

**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN**

Fakultät Physik

Physikalisches Grundpraktikum

Versuch: **OA**

Aktualisiert: am 01. 11. 2023

Optische Abbildung

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung	2
2 Grundlagen	2
2.1 Dünne Sammell- und Zerstreuungslinsen	2
2.2 Dicke Linsen	3
2.3 Linsensysteme	6
2.4 Bildfehler	8
3 Experimentelle Verfahren	10
3.1 Brennweitenbestimmung einer dünnen Sammellinse	10
3.2 Besselsches Verfahren zur Bestimmung der Brennweite	10
3.3 Brennweitenbestimmung einer dünnen Zerstreuungslinse	11
3.4 Bestimmung von Brennweite und Hauptebenen nach Abbe	11
3.5 Bestimmung der sphärischen und chromatischen Aberration	13
4 Versuchsaufbau	13
5 Anhang	13
5.1 Zur Herleitung der Bestimmungsgleichung im Besselschen Verfahren	13
5.2 Bestimmung der sphärischen Aberration	14
Fragen	16
Literatur	16

1 Aufgabenstellung

Die grundlegenden Eigenschaften der optischen Abbildung mittels einer dünnen Linse sind weitläufig bekannt. Gegenstand dieses Versuches ist jedoch die Bestimmung von Brennweiten dicker Linsen oder Linsensystemen, wie sie beispielsweise in Kameraobjektiven eingesetzt werden. In diesem Zusammenhang sind Brennweiten jedoch nur dann aussagekräftig, wenn zudem die Lagen der Hauptebenen bekannt sind, welche in diesem Versuch für ein konkretes Linsensystem bestimmt werden sollen. Weiterhin werden zwei bedeutende Linsenfehler, die sog. sphärische und chromatische Aberration, quantitativ untersucht.

2 Grundlagen

In der Lichtoptik sind Linsen lichtdurchlässige Körper, deren Material einen höheren Brechungsindex aufweist als das umgebende Medium. Ihre Eintritts- und Austrittsflächen sind meist Kugelflächen, da diese technisch am einfachsten mit hoher Genauigkeit herstellbar sind. Sammellinsen (= Konvexlinsen) sind in der Linsenmitte dicker als am Rand, während es bei Zerstreuungslinsen (= Konkavlinsen) genau umgekehrt ist. Bei Sammellinsen wird ein parallel zur optischen Achse einfallendes Lichtbündel in dem *hinter* der Linse liegenden Brennpunkt F' gesammelt. Eine Zerstreuungslinse hingegen zerstreut das Licht, als ob es aus einem *vor* der Linse liegenden Brennpunkt F' käme. Man unterscheidet dicke und dünne Linsen. Bei dünnen Linsen lässt sich die zweimalige Brechung des Strahls an den beiden Grenzflächen durch eine Brechung an der Mittelebene der Linse ersetzen. Bei dicken Linsen ist diese Näherung nicht mehr zulässig, der Strahlenverlauf wird effektiv durch Brechung an zwei Hauptebenen (H und H') beschrieben.

2.1 Dünne Sammel- und Zerstreuungslinsen

Dünne Sammel- und Zerstreuungslinsen zeichnen sich dadurch aus, dass in guter Näherung die Hauptebenen H und H' zusammenfallen. Die entsprechend vereinfachte Strahlkonstruktion ist in Abb. 1 dargestellt.

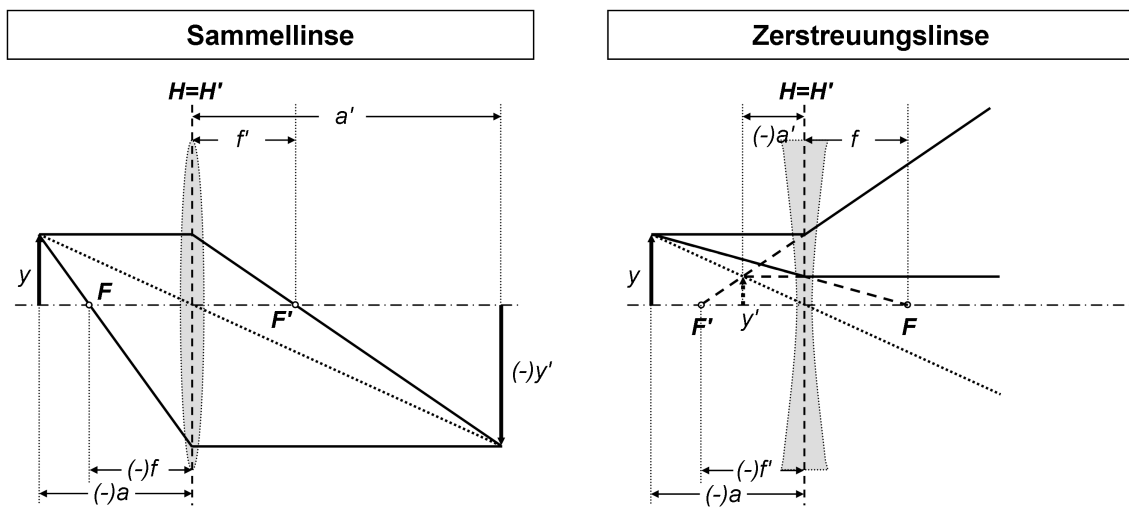


Abb. 1: Strahlengang für dünne Sammel- und Zerstreuungslinse. Die eingeklammerten Vorzeichen weisen auf die Vorzeichenkonvention hin.

Entsprechend der DIN 1335 werden Größen und Abstände, die auf den einfallenden Strahl bezogen werden, mit ungestrichenen Variablen bezeichnet, alle Größen und Abstände des ausfallenden Strahls mit gestrichenen Variablen. Weiterhin haben alle Größen vor der Linse ein negatives Vorzeichen und solche nach der Linse ein positives. Bezeichnet man mit a die Gegenstandsweite und mit a' die Bildweite, so lautet mit dieser Vorzeichenkonvention und in der Näherung für achsennahe und schlanke Strahlenbündel die Gaußsche Abbildungsgleichung für eine Linse oder Linsensystem an Luft (Brechungsindex $n = n' \approx 1$):

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} \quad \text{bzw. in Betragsschreibweise:} \quad \frac{1}{|a'|} + \frac{1}{|a|} = \frac{1}{|f'|} = \frac{1}{|f|} \quad (1)$$

Das Verhältnis Bildgröße y' zu Gegenstandsgröße y

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a} \quad (2)$$

nennt man den Abbildungsmaßstab β . Der Abbildungsmaßstab kann auch aus Gegenstands- und Bildweite bestimmt werden (vgl. Abb. 1). Dieser ist im Falle einer reellen Abbildung stets negativ.

Die bildseitige Brennweite einer Linse mit Brechungsindex n und den Krümmungsradien R, R' an Luft ergibt sich durch die sogenannte Linsenmacherformel:

$$\frac{1}{f'} = (n - 1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right).$$

Hierbei entscheiden die Vorzeichen der Krümmungsradien darüber, ob es sich um eine Sammell- oder Zerstreuungslinse handelt.

