

Radiometrische Messung 1 - Geiger Müller Zählrohr

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabenstellung	2
2	Grundlagen	2
2.1	Radioaktivität und Zerfallsgesetz	2
2.2	Das Radionuklid ^{40}K	5
2.3	Statistik von Zählmessungen	5
2.3.1	Binomialverteilung	6
2.3.2	POISSON-Verteilung	7
2.3.3	GAUSS-/Normalverteilung	8
2.3.4	Theoretische und empirische Verteilungsfunktionen	8
2.4	Das GEIGER-MÜLLER-Zählrohr (GMZ)	15
3	Experimentelle Durchführung	16
3.1	Versuchsaufbau	16
3.2	Messung der Zählrohrcharakteristik	17
3.3	Radiometrische Kaliumbestimmung	18
3.4	Ermittlung der Messunsicherheiten	20
3.4.1	Berechnung der systematischen Messabweichung	21
3.4.2	Berechnung der zufälligen Messabweichung	22
3.4.3	Angabe der gesamten Messabweichung der Konzentrationsbestimmung	23
3.4.4	Hinweise zur Betrachtung der Messunsicherheiten	23
3.5	Der χ^2 -Konsistenztest (nur für GPIII)	24
3.6	Messung der Halbwertszeit von $^{234\text{m}}\text{Pa}$ (nur für GPIII)	26
4	Fragen	27
	Literatur	28

1 Aufgabenstellung

1. Aufnahme der Zählrohrcharakteristik eines GEIGER-MÜLLER-Zählrohres (GMZ)
2. Radiometrische Bestimmung der Konzentration einer K_2CO_3 -Lösung
3. Nur für GPIII: χ^2 -Konsistenztest bezüglich Poisson-Verteilung
4. Nur für GPIII: Bestimmung der Halbwertszeit von $^{234\text{m}}\text{Pa}$ aus einer Uran-/Uranfolgeproduktlösung.

2 Grundlagen

2.1 Radioaktivität und Zerfallsgesetz

Atome bestehen aus einem positiv geladenem Kern und der negativ geladenen Hülle.

Der Kern setzt sich aus *Nukleonen*, den *Protonen* (Symbol p) und *Neutronen* (Symbol n) zusammen.

Die Hülle wird von den *Elektronen* (Symbol e^-) gebildet.

Die verschiedenen Atome werden in Kategorien, die *Nuklide* aufgeteilt. Diese unterscheiden sich nach Anzahl und Art der Nukleonen im Kern. Ein bestimmtes Nuklid hat eine bestimmte *Nukleonenzahl* A und eine bestimmte *Neutronenzahl* N . Die Differenz $Z = A - N$ gibt sowohl die Anzahl der Protonen im Kern, als auch die Anzahl der Elektronen in der Hülle an, da das gesamte Atom nach außen hin elektrisch neutral ist. Z wird als *Kernladungszahl* oder *Ordnungszahl* bezeichnet.

All diese Kennzahlen werden in der Notation ${}^A_Z\text{X}_N$ oder kurz ${}^A_Z\text{X}$ bzw. ${}^A\text{X}$ zusammengefasst, wobei X beispielhaft für das chemische Symbol steht (z. B. ${}^4_2\text{He}_2$ für Helium, dessen Kern aus zwei Protonen und zwei Neutronen aufgebaut ist).

Nicht alle Atomkerne befinden sich in einem stabilen Zustand. Das Phänomen *Radioaktivität* ist die spontane Umwandlung instabiler Atomkerne unter Energieabgabe. Der mit der Umwandlung verbundene Übergang in ein stabiles Nuklid kann auf direktem Wege oder in mehreren aufeinanderfolgenden Schritten erfolgen. Die Energie wird dabei durch ionisierende Strahlung in Form von Teilchen und/oder Photonen emittiert. Diese können direkt dem Atomkern oder indirekt der Atomhülle entstammen.

Es existieren verschiedene Umwandlungsarten, die auch in Tabelle 1 zusammengefasst sind:

α -Umwandlung: Schwere Elemente, bei denen die Bindungsenergie der Nukleonen im Kern gering ist, können sich unter Aussendung eines ${}^4_2\text{He}$ -Kerns (α -Strahlung) umwandeln. Auch die spontane Kernspaltung ist eine radioaktive Kernumwandlung.

β -Umwandlung: Bei Atomkernen mit einem ungünstigen Neutronen-Protonen-Verhältnis erfolgt eine Umwandlung dieser Nukleonen durch β -Umwandlung oder e^- -Einfang. Hierbei wird die durch Neutronenüberschuss bedingte Emission von Elektronen als β^- -Strahlung, die entsprechende durch Protonenüberschuss bedingte Aussendung von Positronen als β^+ -Strahlung bezeichnet. Als Alternative zur β^+ -Umwandlung existiert der e^- -Einfang, bei dem ein Hüllenelektron vom Kern eingefangen wird.

γ -Strahlung: Bei allen o. g. Umwandlungen können zunächst angeregte Kerne entstehen, die unter Aussendung von Photonen (γ -Strahlung) in den stabilen Grundzustand übergehen.

Die mit der Umwandlung der Kerne einhergehende Änderung der Ordnungszahl des Kerns macht eine Umordnung der Elektronenstruktur in der Hülle notwendig. Die Folge ist die Emission charakteristischer *Röntgenstrahlung* und/oder *AUGER-Elektronen*. Besonders deutlich wird dies beim Elektroneneinfang, wo infolge der erzeugten Vakanz in der *K*-Schale eine Emission von K_α - und K_β -Röntgenstrahlung beobachtet wird.

Tabelle 1: Zerfallsarten (ohne Spontanspaltung)

Umwandlungsart	Kernumwandlung	Umwandlung innerhalb des Kerns
α	${}^A_Z\text{X}_N \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\text{Y}_{N-2} + {}^4_2\text{He}_2$	Clusterbildung
β^-	${}^A_Z\text{X}_N \rightarrow {}^A_{Z+1}\text{Y}_{N-1} + e^- + \bar{\nu}$	n -Überschuss: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$
β^+	${}^A_Z\text{X}_N \rightarrow {}^A_{Z-1}\text{Y}_{N+1} + e^+ + \nu$	p -Überschuss: $p \rightarrow n + e^+ + \nu$
e^- -Einfang	${}^A_Z\text{X}_N + e^- \rightarrow {}^A_{Z-1}\text{Y}_{N+1} + \nu$	p -Überschuss: $p + e^- \rightarrow n + \nu$

Diese spontan ablaufenden Prozesse sind stochastischer Natur, d. h.: Jeder instabile Kern besitzt unabhängig von seiner Vorgeschichte die gleiche Umwandlungswahrscheinlichkeit, wobei der Zeitpunkt seiner Umwandlung unbestimmt ist. Es kann also nicht vorhergesagt werden, wann sich ein konkreter Atomkern umwandelt. Bekannt ist nur die Wahrscheinlichkeit, mit der das Umwandlungsereignis innerhalb eines vorgegebenen Zeitintervalls eintritt. Für sehr viele gleichartige, instabile Kerne N , die alle zum Zeitpunkt t vorhanden sind, kann die Anzahl der im Mittel auftretenden Umwandlungen dN berechnet werden. Dazu wird die lineare Differenzialgleichung

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt \tag{1}$$

angesetzt. Die nuklidspezifische *Zerfallskonstante* λ ist ein Maß für die Umwandlungswahrscheinlichkeit eines Radionuklids, ihr Kehrwert $\tau = 1/\lambda$ stellt die mittlere Lebensdauer des betreffenden Kerns dar. Durch die Integration von (1) gemäß

$$\int_{N_0}^{N(t)} \frac{dN}{N} = - \int_0^t \lambda dt \quad \rightarrow \quad \ln N(t) - \ln N_0 = -\lambda \cdot t$$

wird das *exponentielle Umwandlungsgesetz*

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \tag{2}$$

erhalten. Darin ist $N(t)$ die Zahl der zum Zeitpunkt t noch nicht umgewandelten Kerne und $N_0 = N(t = 0)$ ist die Zahl der Kerne zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Lösung von (2) für den Fall $N(t = T_{1/2}) = N_0/2$ ergibt die *Halbwertszeit*

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \cdot \ln 2 \quad . \tag{3}$$

Die Umwandlungsrate oder *Aktivität* A ist die Zahl der spontanen Kernumwandlungen pro Zeiteinheit und zur Anzahl der instabilen Kerne proportional. Ausgehend von der Anfangsaktivität $A_0 = A(t=0)$ zum Zeitpunkt $t=0$ wird über

$$A(t) = -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N(t) \quad (4)$$

ebenfalls ein exponentieller Zusammenhang der Form

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad (5)$$

gefunden. Dieser lässt sich mit (3) in den Ausdruck

$$A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \quad (6)$$

umformen. Die Einheit der Aktivität ist das *Becquerel* ($1 \text{ Bq} = 1 \text{ s}^{-1}$). Die Aktivität ist neben der Art und Energie der emittierten Strahlung die wichtigste Größe zur Charakterisierung einer radioaktiven Quelle. Besonders die Darstellung des Zerfallsgesetzes in (6) mit dem Faktor $1/2$ und $n = t/T_{1/2}$ ist eine für Praktiker leicht handhabbare Form. Da die Potenzen 2^n hinreichend aus der Informatik bekannt sind (z. B. $2^{20} \approx 10^6$), lassen sich Berechnungen nach (6) schnell abschätzen.

Als Beispiel soll die Umwandlungskurve für ein Radionuklid mit einer Halbwertszeit von 100 s die-

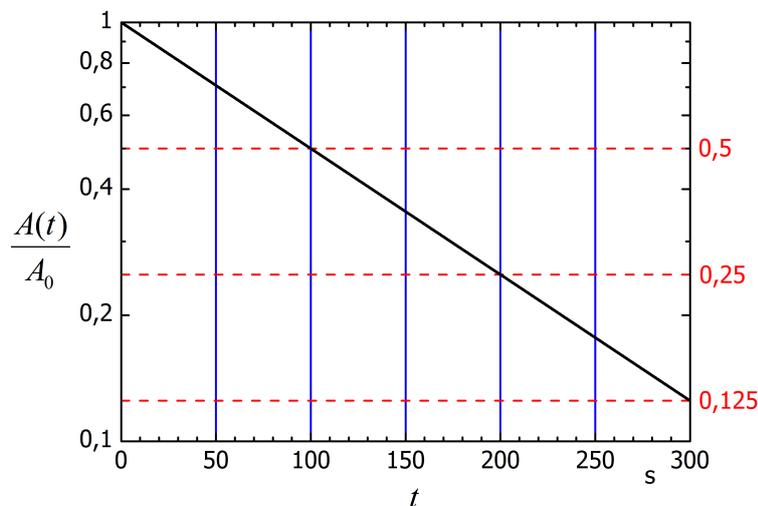


Abb. 1: Umwandlungskurve eines Nuklids mit einer Halbwertszeit $T_{1/2} = 100 \text{ s}$

nen, die in Abbildung 1 dargestellt ist. Das Verhältnis $A(t)/A_0$ entspricht dem Anteil der ursprünglichen Aktivität nach dem Verstreichen der Zeit T . In halblogarithmischer Darstellung ergibt sich eine Gerade. Nach Ablauf einer Halbwertszeit sind nur noch die die Hälfte der Kerne vorhanden und nach Ablauf von zehn Halbwertszeiten (nur etwas mehr als eine Viertelstunde) wären nur noch $1/1024$, also weniger als ein Promille der ursprünglichen Aktivität vorhanden.

