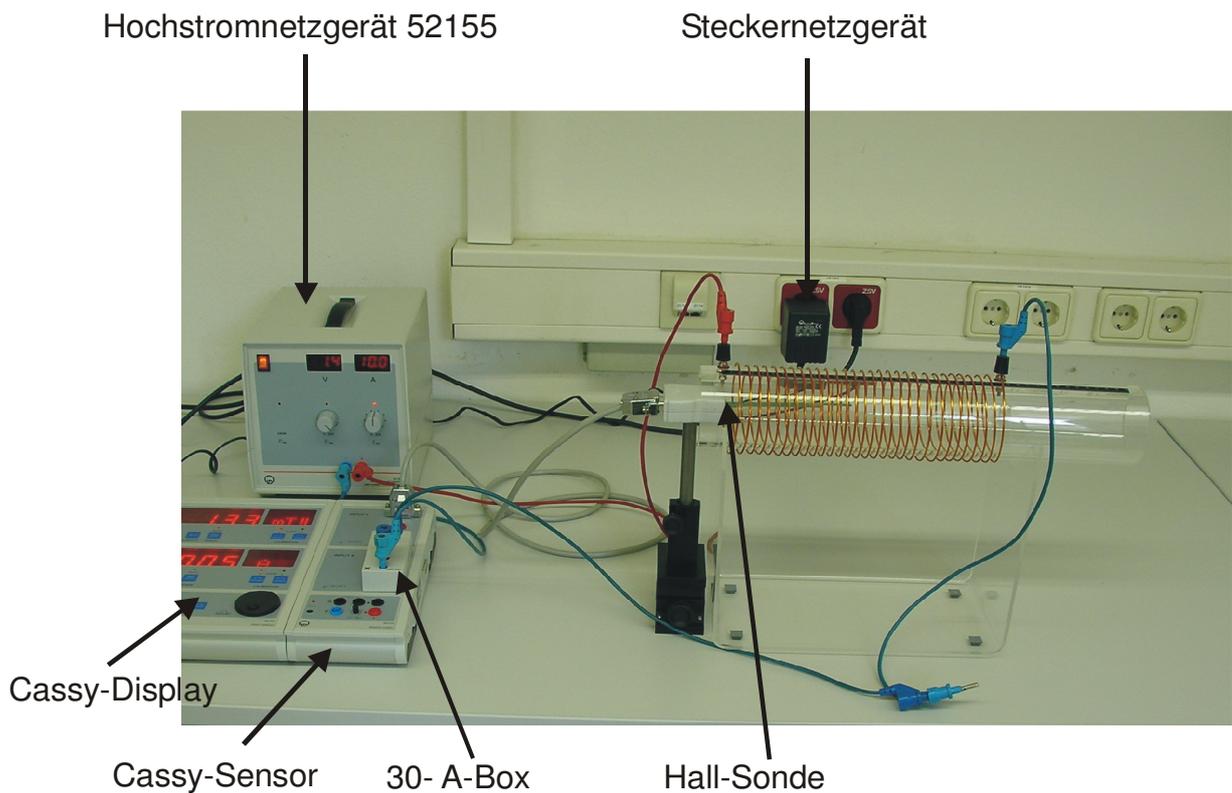


Abb.7 Prinzipieller Versuchsaufbau

## 5. Messprogramm und Auswertung

### Aufgabe 1:

- Messen Sie vor dem Anschluss der zu untersuchenden Zylinderspule an das Netzgerät den Radius  $R$  und die Länge  $L$  der Zylinderspule mit geeigneten Messinstrumenten. Bestimmen Sie durch Abzählen die Windungszahl  $N$  der jeweiligen Spule.

- Positionieren Sie die Hall-Sonde in der Mitte der Zylinderspule ( $z=0$ ) und messen Sie in Schritten von 1 cm, bei stark abnehmendem Magnetfeld in Schritten von 0,5 cm, von innen nach außen die axiale Flussdichte  $B_a(z)$ . Dabei ist für jede Sondenposition die laufende Koordinate  $z$  und der jeweilige Wert der magnetischen Flussdichte  $B_a$  zu notieren. Das Feld der Spule ist bis etwa 5 cm außerhalb der Spule zu messen.
- Stellen Sie  $B_a(z)$  graphisch dar und vergleichen Sie Ihre Messergebnisse mit den aus Gl. (6) berechneten Werten.
- Eine quantitative Fehlerbetrachtung ist nicht durchzuführen!