2.2 Dicke Linsen

Die Abbildung einer dicken Linse ist durch die Lagen ihrer Hauptebenen H und H' und die im Abstand f und f' (Brennweiten) von den Hauptebenen befindlichen Brennpunkte F und F' eindeutig definiert. Unter Kenntnis dieser Größen lässt sich das Bild nach folgendem Schema konstruieren (Abb. 2):

Steht der Gegenstand vor dem gegenstandsseitigen Brennpunkt F , erfolgt die Bildkonstruktion mit Hilfe der Hauptebenen so, dass der vom Gegenstand der Größe y ausgehende Parallelstrahl bis zur bildseitigen Hauptebene H' verlängert wird. Anschließend geht dieser Strahl durch den bildseitigen Brennpunkt F' . Den zweiten Strahl erhält man, indem vom Gegenstand aus der Lichtstrahl durch den gegenstandsseitigen Brennpunkt F bis zur gegenstandsseitigen Hauptebene H gezogen wird, und von dort aus parallel zur optischen Achse verlängert wird. Am Schnittpunkt beider Strahlen findet man ein reelles, umgekehrtes Bild der Größe y' . Aufgrund der Bildumkehrung besitzt y' ein inverses Vorzeichen zu y .

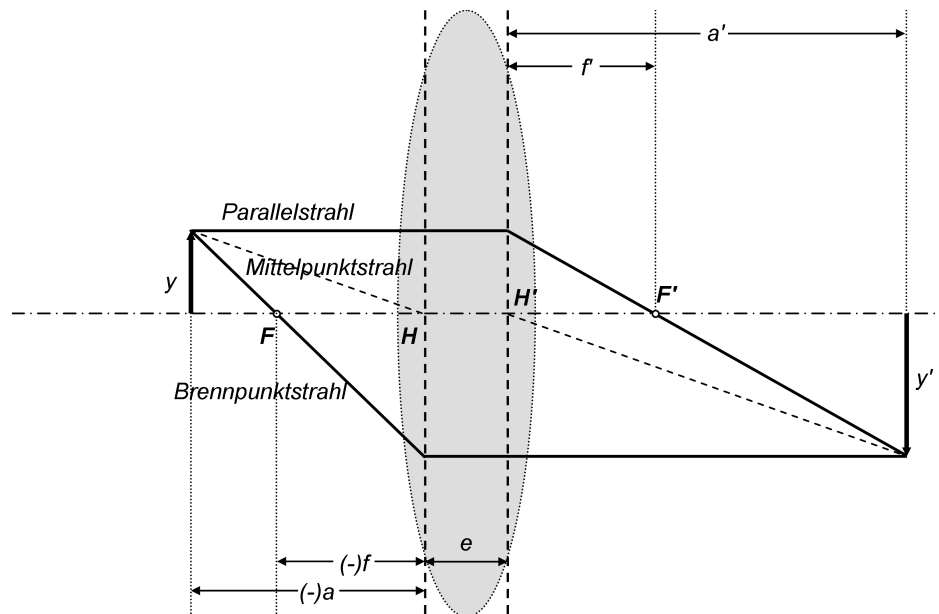


Abb. 2: Abbildung eines Gegenstandes y durch eine dicke Sammellinse, die durch ihre Hauptebenen H und H' und Brennpunkten F und F' charakterisiert wird. Die eingeklammerten Vorzeichen weisen auf die Vorzeichenkonvention hin.

Befindet sich sowohl im Gegenstandsraum als auch Bildraum das gleiche Medium (z.B. Luft mit Brechungsindex $n = n' \approx 1$), dann gilt für die Brennweiten $f = -f'$, d.h. die Brennweiten sind dem Betrage nach gleich, ihre Vorzeichen sind jedoch unterschiedlich. Dies hängt damit zusammen, dass Abstände vor der gegenstandsseitigen Hauptebene H ein negatives Vorzeichen besitzen, wohingegen Abstände hinter der bildseitigen Hauptebene H' ein positives Vorzeichen haben. Diese Unterscheidung ist insbesondere bei Zerstreuungslinsen und Linsensystemen von Bedeutung. Daher werden in den Abbildungen dieser Versuchsanleitung entsprechende Größen mit eingeklammerten Vorzeichen versehen, um an die Vorzeichenkonvention, wie sie in der DIN 1335 zusammengefasst ist, zu erinnern.

Gaußsche Abbildungsgleichung für dicke Linsen

Mit entsprechend algebraischen Aufwand lässt sich zeigen, dass die Gaußsche Abbildungsgleichung auch auf dicke Linsen angewandt werden kann, wenn sich die Gegenstands-, Bild- und Brennweiten nicht auf die Linsenmitte, sondern auf die entsprechenden Hauptebenen beziehen.

Das Vorzeichen des Abbildungsmaßstabes β gibt wieder, ob das Bild aufrecht oder umgekehrt ist. Dies hängt wiederum von der Lage des Gegenstandes bezüglich des gegenstandsseitigen Brennpunktes F ab, was in Abb. 3 dargestellt ist. Dabei sind die folgenden Situationen zu unterscheiden (nach o.g. Vorzeichenkonvention sind a und f negativ):

- $a \rightarrow -\infty \Rightarrow a' = f'$: Aus dem Unendlichen kommende Lichtstrahlen (z.B. Sonnenlicht) werden im Brennpunkt F' gesammelt.
- $a < 2f$: Das Bild y' ist reell, umgekehrt und verkleinert (Abb. 3a).
- $a = 2f$: Gegenstand y und Bild y' sind dem Betrage nach gleich groß, aber umgekehrt, d.h. $y' = -y$ und Abbildungsmaßstab $\beta = -1$ (Abb. 3b).

- $2f < a < f$: Das Bild y' ist reell, umgekehrt und vergrößert (Abb. 3c).
- $a = f$: Das Bild y' liegt im Unendlichen des Bildraumes (Abb. 3d).
- $f < a < 0$: Der Gegenstand y liegt innerhalb der gegenstandseitigen Brennweite f . Entsprechend der Abbildungsgleichung wird die Bildweite a' negativ. Daher erhält man ein virtuelles, aufrechtes Bild (Abb. 3e und f).