2.2 Das Radionuklid ^{40}K

Die in diesem Versuch verwendete Quelle ist das Radionuklid ^{40}K (Kalium). Es kommt mit einer Häufigkeit von 0,012 % in natürlichem Kalium vor. Für diesen Versuch ist es in dem Salz Kaliumkarbonat K_2CO_3 gebunden, welches in einer 4-molaren wässrigen Lösung vorliegt. Mit einer Halbwertszeit von $T_{1/2} = 1,27 \cdot 10^9 \text{ a}$ kann es den primordialen Nukliden zugeordnet werden, die schon vor der Entstehung der Erde vorhanden waren. Zusammen mit 30 weiteren Nukliden (z. B. ^{87}Rb , ^{176}Lu , ^{187}Re) gehört es zu den isoliert vorkommenden, natürlichen, primordialen Radionukliden und entstammt somit nicht den Zerfallsreihen von ^{238}U , ^{235}U , ^{232}Th oder ^{237}Np .

Wie auch in Abbildung 2 zu erkennen ist, geht ^{40}K mit einer Wahrscheinlichkeit von 89,28 % durch die β^- -Umwandlung in ^{40}Ca über. Die emittierte β^- -Strahlung hat dabei eine Maximalenergie von 1,31 MeV. Zu 10,72 % wandelt sich ^{40}K durch e^- -Einfang in ^{40}Ar um. Die Umwandlung in den Grundzustand des ^{40}Ar erfolgt nur bei 0,048 % der ^{40}K Nuklide. 10,67 % gehen zunächst in einen angeregten Zustand des ^{40}Ar über, das sich dann unter Aussendung von γ -Strahlung mit einer Energie von 1,46 MeV in den Grundzustand abregt.

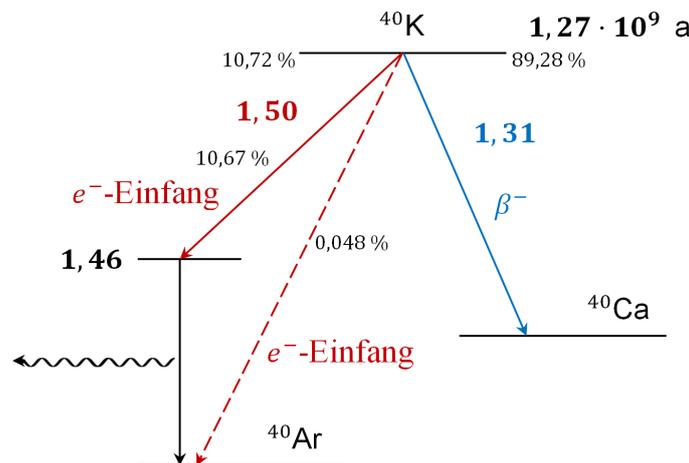


Abb. 2: Zerfallsschema für das Radionuklid ^{40}K . (Energieniveaus und -angaben in MeV)

2.3 Statistik von Zählmessungen

Die Messung des radioaktiven Zerfalls erfolgt über die emittierte Strahlung durch *Zählmessungen*. Das gilt sowohl für sogenannte einfache als auch für spektrometrische und/oder koinzidente Zählmessungen. Während erstere einfach Ereignisse zählen, werden z. B. bei letzteren bestimmte zusätzliche Kriterien für die Akzeptanz eines Zählimpulses herangezogen, etwa das Treffen eines Energie- oder eines Zeitfensters.

Das unmittelbare Ergebnis einer Zählmessung ist eine gewisse Anzahl x gezählter Ereignisse (bei elektronischer Messung: Zählimpulse), die in einer bestimmten Zeitspanne, der *Messzeit* t_m , beobachtet werden. Die resultierende *Zählrate*

$$Z = \frac{x}{t_m} \quad (7)$$

ist ein Maß für die Intensität oder Flussdichte der gemessenen Strahlung und bei bekannter Effektivität η_Z der Zählrichtung wegen $Z = \eta_Z \cdot A$ auch ein Maß für die zu messende Aktivität A .

Alle Zählmessungen unterliegen bestimmten statistischen Gesetzmäßigkeiten, die a priori zu statistischen Schwankungen des Messwertes, hier der Anzahl der gemessenen Zählimpulse, führen. Für die Messungen des radioaktiven Zerfalls gilt, dass schon der Zerfallsakt an sich ein stochastischer Prozess ist. Auch die verwendeten Versuchsapparaturen registrieren in den seltensten Fällen die Strahlung zu 100 %. Zum Beispiel können indirekt ionisierende Strahlungsarten (Photonen und Neutronen) den Detektor mitunter ohne jede Wechselwirkung passieren und werden somit nicht nachgewiesen.

Im Folgenden sollen lediglich die statistischen Schwankungen der radioaktiven Kernumwandlungen für ein gegebenes Zeitintervall betrachtet werden. Ist die Wahrscheinlichkeit für den Nachweis eines Zerfallsaktes mit der entsprechenden Messapparatur konstant – was im Allgemeinen als gegeben angesehen werden kann – sind die dargestellten Gesetzmäßigkeiten auch für die entsprechenden Messungen relevant.

Statistische Verteilungen werden in der Theorie durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(x)$ für diskrete bzw. durch die (Wahrscheinlichkeits-) Dichtefunktion $f(x)$ für stetige Verteilungen beschrieben. Beide Funktionen sind definitionsgemäß auf 1 normiert. Es werden *Mittelwert* μ und *Varianz* σ^2 definiert:

$$\mu = \sum_x x \cdot P(x) \qquad \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx \qquad (8)$$

$$\sigma^2 = \sum_x (x - \mu)^2 \cdot P(x) \qquad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x) dx \qquad (9)$$

2.3.1 Binomialverteilung

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich *ein einzelner* Kern in der Zeit t umwandelt, ist durch das exponentielle Umwandlungsgesetz (2) gemäß

$$p = 1 - e^{-\lambda \cdot t} \qquad (10)$$

gegeben. Im Allgemeinen interessiert nicht die Umwandlung eines einzelnen Kerns. Stattdessen wird immer eine gewisse Anzahl N von radioaktiven Kernen (die *Grundgesamtheit*) beobachtet. Da die Kernumwandlungen voneinander unabhängig sind, können innerhalb einer gewissen Zeitspanne t auch mehrere Zerfälle auftreten. Allerdings kann ein einmal umgewandelter Kern nicht nochmal auf dieselbe Art zerfallen; er ist also vom weiteren Geschehen ausgeschlossen. Unter der Berücksichtigung dieser Umstände kann die Wahrscheinlichkeit $P(x)$ für das Auftreten von genau x Zerfallsereignissen durch die *Binomialverteilung*

$$P(x) = \binom{N}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{N-x} = \binom{N}{x} \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t})^x \cdot (e^{-\lambda \cdot t})^{N-x} \qquad (11)$$

ausgedrückt werden. Für den Mittelwert folgt

$$\mu = N \cdot p = N \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t}) \quad (12)$$

und die Varianz kann zu

$$\sigma^2 = N \cdot p \cdot (1 - p) = N \cdot (1 - e^{-\lambda \cdot t}) \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad (13)$$

bestimmt werden. Diese Verteilungsfunktion gilt für die Statistik aller Umwandlungsprozesse mit einer fixen, nicht beeinflussbaren Umwandlungskonstanten λ . Noch allgemeiner ausgedrückt handelt es sich um sogenannte *BERNOULLI-Experimente*, bei denen nur zwei verschiedene, sich gegenseitig ausschließende Ereignisse mit konstanter Wahrscheinlichkeit eintreten können.

2.3.2 POISSON-Verteilung

Die exakte Lösung für die Statistik des radioaktiven Zerfalls liefert die Binomialverteilung. Wird nur eine geringe Anzahl N von Kernen beobachtet, muss immer mit Binomialverteilungen gerechnet werden. Für relativ kleine N bereitet die Berechnung der Binomialkoeffizienten auch kaum Schwierigkeiten; das ändert sich für große N drastisch infolge der sehr großen Werte der Fakultät. Genau für diesen Fall und wenn die Beobachtungszeit klein gegenüber der Halbwertszeit ist, gilt

$$\lambda \cdot t = \frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}} \ll 1 \quad \text{und} \quad x \ll N \quad (14)$$

und die Binomialverteilung geht praktisch in die *POISSON-Verteilung*

$$P(X = x) = \frac{(N \cdot p)^x}{x!} \cdot e^{-N \cdot p} = \frac{\mu^x}{x!} \cdot e^{-\mu} \quad (15)$$

über. Sie beschreibt die Verteilung äußerst seltener Ereignisse, die mit einer geringen, aber konstanten Wahrscheinlichkeit $p = 1 - e^{-\lambda \cdot t}$ an einer sehr großen Anzahl von „Probanden“ N – hier die Gesamtheit der betrachteten radioaktiven Atomkerne – auftreten. Mit dem Übergang $N \cdot p \rightarrow \mu$ ist die weitere Betrachtung der Zahl N radioaktiver Kerne entbehrlich geworden und es interessiert nur noch der Erwartungswert für die diskrete Zufallsgröße X . Der Erwartungswert ist zugleich auch die Varianz σ^2 bzw. für die Standardabweichung gilt $\sigma = \sqrt{\mu}$. Somit hat die *POISSON-Verteilung* nur einen Verteilungsparameter μ .