#### Aufgabe 2:

- Bestimmen Sie durch Abzählen die Windungszahl  $N$  einer einlagigen Zylinderspule mit einstellbarer Spulenlänge  $L$ .
- Messen Sie für 5 Windungsdichten  $n_i=N/L_i$  ( $L_1=40$  cm,  $L_2=35$  cm,  $L_3=30$ ,  $L_4=25$  cm,  $L_5=20$  cm) die axiale Flussdichte  $B_a$  in der jeweiligen Mitte der Spule ( $z=0$ ) bei einem Spulenstrom  $I=10$  A.
- **Änderungen der Spulenlänge sind nur im stromlosen Zustand der Spule vorzunehmen!**
- Stellen Sie  $B$  als Funktion von  $n$  grafisch dar und zeigen Sie, dass  $B(n)$  linear mit  $n$  anwächst. Bestimmen Sie aus dem Anstieg die magnetische Feldkonstante  $\mu_0$  für  $\mu_{r,\text{Luft}}=1$ .
- Schätzen Sie mittels einem grafischen Geradenausgleich den Größtfehler  $\Delta\mu_0$  ab!

#### Aufgabe 3:

- Messen Sie die Spulenradien  $r_i$  und  $r_a$  sowie die Spulenlänge  $L$  der Helmholtzspulen. Die Windungszahl  $N$  einer Helmholtzspule beträgt  $N=320$ .
- Positionieren Sie die Helmholtzspulen im Abstand  $D=r_m=(r_i+r_a)/2$  parallel zueinander.
- Messen Sie die axiale Flussdichte  $B_a(z)$  zwischen den Helmholtzspulen und außerhalb (bis 2 cm) in Schritten von 0,5 cm bei gleichsinnigem und gegensinnigem Stromfluss durch die Helmholtzspulen.
- Stellen Sie  $B_a(z)$  graphisch dar und vergleichen Sie Ihre Messergebnisse mit den aus den Gl. (11-13) berechneten Werten. Formeln nach Möglichkeit schon zu Hause im Taschenrechner programmieren bzw. geeignete Näherungslösungen verwenden!
- Eine quantitative Fehlerbetrachtung ist nicht durchzuführen!

## 6. Fragen

1. Wie lautet das Durchflutungsgesetz in integraler und differentieller Form für den Fall stationärer und nichtstationärer Ströme?

2. Zeichnen Sie die Magnetfeldlinien zu folgenden Anordnungen:
  - (a) gerader stromdurchflossener Draht
  - (b) zwei parallel angeordnete Drähte, durch die der Strom in die gleiche Richtung fließt
  - (c) zwei parallel angeordnete Drähte, durch die der Strom in entgegengesetzten Richtungen fließt.
3. Skizzieren Sie das Feldlinienbild des Dipolfeldes eines stromdurchflossenen Kreisringes in der x-z-Ebene (z-Achse steht senkrecht auf dem Kreisring)!
4. Welche Messverfahren gibt es für die magnetische Flussdichte?
5. Erklären Sie die Wirkungsweise einer Hallsonde!
6. Man berechne für eine einlagige Spule das mindest notwendige Verhältnis  $L/R$ , so dass in der Spulenmitte  $H_z(0) \geq 0,99 H_{z,unendl}$  beträgt.
7. Zeigen Sie durch Taylorreihenentwicklung von Gl. (11) nach Potenzen von  $\Delta r/r_m$  ( $\Delta r = r_a - r_i$ ), dass im Grenzfall  $\Delta r \ll r_m$  das axiale Magnetfeld der mehrlagigen Zylinderspule (Gl.(11)) in das Magnetfeld der einlagigen Zylinderspule (Gl.(6)) mit  $R=r_m$  übergeht!

## 7. Literatur

- [1] W. Ilberg, M. Krötsch, D. Geschke, P.Kirsten, W. Schenk, A. Schneider, H. Schulze, Physikalisches Praktikum für Anfänger, Leipzig 1994
- [2] Gerthsen (H. Vogel) Physik, V. Springer, Berlin 1995
- [3] H.-J. Paus, Physik in Experimenten und Beispielen, V. Hanser, München 1995
- [4] G. Wunsch, H.-G. Schulz, Elektromagnetische Felder, V.T. Berlin 1989
- [5] G. Mierdel, S. Wagner, Aufgaben z. Theoretischen E.-Technik, Berlin 1976