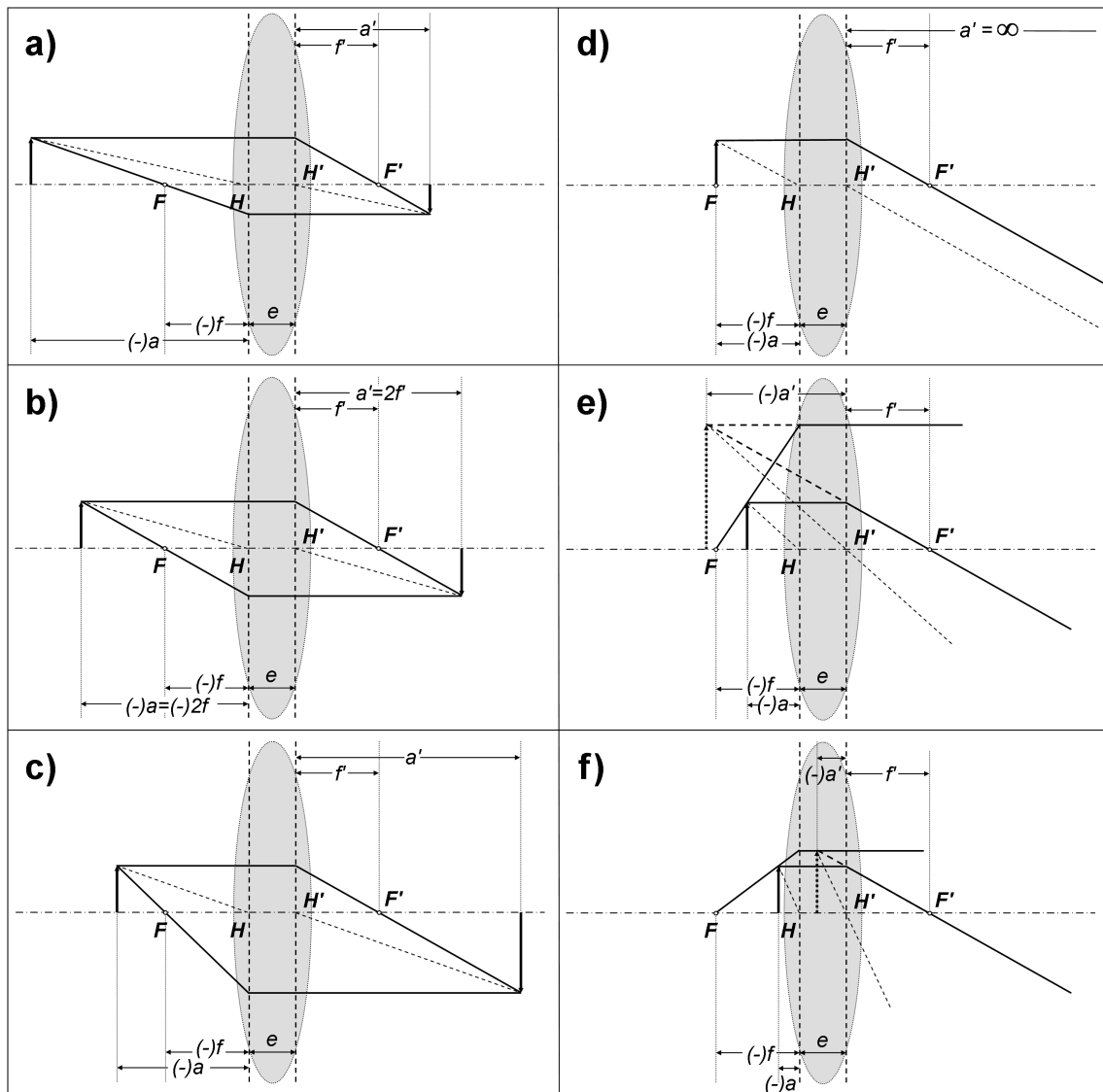


Abb. 3: Lage des Bildes in Abhängigkeit von der Position des Gegenstandes. Die eingeklammerten Vorzeichen weisen auf die Vorzeichenkonvention hin.

Die Abbildungsgleichung und der Abbildungsmaßstab sind in dieser Form auch für Zerstreuungslinsen gültig. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Lage der Brennpunkte F und F' zueinander vertauscht sind. Daher ist für Zerstreuungslinsen die bildseitige Brennweite f' negativ.

Hauptebenen dicker Linsen

Da die Hauptebenen die entscheidenden Bezugsgrößen in der optischen Abbildung sind, folgt an dieser Stelle eine etwas ausführlichere Betrachtung. Die Hauptebenen liegen nicht notwendigerweise in der Linse: Je nach Konstruktion der Linse können die Hauptebenen auch außerhalb des Linsenkörpers liegen (Abb. 4). Das gilt insbesondere auch für Linsensysteme, die später eingeführt werden. Allerdings ist in der Lichtoptik die Reihenfolge von H und H' fest, was nicht der Fall in der Elektronenoptik ist.

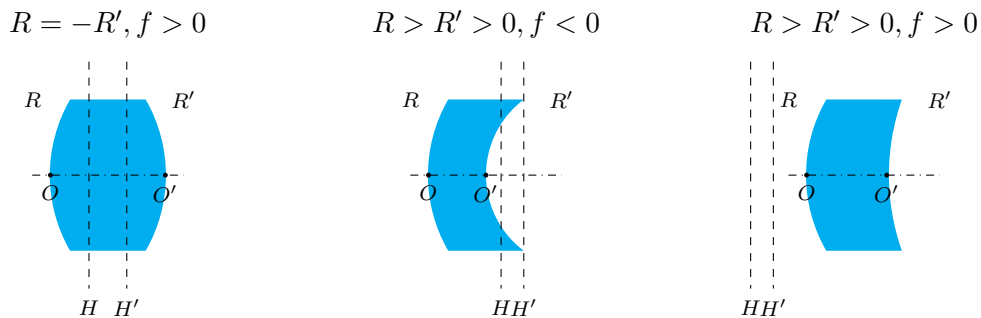


Abb. 4: Lage der Hauptebenen in Abhängigkeit von der Linsenform.

Die Abstände der Hauptebenen zu den entsprechenden Schnittpunkten der Linsenflächen mit der optischen Achse O, O' ergeben sich durch:

$$h = \overline{OH} = -(n - 1) \frac{f'd}{nR'} \tag{3}$$

$$h' = \overline{O'H'} = -(n - 1) \frac{f'd}{nR}. \tag{4}$$

Die Dicke der Linse wird durch $d = \overline{OO'}$ beschrieben und für die Brennweite f' gilt verallgemeinert:

$$\frac{1}{f'} = (n - 1) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} + \frac{(n - 1)}{n} \frac{d}{RR'} \right).$$

2.3 Linsensysteme

Betrachtet man ein System bestehend aus zwei dünnen Linsen mit Brennweiten f'_1 und f'_2 im Abstand d , so gilt für die resultierende Brennweite

$$\frac{1}{f'_{res}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{d}{f'_1 f'_2} \tag{5}$$

Insbesondere bei einem System bestehend aus Sammell- und Zerstreuungslinsen ist auf das Vorzeichen der Brennweiten zu achten.