Die Beziehung (15) lässt sich insbesondere unter Zuhilfenahme rechen technischer Hilfsmittel relativ leicht auswerten. Eine *Rekursionsformel*

$$P(x) = \frac{\mu}{x} \cdot P(x - 1) \quad (16)$$

entsteht mit dem Startglied $P(0) = e^{-\mu}$. Bei der grafischen Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktion diskreter Verteilungen sind nur Säulendiagramme o. ä. zulässig (siehe z. B. Abbildung 3). Ein Verbinden der Werte zu geschlossenen Kurvenzügen verbietet sich aufgrund des diskreten Definitionsbereiches selbstredend. In den meisten praktischen Fällen werden die Bedingungen (14) erfüllt. Die *POISSON-Verteilung* ist dann die richtige Form zur statistischen Beschreibung des radioaktiven Zerfalls. Trotzdem gibt es einige Beschränkungen bei der praktischen Anwendung: Für große μ wird die Berechnung nach (15) ungenau. Schwierig ist auch die Anwendung statistischer

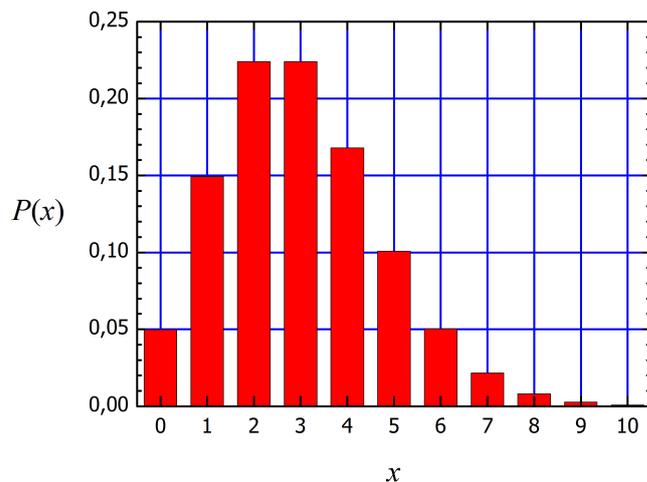


Abb. 3: Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(X = x)$ für eine POISSON-verteilte Zufallsvariable X mit $\mu = 3$

Tests zur Prüfung auf sogenannte *Reinheit* der Verteilung. Für diesen Zweck ist der Übergang zur stetigen GAUSS-Verteilung hilfreich.

2.3.3 GAUSS-/Normalverteilung

Unter Verwendung der Stirling-Formel zur Fakultätsberechnung großer Zahlen, sowie beim Übergang zu einer stetigen Zufallsvariablen folgt für Zählmessungen die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \mu}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\mu}}, \quad (17)$$

die eine spezielle Form der Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (18)$$

der GAUSS-Verteilung darstellt. (17) hat im Gegensatz zu (18) nur einen Verteilungsparameter, da hier die Varianz σ^2 mit dem Erwartungswert μ zusammenfällt. Die Normalverteilung mit der Dichtefunktion (17) ist der Grenzfalle der POISSON-Verteilung für große Erwartungswerte. Die Approximation der diskreten POISSON-Verteilung mit der stetigen GAUSS-Verteilung ist immer nur eine Näherung – wenn auch für $\mu > 10$ eine brauchbare und für $\mu > 50$ eine relativ genaue Näherung. Dies ist bei einem unmittelbaren Vergleich von Zählmessungen mit dieser theoretischen Verteilungsfunktion stets zu beachten.

2.3.4 Theoretische und empirische Verteilungsfunktionen

Die *theoretische* Verteilungsfunktion $F(x)$ für eine diskrete Zufallsvariable ist gemäß

$$F(X \leq x) = \sum_{i=0}^x P(X = i) \quad (19)$$

definiert. Die Definition für eine stetige Zufallsvariable ist durch

$$F(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx' \quad (20)$$

gegeben. Aufgrund der Normierung der Dichte- bzw. Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt immer $F(-\infty) = 0$ und $F(\infty) = 1$. Sind $f(x)$ bzw. $P(x)$ nur für ein Intervall $[a, b]$ definiert, so gilt $F(a) = P(x = a)$ und $F(b) = 1$.

Die Verteilungsfunktionen nehmen beispielsweise Formen wie

$$F(X \leq x) = N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \mu}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x'-\mu)^2}{2\mu}} dx' \quad (21)$$

an, welche die theoretische Verteilungsfunktion zu (17) darstellt und nicht analytisch lösbar ist.

In der Praxis ist aber der Erwartungswert μ nicht bekannt, sondern soll erst durch die Messungen abgeschätzt werden. Dazu wird eine Serie von n Einzelmessungen durchgeführt. Die Messwerte x_i können bei Zählmessungen nur natürlichzahlige Werte annehmen. Der Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \quad (22)$$

ist eine positive rationale Zahl und stellt einen Schätzwert für den theoretischen Erwartungswert μ dar. Er wird auch als *statistischer* oder *empirischer* Erwartungswert μ_x bezeichnet. Ein geeignetes Maß für die Streuung der Einzelmessungen ist die *empirische Standardabweichung* σ_x der Messreihe, die sich aus der Varianz

$$\sigma_x^2 \approx \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (23)$$

ergibt. Für die rechnerische Auswertung bietet sich die Darstellung

$$\sigma_x^2 \approx \frac{1}{n-1} \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 \right) = \frac{n}{n-1} \cdot (\overline{x^2} - \bar{x}^2) \quad (\text{für große } n) \quad \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

an. Eine weitere wichtige Größe ist die *Standardabweichung des Mittelwertes* $\sigma_{\bar{x}}$, die sich wieder aus der entsprechenden Varianz

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} \approx \frac{1}{n(n-1)} \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 \right) \quad (24)$$

ergibt. Die statistische Auswertung von Messserien mittels (22) bis (24) ist keine Besonderheit von Zählmessungen, sondern auch für Messwerte mit einer stetigen Verteilung gültig (siehe Anleitung zum Versuch „Fehleranalyse“). In unserem Falle sind die Messreihen entsprechend (18) und (21) normalverteilt.

Die Statistik der Zählmessungen gehorcht einer POISSON-Verteilung. Hierbei fällt – wie schon gesagt – der theoretische Wert der Varianz σ^2 mit dem Erwartungswert μ zusammen, die theoretische Standardabweichung ist also immer $\sigma = \sqrt{\mu}$.

Bereits eine einzige Messung ($n = 1$) von N Impulsen liefert eine Stichprobe für den Erwartungswert ($\mu \approx N$). Somit können die Varianz $\sigma^2 \approx N$, die Standardabweichung $\sigma \approx \sqrt{N}$ sowie die relative Standardabweichung $\varepsilon_\sigma \approx 1/\sqrt{N}$ abgeschätzt werden. Dabei spielt es keine Rolle ob die N Impulse am Stück gemessen oder in einer Serie von k Teilmessungen aufgenommen und anschließend gemäß

$$N = \sum_{i=1}^k x_i \quad (25)$$

akkumuliert werden. Die einzige Einschränkung ist, dass es sich auch hier wieder nur um eine statistische Schätzung handelt und dass POISSON-Statistik vorliegt.

Bei einer Gesamtheit von n gleichartigen Einzelmessungen mit der Gesamtimpulsanzahl N ist der Mittelwert $\bar{x} = N/n$ nach (22) der Schätzwert für den empirischen Erwartungswert μ_x einer Einzelmessung und die theoretische Standardabweichung ist $\sigma = \sqrt{\bar{x}} = \sqrt{N/n}$. Die *relative Häufigkeitsfunktion* $h(X = x) = \frac{H(X=x)}{n}$ ist gerade die empirische Wahrscheinlichkeitsfunktion, wobei $H(x)$ die absolute Häufigkeit der Ereignisse vom Typ $X = x$ ist.

In Abbildung 4(a) ist die GAUSS-Approximation einer großen Stichprobenmenge aus einer POISSON-Verteilung zu sehen. Beide Verteilungen haben die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{49} = 7$. Die Asymmetrie der POISSON-Verteilung ist auch bei diesem großen Erwartungswert noch deutlich zu erkennen. Aufgrund der großen Anzahl von Stichproben konnte hier auf eine Darstellung der sehr kleinen Unsicherheiten verzichtet werden.

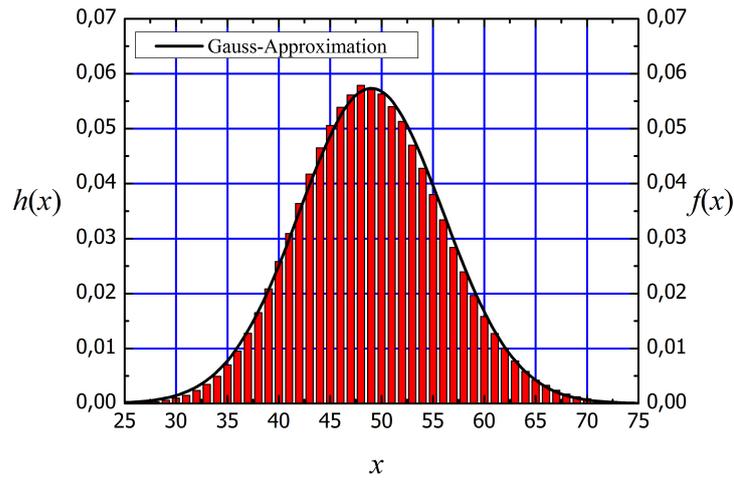
Für die *empirische* Verteilungsfunktion steht die *relative Summenhäufigkeit*

$$S(X \leq x) = \sum_{k=1}^x h(k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^x H(k) \quad , \quad (26)$$

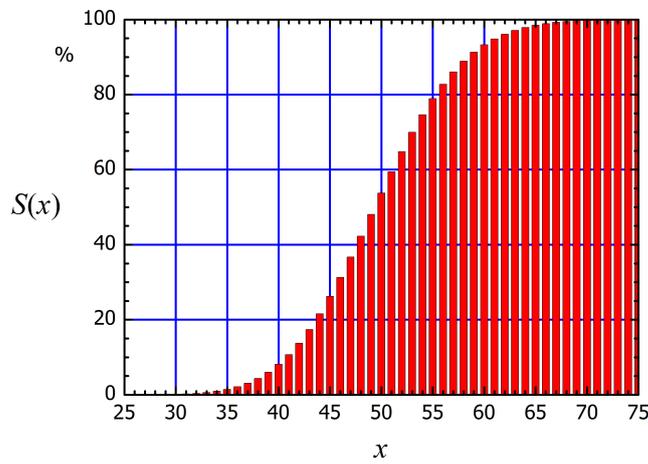
die meist in % angegeben wird. Sie ist das Äquivalent zu der theoretischen Verteilungsfunktion $F(x)$. Wird die normierte Summenhäufigkeit (26) mit der Verteilungsfunktion (20) verglichen, so muss für die normierte Summenhäufigkeit eine sogenannte Stetigkeitskorrektur durchgeführt werden. Dies ist notwendig um die diskreten Punkte der Summation von $S(x)$ mit den kontinuierlichen Grenzen der Integration von $F(x)$ in Einklang zu bringen. Dazu werden die Datenpunkte der empirischen Verteilungsfunktion aus Abbildung 4(b) am jeweiligen Intervallende in Abbildung 4(c) eingetragen, hier also bei $\tilde{x} = x + 0,5$.

Wie im Praktikum wird jetzt eine Gesamtheit von nur $n = 1000$ Stichproben diskutiert. Dazu werden mittels eines Generators Zufallszahlen erzeugt, die anhand einer POISSON-Verteilung mit dem gesetzten Erwartungswert $\mu = 49$ und der Standardabweichung $\sigma = 7$ gezogen werden. Das Ergebnis ist die in Abbildung 5 dargestellte Häufigkeitsverteilung $H(x)$ der Zufallszahlen. Insgesamt werden bei diesen 1000 Stichproben $N = 49212$ Impulse gemessen, was einem empirischen Erwartungswert von $\mu_x = \bar{x} = 49,21$ entspricht. Für die empirische Standardabweichung wird $\sigma_x = 7,09$ ermittelt. Die beobachtete empirische Streubreite für den Mittelwert ist $\sigma_{\bar{x}} = 0,22$. Der gemessene Mittelwert lag bei diesem „Experiment“ also gerade noch innerhalb der einfachen Streubreite des „wahren“ Wertes $\mu = 49$.

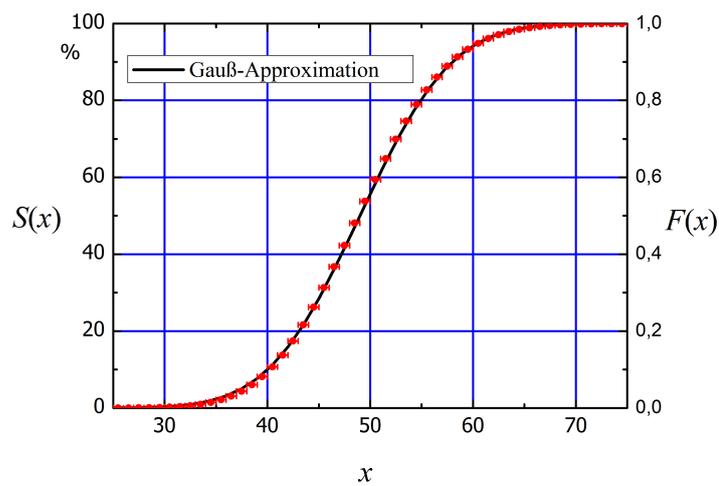
In Abbildung 6(a) sind dieselben Messwerte noch einmal mit den zufälligen Messabweichungen $\pm 2\sigma_B = \pm 2 \cdot \sqrt{H(x)}$ der absoluten Häufigkeitsfunktion $H(X = x)$ dargestellt. Diese Abbildung



(a) Empirische Häufigkeitsfunktion



(b) relative Summenhäufigkeit



(c) Empirische Verteilungsfunktion im Vergleich mit der theoretischen Verteilungsfunktion

Abb. 4: $n = 10^6$ Stichproben aus einer POISSON-Verteilung mit dem Erwartungswert $\mu = 49$ im Vergleich mit der Dichtefunktion der GAUSS-Verteilung

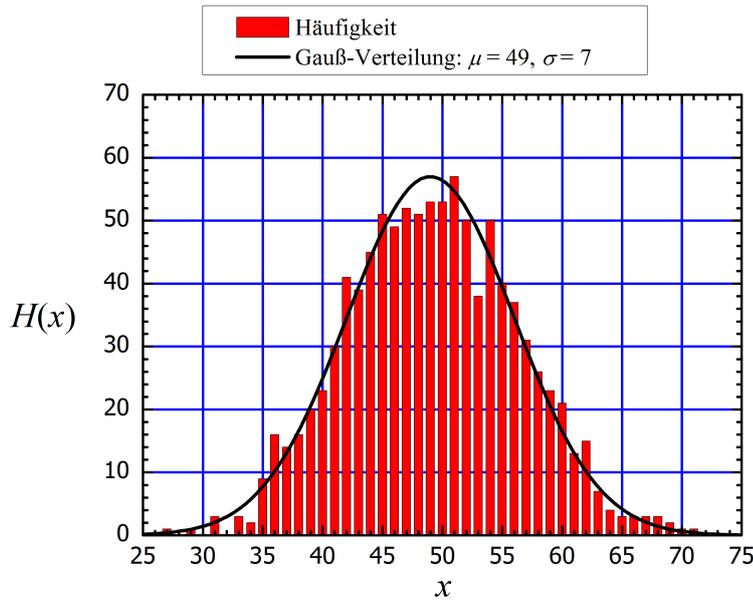
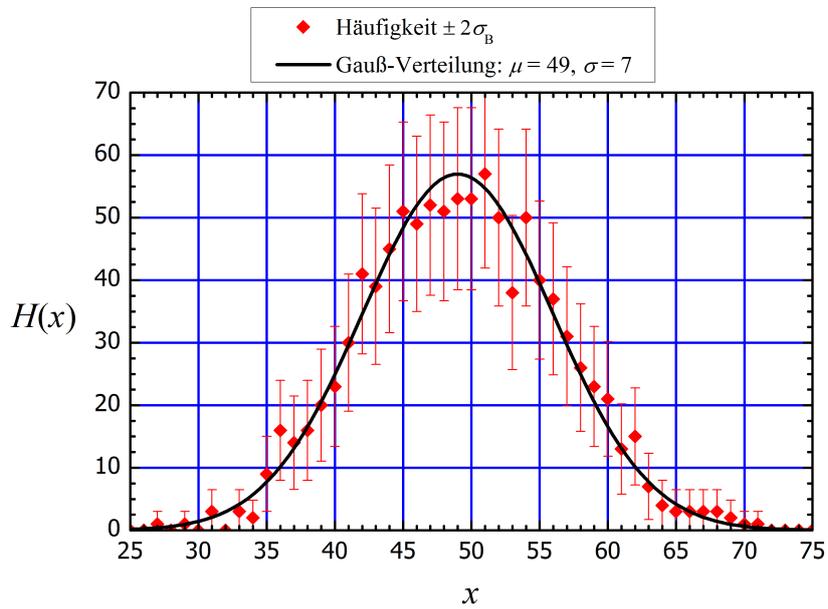


Abb. 5: Absolute Häufigkeit für 1000 Stichproben aus einer POISSON-Verteilung mit dem gesetzten Erwartungswert $\mu = 49$ im Vergleich mit der Dichtefunktion $1000 \cdot f(x)$ für die GAUSS-Verteilung

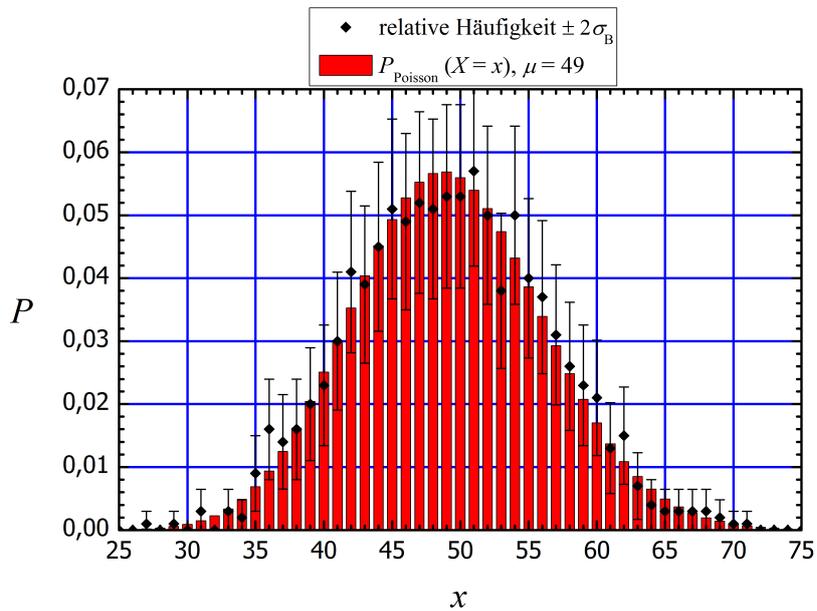
könnte das Resultat einer praktischen Versuchsauswertung sein. Beachten Sie, dass der empirische Erwartungswert für die GAUSS-Funktion verwendet und die Dichtefunktion mit dem Wert 1000 multipliziert wurde. Die Übereinstimmung zwischen den empirischen Werten und der GAUSSschen Näherung ist sehr gut. Diese Approximation ist durchaus vertretbar.

Eine Darstellung wie in Abbildung 6(b) ist einfacher zu erhalten. Hier muss nur die Wahrscheinlichkeitsfunktion der POISSON-Verteilung für den empirischen Erwartungswert, der sich aus den aufgenommenen Werten ergibt, berechnet werden und gemeinsam mit den gemessenen und normierten Häufigkeiten aufgetragen werden. Das Resultat ist überzeugend. Für kleine Erwartungswerte – im vorliegenden Versuch z. B. bei der Untergrundbestimmung – besteht gar keine andere Möglichkeit des Tests, weil dann die GAUSSsche Näherung versagt.