Die Methode der Hauptebenen bewährt sich nicht nur in der Beschreibung dicker Linsen, sondern sie kann auch zur Charakterisierung ganzer Linsensysteme angewandt werden. Die Lage der Hauptebenen H und H' und der Brennpunkte F'_{res} und F'_{res} des Systems lassen sich dann aus der Abbildung eines Gegenstandes durch die Einzellinsen konstruieren, was in Abb. 5 dargestellt ist:

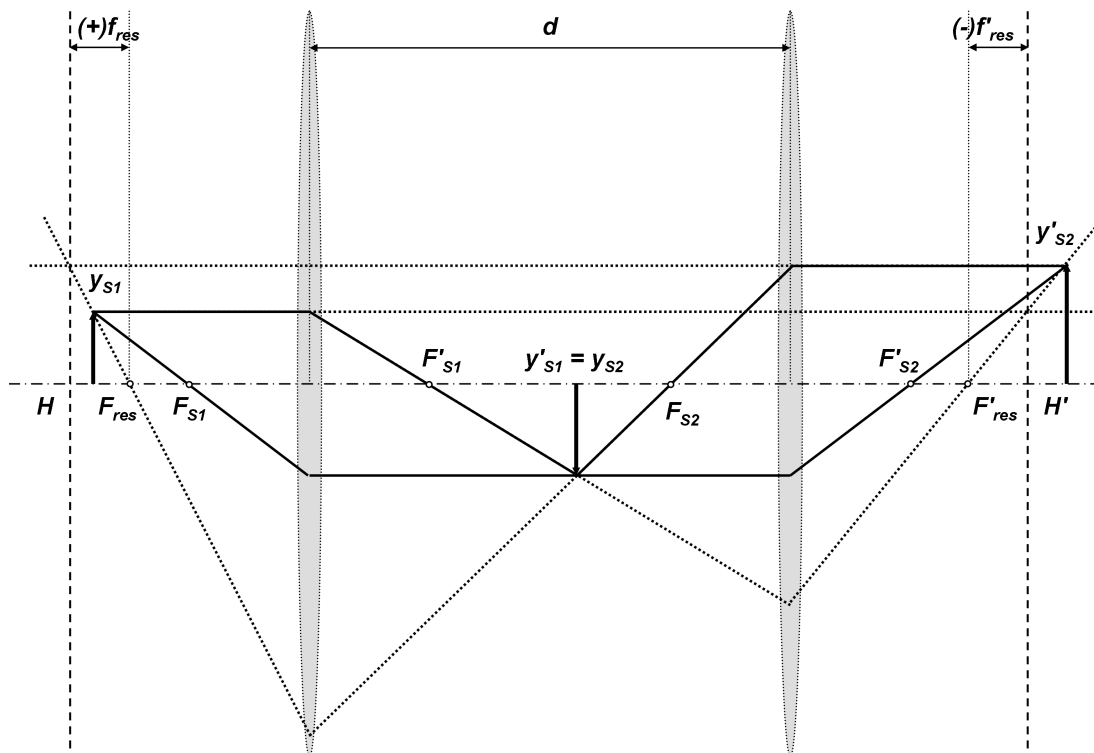


Abb. 5: Konstruktion der Lage der Hauptebenen H und H' und resultierenden Brennpunkten F'_{res} und F_{res} eines zweistufigen Linsensystems.

Ausgehend vom Gegenstand y_{S1} wird zunächst mit Hilfe des Parallel- und Brennpunktstrahls die Abbildung durch Sammellinse S_1 konstruiert. Dann wird das resultierende Zwischenbild y'_{S1} als Gegenstand y_{S2} der Sammellinse S_2 behandelt und das Bild y'_{S2} bestimmt (durchgezogene Linien). Es ist hierbei zu beobachten, dass der einlaufende Parallelstrahl im Bildraum die optische Achse schneidet (gepunktete Linie). Dieser Schnittpunkt bildet den effektiven bildseitigen Brennpunkt F'_{res} des Linsensystems. Der Schnittpunkt dieses auslaufenden Brennpunktstrahls mit der asymptotischen Verlängerung des einlaufenden Parallelstrahls definiert zudem die Lage der bildseitigen Hauptebene H' . Die gegenstandsseitige Hauptebene H und Brennpunkt F_{res} werden analog konstruiert, indem man das System rückwärts durchläuft. In diesem Beispiel ist die resultierende bildseitige Brennweite f'_{res} negativ, da der Brennpunkt F' vor der Hauptebene H' liegt. Es ist wichtig zu wissen, dass im Gegensatz zu einer einzelnen Zerstreuungslinse hier auch reelle Bilder entstehen können.

Die Kenntnis der Lagen der Hauptebenen zusammen mit den Brennweiten ermöglicht eine deutliche Vereinfachung der Abbildungskonstruktion (Abb. 6).

Auch für ein Linsensystem lassen sich die Lagen der Hauptebenen berechnen. Diese resultieren aus den optischen Eigenschaften der beiden Linsen sowie deren gegenseitiger Abstand. Vereinfachend wird im folgenden angenommen, dass es sich bei den Linsen jeweils um dünne Linsen handelt. Somit folgt bezogen auf die Positionen der Linsen L, L' im Abstand $d = \overline{LL'}$ die Lagen der Hauptebenen:

$$\overline{LH} = -\frac{f'_1 d}{d - f'_1 - f'_2} \tag{6}$$

$$\overline{L'H'} = \frac{f'_2 d}{d - f'_1 - f'_2} \tag{7}$$

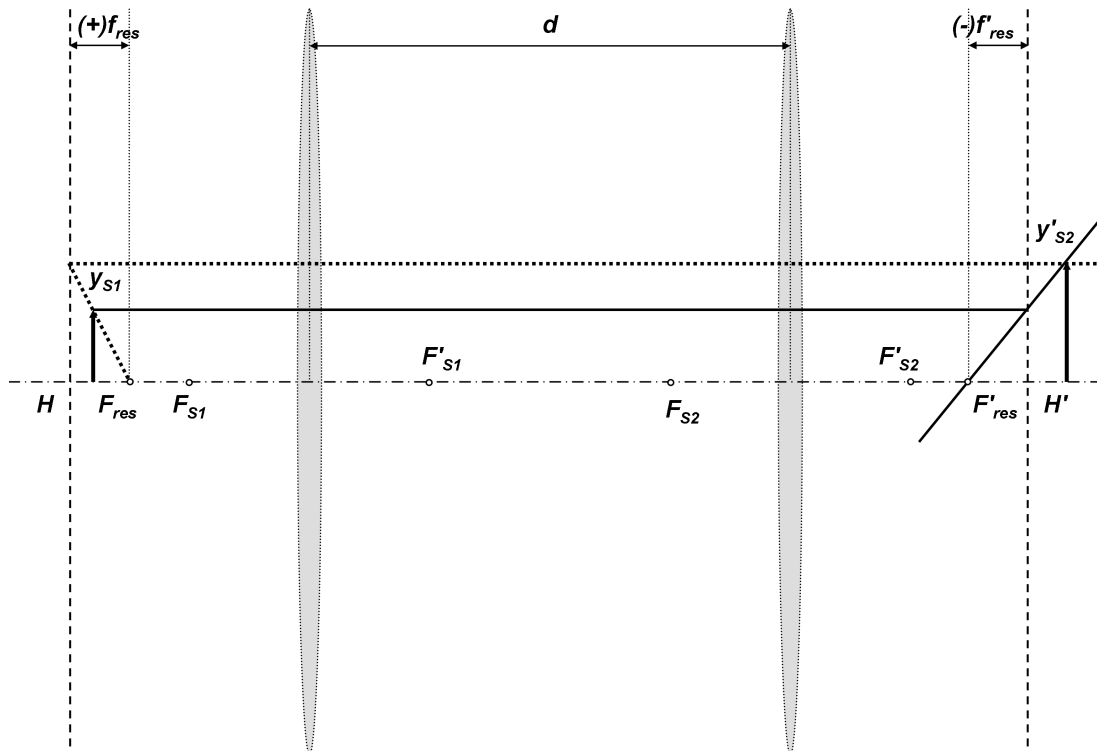


Abb. 6: Konstruktion des Bildes, wenn nur die Brennpunkte und Hauptebenen gegeben sind, entsprechend der Situation in Abb. 5. Die durchgezogene Linie bezeichnet den Parallelstrahl, der an der Hauptebene H' gebrochen wird und durch den Brennpunkt F'_{res} geht. Die gepunktete Linie bezeichnet den Brennpunktstrahl, der an der Hauptebene H gebrochen wird. Der Schnittpunkt beider Linien ergibt die Lage und Größe des Bildes.

2.4 Bildfehler

Abweichungen von den idealen Gaußschen Bedingungen werden durch Abbildungsfehler, den sogenannten Aberrationen, beschrieben. Man unterscheidet zwischen chromatischen und monochromatischen Aberrationen:

Chromatische Aberration:

Da die Brechzahl des Linsenmaterials von der Wellenlänge des einfallenden Lichts abhängt (= Dispersion), ergeben sich für verschiedene Wellenlängen unterschiedliche Brennweiten. Dabei ist die Brennweite des blauen Lichts kleiner als die des roten Lichts (Abb. 7). Folglich entstehen insbesondere bei der Abbildung mit weißem Licht je nach Wellenlänge unterschiedliche Foki des Objektes, was man an den Farbsäumen um das Objekt herum erkennt. Dieser Fehler wird als chromatische Aberration oder auch als Farbfehler bezeichnet. Im Kreis kleinster Verwirrung findet man die geringsten Abbildungsfehler. Daher sollte das Bild an dieser Stelle registriert werden. In sogenannten Achromaten wird der chromatische Fehler durch Kombination von Sammellinsen mit unterschiedlichen Brechzahlen und folglich Dispersionen korrigiert. In der Elektronenoptik tritt ebenfalls eine chromatische Aberration auf, die unter Verwendung von magnetischen Multipolfeldern korrigiert werden kann.

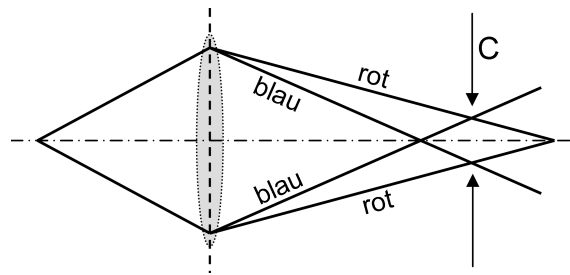


Abb. 7: Chromatische Aberration. Die Stelle *C* bezeichnet den Kreis kleinster Verwirrung.

Sphärische Aberration:

Selbst bei der Abbildung mittels monochromatischem Licht (z.B. Laser) treten Bildfehler auf, welche auf den refraktiven Eigenschaften gekrümmter Linsenoberflächen beruhen. Die lokale Anwendung der Brechungsgesetze liefert den tatsächlichen Strahlenverlauf, welcher sich von der Gaußschen Optik mit zunehmenden Abstand von der optischen Achse und mit zunehmenden Einfallswinkel bezüglich der Linsenebene unterscheidet.

Wichtigster Vertreter monochromatischer Aberrationen ist die sphärische Aberration (Öffnungsfehler), wo achsenferne Strahlen stärker oder schwächer gebrochen werden als achsennahe Strahlen¹ (Abb. 8). Wiederum findet man im Kreis kleinster Verwirrung das schärfste Bild. Bei Hohlspiegeln kann man diesen Fehler minimieren, indem der Spiegel nicht in einer kugelförmigen, sondern in einer parabolischen Form gefertigt wird. Bei Linsen ist man jedoch in der Regel auf Korrekturmethode angewiesen, da nur kugelförmige Flächen exakt und kostengünstig herzustellen sind. Eine Korrektur kann z.B. durch Ausblenden achsenferner Strahlen geschehen, jedoch auf Kosten der Bildhelligkeit und Auflösung aufgrund der Einschränkung des Aperturwinkels. Eine bessere Methode ist die Kombination einer Sammellinse mit einer geeigneten Zerstreuungslinse, da beide Linsentypen ein umgekehrtes Vorzeichen im Wert der sphärischen Aberration besitzen und folglich die sphärische Aberration korrigieren können. Ein solches Linsensystem wird Aplanat genannt. In der Elektronenoptik existieren keine einfachen Zerstreuungslinsen. Erst in den 90er Jahren gelang die Korrektur der sphärischen Aberration mittels aufwendiger Multipolssysteme. Dieser sogenannte Cs-Korrektor ist ein Meilenstein in der atomar auflösenden Elektronenmikroskopie.

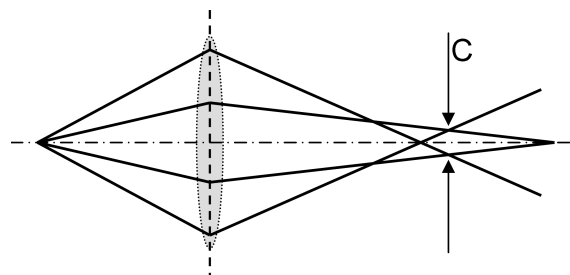


Abb. 8: Sphärische Aberration: Die Stelle *C* bezeichnet den Kreis kleinster Verwirrung.

¹Die sphärische Aberration tritt in verschiedenen Ordnungen auf. In niedrigster Ordnung hängt diese ausschließlich vom Einfallswinkel bezüglich Linsenebene ab. Somit ist diese Aberration für jeden Objektpunkt identisch (isoplanatisch). Dieser Fall ist in Abb. 8 dargestellt. In höheren Ordnungen ist diese Aberration auch von der Position in der Objektebene abhängig, weshalb achsenfernere Bildpunkte verschmiert erscheinen.