Insgesamt sind die vorangehend genannten Varianten des Tests insbesondere für große Erwartungswerte sehr mühselig, wenn keine Rechentechnik verfügbar ist oder entsprechende Software und/oder Fertigkeiten zu deren Bedienung nicht vorhanden sind. Als alternative Möglichkeit bietet sich die in Abbildung 7 gezeigte Darstellung der Messdaten in einem Wahrscheinlichkeitsnetz an. Hier wird die empirische Verteilungsfunktion (normierte Summenhäufigkeiten) $S(x)$ gegenüber $\tilde{x} = x + 0,5$ (Stetigkeitskorrektion) abgetragen. Dabei muss beachtet werden, dass die Werte der Summenhäufigkeiten immer binomial-verteilt sind, weswegen sich die Varianz gemäß (12) berechnet. Die so berechneten doppelten Standardabweichungen sind die zufälligen Messabweichungen für die Werte der relativen Summenhäufigkeiten und damit für die Lage der Fehlerbalken in entsprechenden Grafiken entscheidend. Die Abszisse des Wahrscheinlichkeitsnetzes ist so verzerrt, dass GAUSS-Verteilungsfunktionen automatisch eine Gerade ergeben. (Oft sind auch noch die Grenzen $\pm 1\sigma_S, \pm 2\sigma_S, \dots$ mit eingezeichnet.) Bei der grafischen Auswertung wird durch numerische Approximation oder mit Augenmaß eine Gerade durch die Punkteschar der empirischen Verteilungsfunktion gelegt. Der Ordinatenwert des Schnittpunktes der Gerade mit der Konstante bei $S(x) = 0,1 \%$



(a) Absolute Häufigkeiten im Vergleich mit der Dichtefunktion $1000 \cdot f(x)$ für die GAUSS-Verteilung ($\mu = 49, 2$)



(b) Absolute Häufigkeiten im Vergleich mit den Werten für die theoretische POISSON-Verteilung ($\mu = 49, 2$)

Abb. 6: 1000 Stichproben aus einer POISSON-Verteilung mit dem gesetzten Erwartungswert $\mu = 49$ einschließlich zufälliger Messabweichung ($\pm 2\sigma_B$ -Unsicherheit)

gibt gerade den Wert $x_u = \mu_x - 3,09 \cdot \sigma$ wieder. Bei der Konstanten $S(x) = 99,9 \%$ ergibt der Ordinatenwert des Schnittpunktes mit der Geraden entsprechend gerade den Wert $x_o = \mu_x + 3,09 \cdot \sigma$ wieder. Damit und mit dem Ordinatenwert des Schnittpunktes der Geraden mit der Konstanten $S(x) = 50 \%$, was dem Erwartungswert μ_x entspricht, können die Parameter der approximierten Normalverteilung bestimmt werden.

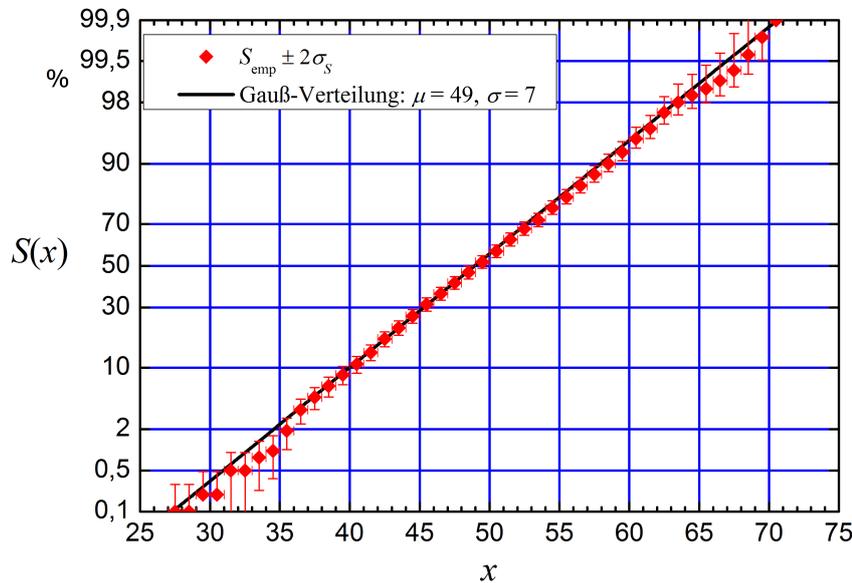


Abb. 7: Darstellung der empirischen Verteilungsfunktion einschl. zufälliger Messabweichung ($\pm 2\sigma_S$ -Unsicherheit) im Wahrscheinlichkeitsnetz

Da die Normalverteilung wiederum der Grenzfall der POISSON-Verteilung ist, gilt somit auch die GAUSSsche Fehlerfortpflanzung zur Berechnung der zufälligen Messabweichung. An folgendem, einfachen Beispiel soll dies demonstriert werden.

Die Nettozählrate $Z_n = Z_b - Z_0$ stellt die Differenz der Bruttozählrate $Z_b = N_b/t_b$ von der Untergrund-/Nullzählrate $Z_0 = N_0/t_0$ dar. Der Bruttomesseffekt von N_b Impulsen wird in der Bruttomessezeit t_b und der Nulleffekt N_0 innerhalb der Nulleffektmesszeit t_0 ermittelt. Die Standardabweichungen von N_b und N_0 sind $\sqrt{N_b}$ bzw. $\sqrt{N_0}$, da es sich um Zählmessungen handelt. Gemäß der GAUSSschen Fehlerfortpflanzung lässt sich für die Statistik der Nettozählrate der Ausdruck

$$\sigma_n^2 = \frac{N_b}{t_b^2} + \frac{N_0}{t_0^2} \quad \rightarrow \quad \sigma_n = \frac{1}{t_b} \cdot \sqrt{N_b + \frac{t_b^2}{t_0^2} \cdot N_0} \tag{27}$$

ableiten. Bei gleichen Messzeiten $t_b = t_0 \equiv t_{\text{mess}}$ wird dies zu

$$\sigma_n = \frac{\sqrt{N_b + N_0}}{t_{\text{mess}}} \tag{28}$$

vereinfacht. Für diese wichtigen Betrachtungen wurde die zufällige Messabweichung der Zeit vernachlässigt, da sie im Vergleich zum statistischen „Zählfehler“ in diesem Versuch keine Rolle spielt.

2.4 Das GEIGER-MÜLLER-Zählrohr (GMZ)

Die von radioaktiven Isotopen ausgesandte ionisierende Strahlung kann mit verschiedenen Strahlungsdetektoren gemessen werden. Es sind z. B. Gasionisations-, Anregungs- und Halbleiterdetektoren einsetzbar.

Das GMZ gehört zu den Gasionisationsdetektoren, bei denen die gebildeten Ladungsträger (Elektronen und Ionen) infolge des elektrischen Feldes im Detektor zu den Elektroden gelangen und durch die gesammelte Ladungsmenge in der Messanordnung einen registrierbaren Impuls auslösen. So wie in Abbildung 8 dargestellt, beeinflusst die angelegte Detektorspannung im starken Maße die entstehende Ladungsmenge und damit, je nach Schaltung des Messgeräts, die Impulshöhe oder den Strom.

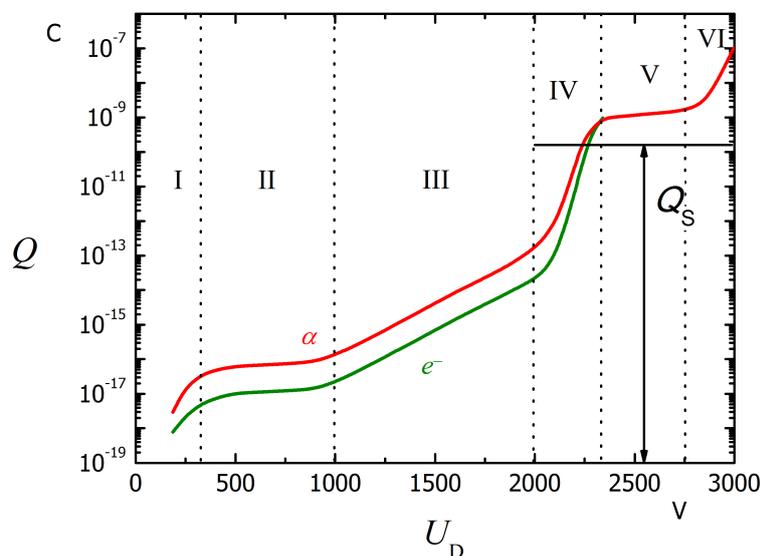


Abb. 8: Gesammelte Ladungsmenge Q als Funktion der Detektorspannung U_D bei einem Gasionisationsdetektor (schematische Darstellung)

Die unterschiedlichen Bereiche charakterisieren die Arbeitsweise der verschiedenen Gasionisationsdetektoren. Der Verlauf kann in folgende Bereiche eingeteilt werden:

- I – *Rekombinationsbereich*: Aufgrund der zu geringen anliegenden Detektorspannung/Feldstärke rekombinieren die primär erzeugten Ladungsträger auf dem Weg zu den Elektroden. Es kann keine Messung durchgeführt werden.
- II – *Sättigungsbereich*: Alle durch Primäronisation erzeugten Ladungsträger werden an den Elektroden gesammelt. Dadurch ist es mit den in diesem Bereich betriebenen Ionisationskammern möglich, anhand der erzeugten Ladungsmenge bzw. Impulshöhe Rückschlüsse auf die Art der Teilchen bzw. deren Energie zu ziehen.
- III – *Proportionalbereich*: Auftretende Stoßionisation durch beschleunigte Elektronen aus der Primäronisation bewirkt eine Sekundärionisation, die in diesem Bereich proportional der primären Ionisation ist. Dadurch können auch, ähnlich zu den Ionisationskammern, mit den in diesem Bereich betriebenen Proportionalzählrohren Rückschlüsse auf die Art und Energie der Teilchen gezogen werden. Das Signal wird hier durch die Stoßionisation schon im Zählrohr

bis zu einem Faktor drei verstärkt.

- IV** – *Bereich der beschränkten Proportionalität*: Sekundäre Ionisation überwiegt zunehmend die Primäreffekte.
- V** – *Auslösebereich*: Die Stoßionisation nimmt Lawineneigenschaften an und bestimmt unabhängig von der Primäriodisation die erzeugte Ladungsmenge. Dadurch sind mit den in diesem Bereich betriebenen GEIGER-MÜLLER-Zählrohren ausschließlich Zählmessungen möglich.
- VI** – *Dauerentladung*: Die hohe Feldstärke führt zu Dauerentladungseffekten, die unabhängig vom Einfall ionisierender Strahlung auftreten. Glimmlampen arbeiten nach diesem Prinzip.

In einem GMZ wird ein Radialfeld durch eine zylinderförmige Kathode und eine auf der Zylinderachse platzierte Anode erzeugt. In diesem abgeschlossenen Raum befindet sich ein Zählgas, dessen Atome oder Moleküle durch die Wechselwirkung mit der eintretenden ionisierenden Strahlung ionisiert oder angeregt wird. Die so erzeugten primären Ladungsträger werden durch die hohe Feldstärke über Stoßionisation vervielfacht. Verstärkungen vom 10^8 – bis 10^{10} –fachen der ursprünglich erzeugten Ladungsmenge sind möglich. Der primäre Ionisationseffekt wird dadurch vollständig überdeckt, was dazu führt, dass mit dem GMZ ausschließlich Zählmessungen möglich sind. Ebenfalls ist durch die hohe erzeugte Ladungsmenge eine vergleichsweise einfache Ausselelektronik realisierbar. Ein entsprechendes Prinzipschaltbild ist in Abbildung 9 dargestellt.

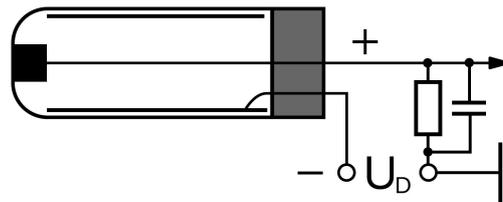


Abb. 9: Schematischer Aufbau und Prinzipschaltung eines GEIGER-MÜLLER-Zählrohres

Je nach Zusammensetzung und Druck des Zählgases (z. B. $\text{Ar}/\text{Ethanol}$ dampf = $10/1$ bei 13 kPa Gesamtdruck) kann der Auslösebereich schon bei niedrigen Spannungen (einige 100 V) erreicht werden. Zur Bestimmung der richtigen Arbeitsspannung des GMZ kann die *Zählrohrcharakteristik* herangezogen werden. Dazu wird die Zählrate Z in Abhängigkeit von der Detektorspannung U_D aufgetragen. In dieser Darstellung sollte deutlich ein Plateau zu erkennen sein, in dem die Zählrate praktisch unabhängig von der Detektorspannung ist. Abweichungen von 5 % pro 100 V sind dabei zulässig. Auf der linken Seite des Plateaus ist eine steile Flanke, beginnend bei der Einsatzspannung U_E , zu erkennen. In dem Fall der Abbildung 10 liegt diese bei dem Wert von $U_E = 312$ V. Die Arbeitsspannung U_A liegt tief im Plateau, also ca. 50 V bis 100 V oberhalb der Einsatzspannung. In dem vorliegenden Fall würde das einer Arbeitsspannung von $U_A = 360 \dots 420$ V entsprechen.

3 Experimentelle Durchführung

3.1 Versuchsaufbau

Die Proben sind in der Zählrohrhalterung mit dem Bajonettverschluss (Abbildung 11(a)) zu arretieren. Anschließend wird die Lichtschutzkappe aus PVC über den Messkopf geschoben und es

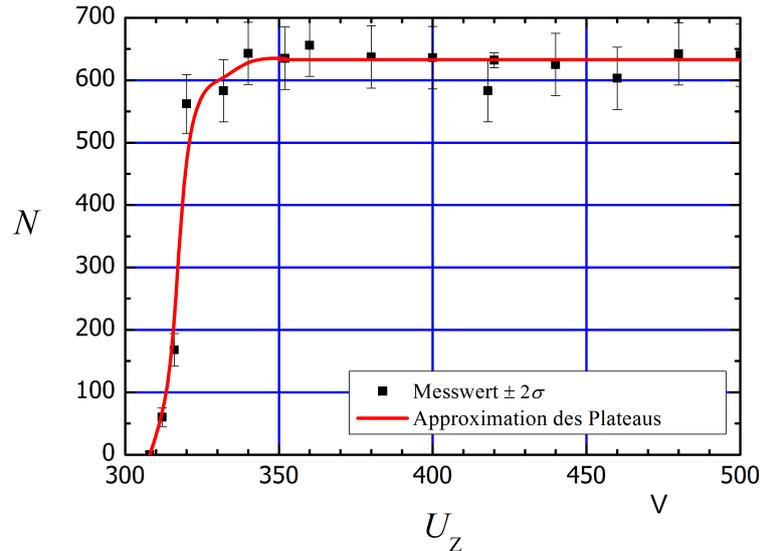


Abb. 10: Beispiel für eine Zählrohrcharakteristik: Ermittelte Impulszahl N für eine Messzeit von 120 s als Funktion der Detektorspannung U_D

kann mit den Messungen begonnen werden.

Die in Abbildung 11(b) gezeigte Elektronik zum Betrieb des Zählrohrs, entwickelt im Elektronik-Labor des Instituts für Kern- und Teilchenphysik, ist via USB mit einem PC verbunden. Auf dem Gerät wird bei *DET.-VOLTAGE* die Zählrohrspannung angezeigt. Das *RATEMETER* zeigt logarithmisch skaliert die Dichte der ankommenden Zählimpulse an. Zur detaillierten Steuerung wird unter LabView der Fa. *National Instruments* nach Aufruf des Programms *Radiometrie & Zählstatistik* ein virtuelles Strahlungsmessgerät zur Verfügung gestellt.

Die Bedienung des in Abbildung 12 gezeigten virtuellen Geräts ist weitgehend selbsterklärend. Die sich während der Messung aufbauenden beiden Grafiken mit berechnetem Mittelwert und Standardabweichung sollten nur informativ genutzt werden. Die für diesen Versuch notwendigen Werte werden manuell aus der Anzeige übernommen und ausgewertet.

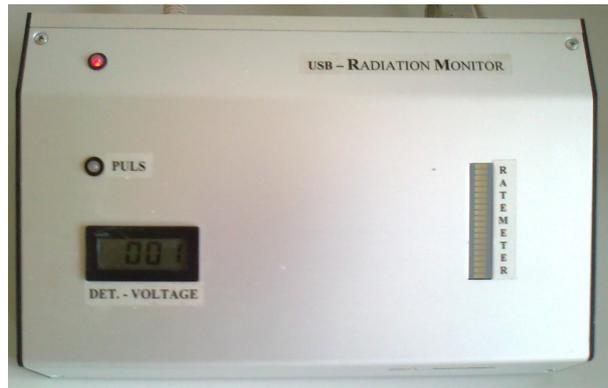
Für die weitere Verarbeitung steht Standardsoftware (*Microsoft Excel*[®] und *Microcal Origin*[®]) zur Verfügung. Eine Nutzung dieser Möglichkeiten ist zur Lösung der Praktikumsaufgaben nicht notwendig, erleichtert und beschleunigt die Arbeit aber sehr. Zur Orientierung sei auf die vorhandenen Hilfen und ausliegende Gerätebeschreibungen verwiesen.

3.2 Messung der Zählrohrcharakteristik

Wie bereits im Kapitel 2.4 erwähnt, soll für das Zählrohr die Arbeitsspannung U_A ermittelt werden. Dazu wird die Zählrohrcharakteristik aufgenommen. Dafür ist, zunächst beginnend bei $U_D = 290$ V, die Einsatzspannung U_E , bei der die ersten Impulse auftreten, zu ermitteln. Liegt sie über 350 V, ist das Zählrohr höchstwahrscheinlich defekt. In dem sich ergebenden Intervall



(a) Messkopf für die Aktivitätsbestimmung (von links nach rechts: Anschlusskabel für das Zählgerät, Behälter für die Probenflüssigkeit, Halterung mit Zählrohr und Bajonettfassung; darunter die PVC-Lichtschutzkappe)



(b) Das Gerät zum Betrieb des Zählrohrs

Abb. 11: Im Versuch verwendete Geräte

$U_E - 6 \text{ V} \leq U_E < U_E + 6 \text{ V}$ sind die Messwerte in 2 V-Schritten aufzunehmen. Im Anschluss daran kann die Schrittweite auf 20 V bis 40 V erhöht werden. Das Ende der aufzunehmenden Kurve ist mit einer Spannung zwischen 460 V bis 500 V erreicht.

Für die Darstellung sind insgesamt 12 bis 15 Messpunkte ausreichend, die zusammen mit ihren Unsicherheiten für einen Vertrauensbereich von $\approx 95 \%$ ($\Delta N_z = 2\sigma_N = 2\sqrt{N}$) aufzutragen sind. Auf die Darstellung einer Unsicherheit für die Spannung kann verzichtet werden, da sie kleiner als $\pm 1 \text{ V}$ ist. Die Messzeit für all diese Messungen ist so zu wählen, dass für die relativen Standardabweichungen ε_σ der Messwerte im Plateau $\varepsilon_\sigma \leq 0,05$ gilt.

Aus der graphischen Darstellung $N = f(U_D)$ können die Einsatzspannung U_D , die Arbeitsspannung $U_A \approx U_E + 50 \dots 100 \text{ V}$, die Länge des Plateaus sowie dessen absolute und relative Steigung bestimmt werden (letzteres in Einheiten V^{-1} und $\%/100 \text{ V}$).

3.3 Radiometrische Kaliumbestimmung

Die Radioaktivität aller Kaliumverbindungen ermöglicht deren Konzentrationsbestimmung durch Aktivitätsbestimmungen. Es sind prinzipiell zwei Wege möglich, um aus einer Messung der Zählrate Z die Konzentration c zu ermitteln.

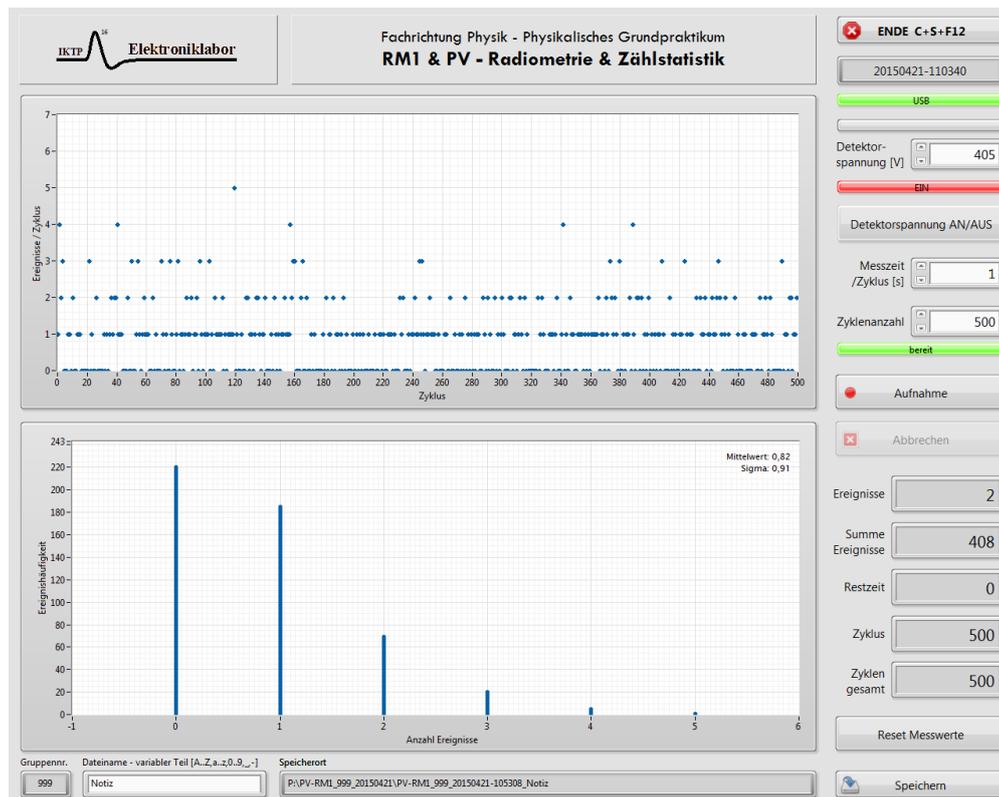


Abb. 12: Ansicht des virtuellen Strahlungsmessgeräts, entwickelt im Elektronik-Labor des Instituts für Kern- und Teilchenphysik

Das *Absolutverfahren* gestattet bei Kenntnis der Effektivität η der Messanordnung die Berechnung der Aktivität A und damit auch der Konzentration c aus der Zählrate Z .