3 Experimentelle Verfahren

3.1 Brennweitenbestimmung einer dünnen Sammellinse

Nach Scharfstellung des Bildes kann die bildseitige Brennweite f'_S einer dünnen Sammellinse durch Messung der Gegenstandsweite a und Bildweite a' bestimmt werden. Hierzu wird die Gaußsche Abbildungsgleichung nach der bildseitigen Brennweite f'_S umgestellt:

$$|f'_S| = \frac{|a| \cdot |a'|}{|a| + |a'|}.$$

3.2 Besselsches Verfahren zur Bestimmung der Brennweite

Wenn die Lage sowie der Abstand der Hauptebenen nicht bekannt sind, können Gegenstandsweite a und Bildweite a' und folglich die Brennweite f' nicht direkt ermittelt werden. Hier hilft das Besselsche Verfahren zur Bestimmung der Brennweite dicker Linsen und Linsensystemen weiter: Bei hinreichend großem Abstand

$$L = |a| + |a'| + e > 4 |f'|$$

(e bezeichnet den Hauptebenenabstand) zwischen Gegenstand und Bild findet man zwei Positionen der Linse, bei denen auf dem Schirm ein scharfes Bild entsteht. Dabei ist das eine Bild vergrößert, das andere verkleinert. Der Grund hierfür ist die Umkehrbarkeit des Lichtweges.

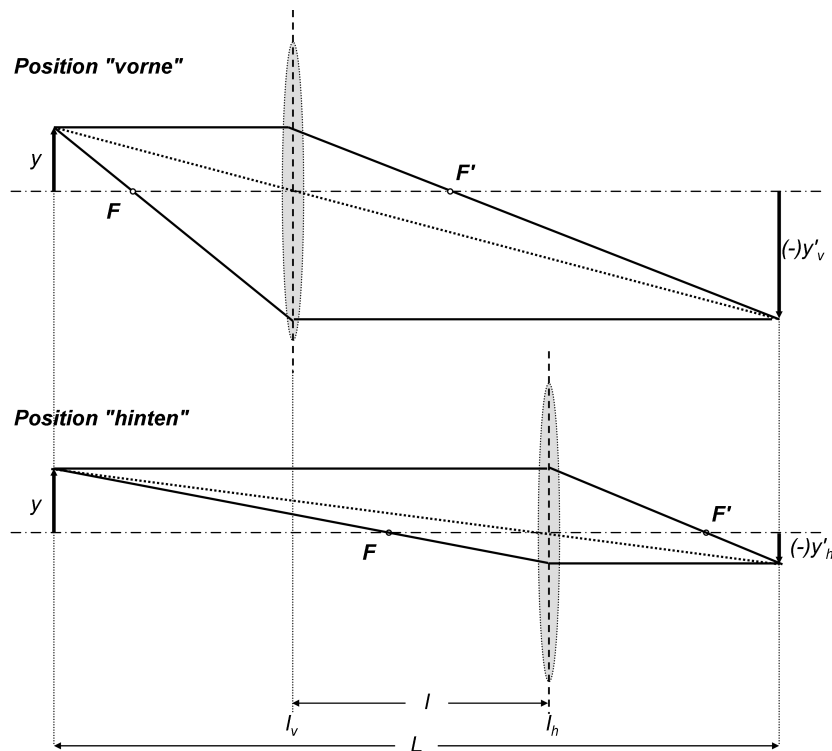


Abb. 9: Besselsches Verfahren zur Bestimmung der Brennweite.

Der Abstand dieser beiden Positionen l_v (vorne) und l_h (hinten) sei $l = l_h - l_v$.

Ausgehend von der Gaußschen Abbildungsgleichung findet man die Bestimmungsgleichung für die Brennweite (siehe Anhang)

$$f' = \frac{1}{4} \cdot \left[(L - e) - \frac{l^2}{L - e} \right]. \quad (8)$$

Bei dünnen Sammellinsen oder Linsen, die direkt aneinander liegen, gilt in der Regel, dass der Hauptebenenabstand e gegenüber dem Abstand L zwischen Gegenstand und Bild vernachlässigt werden kann, d.h. $e \ll L$. Damit vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung zu

$$f' = \frac{1}{4} \cdot \left[L - \frac{l^2}{L} \right].$$

3.3 Brennweitenbestimmung einer dünnen Zerstreuungslinse

Die Brennweite einer Zerstreuungslinse kann nicht ohne weiteres gemessen werden, da ein virtuelles Bild bei der Abbildung entsteht. Daher wird die Zerstreuungslinse Z mit einer Sammellinse S bekannter Brennweite f'_S kombiniert, so dass eine reelle Abbildung des Gegenstandes entsteht. Die Brennweite der Zerstreuungslinse f'_Z lässt sich dann aus den Brennweiten der Sammellinse f'_S und der Linsenkombination f'_{res} mit Hilfe der Beziehung (siehe oben)

$$\frac{1}{f'_{res}} = \frac{1}{f'_S} + \frac{1}{f'_Z} - \frac{d}{f'_S f'_Z}$$

berechnen. Bringt man beide Linsen sehr nahe beieinander, so dass der Linsenabstand $d \approx 0$ ist, so vereinfacht sich die Bestimmung zu

$$f'_Z = \frac{f'_S f'_{res}}{f'_S - f'_{res}}. \quad (9)$$

3.4 Bestimmung von Brennweite und Hauptebenen nach Abbe

Solange man bei einem Linsensystem die Lagen der Hauptebenen und Brennpunkte nicht kennt, bleiben auch Gegenstandsweite a und Bildweite a' unbekannt. Abbe beschreibt ein Bestimmungsverfahren, das die Ermittlung sowohl der Brennweite und als auch der Hauptebenen dennoch zulässt.

Ähnlich wie beim Besselschen Verfahren sucht man die beiden Positionen „vorne“ und „hinten“, wo ein scharfes reelles Bild auf dem Schirm registriert wird. Ausgehend von einer Ablesemarke A werden jeweils die Gegenstandsweiten b_v und b_h sowie deren Bildweiten b'_v und b'_h gemessen (Abb. 10). Zudem werden die Abbildungsmaßstäbe $\beta_v = \frac{y'_v}{y}$ und $\beta_h = \frac{y'_h}{y}$ bestimmt. Beachten Sie, dass im vorliegenden Fall die Gegenstandsweiten negativ und die Bildweiten positiv sind.