Das *Relativverfahren* ist die gebräuchlichere Methode, bei der für eine definierte Messmethodik eine Kalibrierkurve der Zählrate Z als Funktion der Konzentration c zu $Z = f(c)$ aufgenommen wird, die dann zur Konzentrationsbestimmung bei Verwendung dieses Verfahrens dient. Dieses Vorgehen ist dann zu empfehlen, wenn die für eine Bestimmung der Effektivität η notwendigen Konstanten nicht hinreichend bekannt sind oder sich diese unter den konkreten Versuchsbedingungen bei einer Konzentrationsänderung ebenfalls verändern können. Diese mögliche Abweichung von der Linearität der Beziehung $Z = f(c)$ wird bei der Verwendung einer experimentell bestimmten Kalibrierkurve berücksichtigt.

Bei den in diesem Versuch vorhandenen Messbedingungen ist der lineare Zusammenhang zwischen Z und c gewährleistet. Es kann die Geradengleichung

$$N = a \cdot c + b$$

angesetzt werden. Die Koeffizienten für den Anstieg a und den Achsenabschnitt b werden durch die Punkte der Zählrate Z_1 , hervorgerufen durch die bekannte Konzentration $c_1 = 4 \text{ mol/l}$, und der Untergrundzählrate Z_0 , hervorgerufen durch die Konzentration von Kalium in destilliertem Wasser $c_0 = 0$, bestimmt. Über das Anstiegsdreieck $a = dz/dc$ (siehe Abbildung 13) wird die Kalibriergerade

gesetzt. Die Funktion f ist dabei der Quotient

$$f(N, N_1, N_0) = \frac{N - N_0}{N_1 - N_0}$$

der sogenannten Netto-Impulszahlen (Differenz aus Brutto- und Untergrundimpulszahlen). f hat die physikalische Einheit 1, da es sich um ein Verhältnis handelt.

Für die Berechnung der Messunsicherheit der Konzentration c ist die Bildung der partiellen Ableitungen nach den vier unabhängigen Variablen c_1 , N , N_1 und N_0 notwendig. Es ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial c_1} &= f & , & & \frac{\partial c}{\partial N_1} &= c_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial N_1} & , \\ \frac{\partial c}{\partial N} &= c_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial N} & , & & \frac{\partial c}{\partial N_0} &= c_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial N_0} & . \end{aligned}$$

Die auftretenden partiellen Ableitungen von f lauten (mit Hilfe der Quotientenregel)

$$\frac{\partial f}{\partial N} = \frac{1}{N_1 - N_0} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial N_1} = -\frac{N - N_0}{(N_1 - N_0)^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial N_0} = \frac{N - N_1}{(N_1 - N_0)^2} \quad .$$

3.4.1 Berechnung der systematischen Messabweichung

Eine systematische Messunsicherheit des Zählgerätes wirkt sich auf den berechneten Wert der Aktivität der unbekanntenen Quelle nicht aus, da davon ausgegangen werden kann, dass das Messgerät immer ein um einen konstanten Anteil zu kleines oder zu großes Zählergebnis liefert. Die systematische Messunsicherheit, die bedingt durch die nicht exakt gleiche Befüllung der Quellflüssigkeit in den Messbechern auftritt, wird mit einer relativen Messabweichung der Impulsraten von $\varepsilon_{s,N} = 2\%$ abgeschätzt (95 % Sicherheit). Die relative systematische Messabweichung der Zählraten für die Quellflüssigkeit ist also immer gleich groß, für die Ungrundzählrate ist sie vernachlässigbar. Die Konzentration c_1 wurde mit einer relativen systematischen Messabweichung von $\varepsilon_{s,c} = 3\%$ bestimmt (95 % Sicherheit).

- **(Für Physikstudenten)**

Für die Berechnung der systematischen Messabweichung einer Funktion f von m unabhängigen (unkorrellierten) Variablen x_i kommt das vom Physiker bevorzugte GAUSSsche Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\Delta f_s^2 = \sum_{i=1}^m \Delta x_{i,s}^2 \quad (32)$$

zur Anwendung. Für den vorliegenden Zusammenhang ergibt sich die systematische Messunsicherheit

$$\Delta c_s = \sqrt{(f \cdot \Delta c_{1,s})^2 + c_1^2 \cdot \left[\left(\frac{\partial f}{\partial N} \right)^2 \cdot \Delta N_s^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial N_0} \right)^2 \cdot \Delta N_{0,s}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial N_1} \right)^2 \cdot \Delta N_{1,s}^2 \right]}$$

und mit der Annahme einer 68 %-igen Sicherheit können ΔN_s bzw. $\Delta c_{1,s}$ durch

$$\Delta N_s = 0,5 \cdot \varepsilon_{s,N} \cdot N = 0,01 \cdot N \quad \text{bzw.} \quad \Delta c_{1,s} = 0,5 \cdot \varepsilon_{s,c} \cdot c_1 = 0,015 \cdot c_1$$

berechnet werden. Somit ist

$$\Delta c_s = c_1 \cdot \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{s,c}}{2} \cdot f\right)^2 + \frac{\varepsilon_{s,N}^2}{4} \cdot \left[\left(\frac{\partial f}{\partial N}\right)^2 \cdot N^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial N_1}\right)^2 \cdot N_1^2\right]} \quad (33)$$

die endgültige Beziehung für die systematische Messabweichung der unbekanntem Konzentration c

- (**Für Studierende der Ingenieurwissenschaften**) Eine systematische Messabweichung einer Funktion f von m unabhängigen Variablen x_i pflanzt sich unter der vereinfachten Berechnung der maximalen Messunsicherheit

$$\Delta f_s = \sum_{i=1}^m \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_{i,s}| \quad (34)$$

fort.

Für den vorliegenden Zusammenhang ergibt sich die systematische Messunsicherheit

$$\Delta c_s = f \cdot \Delta c_{1,s} + c_1 \cdot \left(\left| \frac{\partial f}{\partial N} \right| \cdot |\Delta N_s| + \left| \frac{\partial f}{\partial N_0} \right| \cdot |\Delta N_{0,s}| + \left| \frac{\partial f}{\partial N_1} \right| \cdot |\Delta N_{1,s}| \right)$$

und mit der Annahme einer 95 %-igen Sicherheit können ΔN_s bzw. $\Delta c_{1,s}$ durch

$$\Delta N_s = \varepsilon_{s,N} \cdot N = 0,02 \cdot N \quad \text{bzw.} \quad \Delta c_{1,s} = \varepsilon_{s,c} \cdot c_1 = 0,03 \cdot c_1$$

berechnet werden. Somit ist

$$\Delta c_s = c_1 \cdot \left[\varepsilon_{s,c} \cdot f + \varepsilon_{s,N} \cdot \left(\left| \frac{\partial f}{\partial N} \right| \cdot N + \left| \frac{\partial f}{\partial N_1} \right| \cdot N_1 \right) \right] \quad (35)$$

die endgültige Beziehung für die maximale systematische Messabweichung der unbekanntem Konzentration c .

3.4.2 Berechnung der zufälligen Messabweichung

Die zufällige Messabweichung Δc_z entspricht in dem hier vorliegenden Fall gerade der Standardabweichung σ_c der zu bestimmenden Konzentration c .

Allgemein gilt für die Varianz σ_f^2 bzw. Standardabweichung σ_f für einen Messwert, der als Funktion f von m unabhängigen Variablen x_i darstellbar ist, dass sie sich nach dem GAUSSschen Fehlerfortpflanzungsgesetz (auch *Varianzfortpflanzungsgesetz* genannt)

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \sigma_{x_i}^2 \quad (36)$$

berechnet. Hierbei sind $\sigma_{x_i}^2$ die Varianzen der Variablen x_i . Für den konkreten Fall kann für c_1 keine zufällige Messabweichung gegeben werden, sodass

$$\sigma_c^2 = c_1^2 \cdot \left[\left(\frac{\partial f}{\partial N} \right)^2 \cdot \sigma_N^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial N_0} \right)^2 \cdot \sigma_{N_0}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial N_1} \right)^2 \cdot \sigma_{N_1}^2 \right]$$

gilt. Unter Berücksichtigung von $\sigma_N^2 = N$ (und analog für N_0 und N_1) vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\sigma_c^2 = c_1^2 \cdot \left[\left(\frac{\partial f}{\partial N} \right)^2 \cdot N + \left(\frac{\partial f}{\partial N_0} \right)^2 \cdot N_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial N_1} \right)^2 \cdot N_1 \right] \quad (37)$$

und es ist lediglich zu beachten, dass die schon zahlenmäßig bekannten partiellen Ableitungen von f zu quadrieren sind.

- **(Für Physikstudenten)**

Die zufällige Messabweichung der gesuchten Konzentration wird für einen Vertrauensbereich von $\approx 68\%$ gemäß

$$\Delta c_z = \sigma_c$$

angegeben.

- **(Für Studierende der Ingenieurwissenschaften)**

Die zufällige Messabweichung der gesuchten Konzentration wird für einen Vertrauensbereich von $\approx 95\%$ gemäß

$$\Delta c_z = 2 \cdot \sigma_c$$

angegeben.

Für diese Messaufgabe ist die Abschätzung einer maximalen Messunsicherheit mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 2% akzeptabel.

3.4.3 Angabe der gesamten Messabweichung der Konzentrationsbestimmung

- **(Für Physikstudenten)**

Für den Physiker ist es üblich, die systematische und statistische Messunsicherheit für einen Vertrauensbereich von $\approx 68\%$ getrennt anzugeben.

- **(Für Studierende der Ingenieurwissenschaften)**

Durch Addition der zufälligen und systematischen Anteile

$$\Delta c = \Delta c_s + \Delta c_z$$

folgt die maximale Messabweichung der Konzentrationsbestimmung.

Die Angabe der relativen Messabweichung $\varepsilon = \Delta c/c$, vorzugsweise in der Einheit $\%$, sollte ebenfalls erfolgen.