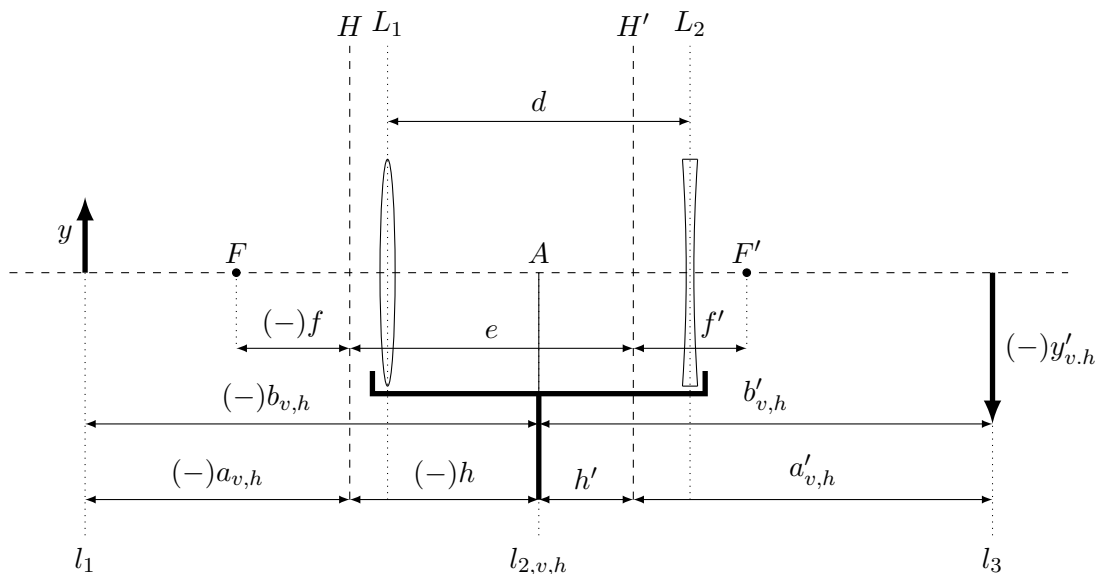


Abb. 10: Schematische Zeichnung zu den geometrischen Größen im Zusammenhang mit dem Abbe-Verfahren: Linsensystem aus L_1 und L_2 im Abstand d , zentriert bezüglich der Reitermitte A mit den Hauptebenen H und H' in den Abständen h bzw. h' bezgl. A . Kombinierte Brennweiten beziehen sich auf die jeweiligen Hauptebenen. Messgrößen auf Bildseite mit Apostroph, auf Gegenstandsseite ohne. Vorzeichenkonvention durch Minuszeichen in Klammern angedeutet. Direkte Messgrößen: l_1, l_2 (vorn und hinten), l_3, y und y' (vorn und hinten). Zu bestimmen: f', h und h' .

Brennweite und Lage der Hauptebenen werden wie folgt bestimmt: Ausgehend von der Gaußschen Abbildungsgleichung und unter Verwendung des Abbildungsmaßstabes gelten für Gegenstandsweiten $a_{v,h}$ und Bildweiten $a'_{v,h}$:

$$a_{v,h} = f' \cdot \left(\frac{1}{\beta_{v,h}} - 1 \right) \quad \text{und} \quad a'_{v,h} = f' \cdot (1 - \beta_{v,h})$$

Alle vier Größen sind jedoch nicht direkt messbar, da die Lage der Hauptebenen noch unbekannt ist. Bekannt sind jedoch die Gegenstandsweiten $b_{v,h}$ und Bildweiten $b'_{v,h}$ bezüglich der Ablesemarke A mit

$$b_{v,h} = a_{v,h} + h < 0 \quad \text{und} \quad b'_{v,h} = a'_{v,h} + h' > 0.$$

Wichtig ist, dass $b_{v,h}$ negativ ist. Daraus ergibt sich ein Satz bestehend aus insg. vier Gleichungen:

$$\frac{1}{\beta_{v,h}} = 1 - \frac{h - b_{v,h}}{f'} \quad \text{und} \quad \beta_{v,h} = 1 - \frac{b'_{v,h} - h'}{f'}. \tag{10}$$

Die Brennweite f' und die Abstände h und h' der Hauptebenen H und H' von der Ablesemarke A können graphisch bestimmt werden, indem $\frac{1}{\beta_{v,h}}$ als Funktion von $-b_{v,h}$ und $\beta_{v,h}$ als Funktion von $b'_{v,h}$ in ein Diagramm eingetragen und durch zwei Geraden angenähert werden. Die Abstände² $-h$ und h' von der Ablesemarke A zu den Hauptebenen H und H' ergeben sich durch Extrapolation zum Funktionswert $\beta = 1$. Die Brennweite f' lässt sich aus den jeweiligen Anstiegen der Ausgleichsgeraden gemäß Gl. 10 ermitteln.

²Bemerkung: Da für die erste Gleichung zu besserer Ausnutzung des Millimeterpapiers $\frac{1}{\beta}$ gegenüber $-b$ aufgetragen wird, wird an der Abszissenachse entsprechend $-h$ abgelesen.

3.5 Bestimmung der sphärischen und chromatischen Aberration

Die Brennweite einer Sammellinse mit sphärischen Grenzflächen hängt vom Abstand r der einfallenden Strahlen von der optischen Achse ab. Diese sogenannte sphärische Aberration soll durch Verwendung von Zonenblenden bestimmt werden. Dazu wird zunächst das Objekt mittels einer extrem dicken Sammellinse und einer Lochblende, die außenliegende Strahlen ausblendet, scharf abgebildet und die Brennweite f'_0 der Linse über das Besselsche Verfahren bestimmt. Dann werden unterschiedliche Zonenblenden mit Radius r eingeführt, die nur eine Abbildung durch außenliegende Bereiche der Linse zulassen. Wiederum wird die Brennweite f' über das Besselsche Verfahren bestimmt. Für die Brennweite einer Sammellinse mit sphärischen Grenzflächen, Krümmungsradius R und Brechungsindex n gilt (siehe Anhang):

$$f' \approx R \cdot \left[\frac{n}{n-1} - \frac{r^2}{2n(n-1)R^2} \right]$$

d.h. für parallel zur optischen Achse einfallende Strahlen nimmt die Brennweite f' quadratisch mit dem Abstand r entsprechend $f' = f'_0 - \Delta f'(r^2)$ ab. Dieser Zusammenhang soll zusammen mit den Messwerten in einem Schaubild mit $f' = f'(r^2)$ dargestellt werden.

Werden die Messungen mit Licht verschiedener Wellenlängen durchgeführt, wird der Einfluss der chromatischen Aberration messbar.

4 Versuchsaufbau

Für den Versuch stehen eine Lampe, ein Objekt, ein Linsenhalter für die Aufnahme von dünnen Sammel- und Zerstreuungslinsen, und ein Schirm zur Verfügung. Als Objekt dient ein Kreuz mit feinen Details als Fokussierhilfen. Alle Elemente werden auf einer optischen Bank mit Millimeter-einteilung aufgebaut. Zur Monochromatisierung stehen verschiedene Interferenzfilter (orange, grün, blau) jeweils mit einer spektralen Breite von etwa 5 nm (FWHM) bereit, welche direkt auf die Lichtquelle aufgesteckt werden. Für die Untersuchung der Aberrationen wird eine extrem dicke sphärische Linse verwendet, in deren Fassung Zonenplatten eingeschoben werden können, welche somit den Abstand des einfallenden Lichts zur optischen Achse definieren.

5 Anhang

5.1 Zur Herleitung der Bestimmungsgleichung im Besselschen Verfahren

Nach Umformung der Gleichungen

$$L = |a| + |a'| + e \quad \text{und} \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{|a|} + \frac{1}{|a'|}$$

und ineinander einsetzen bei gleichzeitiger Elimination der Gegenstandsseite folgt die quadratische Gleichung

$$|a'|^2 - (L - e)|a'| + (L - e)f' = 0$$

Diese Gleichung hat zwei Lösungen a'_v und a'_h , die der Vertauschung von Gegenstand und Bild entsprechen:

$$\begin{aligned}
 a'_{v,h} &= \frac{L-e}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{L-e}{2}\right)^2 - (L-e)f'} \\
 &= \frac{L-e}{2} \cdot \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4f'}{L-e}}\right].
 \end{aligned}$$

Berechnet man $l = a'_v - a'_h$, so ergibt sich

$$l = a'_v - a'_h = (L-e) \cdot \sqrt{1 - \frac{4f'}{L-e}}$$

was einfach in die gesuchte Gleichung durch Quadrierung umgeformt werden kann:

$$f' = \frac{1}{4} \cdot \left[(L-e) - \frac{l^2}{L-e} \right]$$

5.2 Bestimmung der sphärischen Aberration

Die Brennweite f' einer Linse mit sphärischen Grenzflächen (Krümmungsradius R) hängt vom Abstand r der parallel zur optischen Achse einfallenden Strahlen ab.

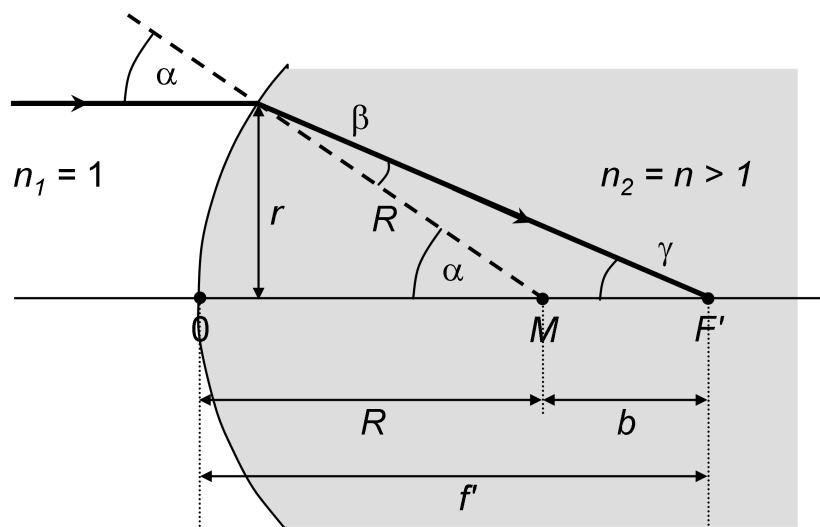


Abb. 11: Abhängigkeit der Brennweite f' vom Abstand r der parallel zur optischen Achse einfallenden Strahlen.

Aus Abb. 11 kann die Brennweite mit

$$f' = R + b \quad \text{mit} \quad b = R \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

abgelesen werden. Zusammen mit dem Brechungsgesetz (Brechungsindex n der Linse)

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$$

und den geometrischen Zusammenhängen

$$\sin \alpha = \frac{r}{R} \quad \text{und} \quad \alpha = \beta + \gamma$$

ergibt sich für die Brennweite f' einer Linse mit sphärischer Aberration:

$$\begin{aligned} f' &= R + \frac{r}{n \sin \gamma} = R \cdot \left[1 + \frac{1}{n \cos \beta - \cos \alpha} \right] \\ &= R \cdot \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \right] \\ \Leftrightarrow f' &= R \cdot \left[1 + \frac{1}{n \sqrt{1 - \frac{r^2}{n^2 R^2}} - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}} \right]. \end{aligned}$$

Für *achsennahe* Strahlen kann man den Term mit $\frac{r^2}{R^2} \ll 1$ vollständig vernachlässigen, so dass sich die Brennweite f'_0 einer sphärischen Grenzfläche mit Krümmungsradius R wie folgt geschrieben werden kann:

$$f'_0 \approx R \cdot \frac{n}{n-1}.$$

Für *achsenferne* Strahlen müssen die Wurzeln der Brennweitengleichung entsprechend

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x \quad \text{für} \quad x \ll 1$$

genähert werden. Es folgt:

$$f' \approx R \cdot \left[1 + \frac{1}{n \left(1 - \frac{r^2}{2n^2 R^2} \right) - \left(1 - \frac{r^2}{2R^2} \right)} \right] = R \cdot \left[1 + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r^2}{2nR^2}} \right]$$

Mit der Näherung $(1-x)^{-1} \approx 1+x$ für $x \ll 1$ erhält man

$$f' \approx R \cdot \left[1 + \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{r^2}{2nR^2} \right) \right] = R \cdot \left[\frac{n}{n-1} - \frac{r^2}{2n(n-1)R^2} \right],$$

d.h. für parallel zur optischen Achse einfallende Strahlen nimmt die Brennweite f' quadratisch mit dem Abstand r entsprechend $f' = f'_0 - \Delta f'(r^2)$ ab.

Autorenschaft

Diese Versuchsanleitung wurde in ihrer ursprünglichen Form von M. Lehmann erstellt und von R. Schwierz und S. Socher bearbeitet. Aktuelle Änderungen werden von der Praktikumsleitung durchgeführt.

Fragen

1. Was versteht man unter der Brechzahl? Wovon ist diese abhängig?
2. Was versteht man unter dem Begriff „Dispersion“?
3. Warum kann man unter Wasser nicht scharf sehen?
4. Wie konstruiert man den Strahlengang an einer Sammel- bzw. Zerstreuungslinse für einen beliebig auftreffenden Strahl?
5. Wodurch unterscheiden sich dünne und dicke Linsen bezüglich der Bildkonstruktion?
6. Wie konstruiert man den Strahlengang durch eine dicke Zerstreuungslinse?
7. Wie bestimmt man experimentell und konstruktiv die Hauptebenen eines Linsensystems?
8. Was versteht man unter sphärischer und chromatischer Aberration und wie wirken sich diese Bildfehler aus? Kennen sie noch andere Bildfehler?
9. Mit Hilfe einer Sammellinse werde ein entfernter Gegenstand abgebildet, der langsam näher kommt. Wie muss der Schirm verschoben werden, damit das Bild scharf bleibt? Ab wann sieht man kein Bild mehr auf dem Schirm und warum?

Literatur

- [1] W. Walcher, *Praktikum der Physik*, Teubner Studienbücher, 1994
- [2] E. Hecht, *Optik*, Addison Wesley, 1989
- [3] Bergmann, Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik III, Optik*, de Gruyter, Berlin, New York, 1987
- [4] W. Demtröder, *Experimentalphysik, Band 2: Elektrizität und Optik*, , 1995