3.4.4 Hinweise zur Betrachtung der Messunsicherheiten

Bei der Versuchsdurchführung wird die Unsicherheit der Resultate im Wesentlichen durch Messabweichungen bei der Bestimmung der Zählrate Z bzw. der Konzentration c_1 verursacht. Der Einfluss von Ungenauigkeiten bei der Einstellung der Detektorspannung bzw. bei der Zeitmessung kann

vernachlässigt werden.

Für die Bestimmung der Messunsicherheiten ist es sinnvoll, die drei partiellen Ableitungen von f numerisch zu berechnen. Welche physikalischen Einheiten haben diese Ableitungen? Mit einem Tabellenkalkulationsprogramm lassen sich leicht die jeweiligen Anteile der einzelnen Messeffekte an der systematischen und relativen Messabweichung der Aktivitätsbestimmung berechnen und akkumulieren. Ohne rechentechnische Hilfsmittel kann diese Rechnung auch einfach im Protokollheft erfolgen. Eine solche Vorgehensweise ist besser als die unmittelbare Eingabe der Beziehungen (35) und (37) in den Taschenrechner. Sie verringert die Gefahr eines Eingabefehlers und Sie erhalten ein Gefühl für den Einfluss der Einzelmesswerte auf die Messabweichungen.

Ebenfalls sollte diskutiert werden, in welchem Maße die Verlängerung der Messzeit eine Erhöhung der Messgenauigkeit bewirkt. Was bedeutet das im Kontext der begrenzten Praktikumszeit für Ihre Versuchsplanung? Welche Messzeiten müssen am ehesten verlängert werden, um eine Verbesserung der Genauigkeit zu erzielen?

3.5 Der χ^2 -Konsistenztest (nur für GPIII)

Eine notwendige Bedingung für das Vorliegen einer Poisson-Verteilung ist gegeben durch die Beziehung zwischen Standardabweichung und Erwartungswert $\sigma = \sqrt{\mu}$, die innerhalb der Unsicherheitsgrenzen erfüllt sein sollte. Genauere Kriterien beziehen die tatsächlichen Abweichungen der Messpunkte $H_{\text{exp}}(x_i)$ von einer theoretischen Verteilung (hier Poisson-Verteilung, H_{theo}) ein. Aufgrund des bekannten Wahrscheinlichkeitscharakters der quadratischen Abweichungen (χ^2 -Verteilung) lassen sich Kriterien zur Beurteilung der Konsistenz von Stichprobe und Grundgesamtheit ableiten.

Die zentrale Test-Größe als integrales Maß der quadratischen Abweichungen von Stichprobe und angenommener Grundgesamtheit ist gegeben durch:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(H_{\text{exp}}(x_i) - H_{\text{theo}}(x_i))^2}{\Delta H_{\text{theo}}(x_i)^2} \stackrel{\text{Poisson}}{=} \sum_{i=1}^N \frac{(H_{\text{exp}}(x_i) - H_{\text{theo}}(x_i))^2}{H_{\text{theo}}(x_i)}.$$

Die Aufgabe besteht nun darin für die Stichproben, die zugehörigen Werte für χ^2 zu bestimmen und mit der zugehörigen Verteilung zu vergleichen, welche von der Anzahl der Freiheitsgrade abhängt. Für verschiedene Freiheitsgrade sind die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichten dargestellt (Abb. 14).

In Abb. 14 ist für $n = 8$ Freiheitsgrade das Signifikanz-Niveau von $\alpha = 5\%$ dargestellt. Den entsprechenden Schwellwert für χ_s^2 , der sich aus der folgenden Gleichung berechnet:

$$\alpha = \int_{\chi_s^2}^{\infty} f(\chi^2; n) d\chi^2,$$

entnimmt man i.d.R. der entsprechenden Tabelle (Abb. 15).

Nun vergleicht man den experimentellen Wert mit dem Schwellwert für das angegebene Signifikanz-Niveau. Die folgenden Aussagen lassen sich treffen:

- Wenn $\chi^2 < \chi_s^2$, dann wird die gemessene Stichprobe als konsistent zu einer Poisson-verteilten

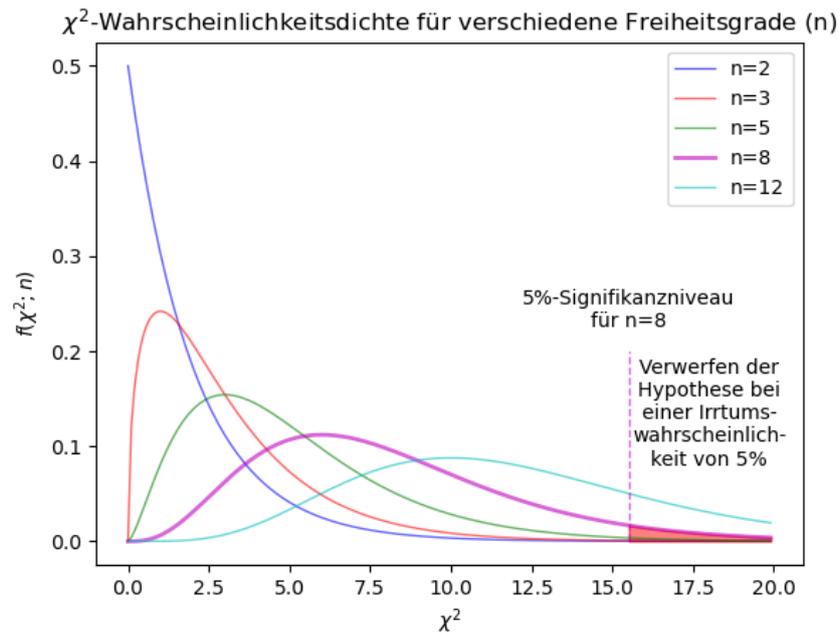


Abb. 14: χ^2 -Wahrscheinlichkeitsdichten für verschiedene Freiheitsgrade. Größere Abweichungen der Stichprobe von der erwarteten Verteilung sind statistisch möglich, werden aber zunehmend unwahrscheinlicher. Für $n = 8$ Freiheitsgrade beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass χ^2 den Wert 15.51 überschreitet, genau 5%, d.h. sollte die angenommene Verteilung richtig sein, wird bei diesem Signifikanz-Niveau in 5% aller Fälle die richtige Hypothese fälschlicherweise verworfen (Irrtumswahrscheinlichkeit).

Grundgesamtheit betrachtet. Dies ist allerdings kein endgültiger Beweis, hier wird nur gezeigt, dass es keinen Widerspruch gibt. (Freispruch aus Mangel an Beweisen)

- Wenn $\chi^2 \geq \chi_s^2$, dann wird die gemessene Stichprobe als nicht-konsistent zu einer Poissonverteilten Grundgesamtheit angesehen. Somit wird die Hypothese der zugrundeliegenden Poissonverteilung verworfen, da die quadratischen Abweichungen einen Schwellwert überschreiten. Jedoch sind Abweichungen in diesem Bereich mit einer Wahrscheinlichkeit laut Signifikanzniveau statistisch durchaus möglich, weshalb die Gefahr besteht, dass die richtige Hypothese fälschlicherweise verworfen wird (Fehler 2. Art).

Merke: Statistische Tests können nur falsifizieren. Bestätigungen erfordern eine strikte Formulierung von Hypothese und Gegenhypothese, bzw. die Anwendung weiterer Tests und Messungen.

Für die praktische Berechnung von χ^2 ist aufgrund des Wahrscheinlichkeitscharakters zu beachten, dass eine Mindestanzahl sowohl von Messungen als auch von Klassen vorliegt, d.h. konkret:

- mindestens 5 Werte pro Klasse (ggf. Klassen zusammenlegen)
- mindestens 6 Klassen

⇒ d.h. möglich für $n > 30$ Messwerte

Weiterhin ist die Anzahl der Freiheitsgrade (n) erforderlich, welche Sie im Falle der Poisson-Verteilung durch

Chi-square Distribution Table

d.f.	.995	.99	.975	.95	.9	.1	.05	.025	.01
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	2.71	3.84	5.02	6.63
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	4.61	5.99	7.38	9.21
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	6.25	7.81	9.35	11.34
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67

Abb. 15: Tabelle zu den Schwellwerten der χ^2 -Verteilung; Signifikanz-Niveau (Irrtumswahrscheinlichkeit) horizontal, Anzahl der Freiheitsgrade vertikal.

$$n = M - P$$

mit M als Anzahl der Klassen und P als Anzahl der Beschränkungen, die im Falle der Poisson-Verteilung zur Festlegung von Erwartungswert und Normierung führen, d.h. $P = 2$.

3.6 Messung der Halbwertszeit von ^{234m}Pa (nur für GPIII)

Der Isotopengenerator für das Nuklid ^{234m}Pa besteht aus einem zylindrischen Kunststoffbehälter, der hermetisch verschlossen ist. Im Inneren befindet sich eine saure, wässrige Lösung mit angereichertem Uran (^{238}U als Uranylнитrat) und seinen unmittelbaren Folgeprodukten. Weiterhin befindet sich im Behälter eine organische Phase (Isobutylmethylketon). Diese ist mit Wasser nicht mischbar und schwimmt daher auf der wässrigen Lösung. Bei einem etwa zweiminütigen heftigen Schütteln wird das Protaktinium aus der wässrigen in die organische Phase extrahiert. Dort substituiert es Wasserstoffatome. Dies ist chemisch aber nur dem Element Protaktinium möglich. Alle anderen Zerfallsprodukte der Uran-Radium-Reihe (Ausgangspunkt ^{238}U) werden von der organischen Phase nicht aufgenommen. Der Tochterkern von ^{234m}Pa ist ^{234}U und hat bei 160.000 Jahren Halbwertszeit eine vernachlässigbare Aktivität. Durch einen aufgesetzten β - Detektor kann nun die Strahlung bei der Kernumwandlung des ^{234m}Pa separat gemessen werden. Die Photonenstrahlung aus der wässrigen Phase bildet nur einen geringen, konstanten Untergrund. Es wird in Intervallen von jeweils 6 s gemessen. Zunächst wird die Zählrate kurz ansteigen bis sich wässrige und organische Lösung vollständig getrennt haben. Die Messung wird fortgesetzt, bis ein konstanter Endwert erreicht ist. Weiterhin ist eine Untergrundmessung über die gesamte Messzeit vorzunehmen.

Aus dem zeitlichen Verlauf der Messwerte ist die Halbwertszeit rechnerisch zu bestimmen. Es bietet sich an, an die Messdaten eine dem Zerfallsgesetz entsprechende Kurve anzupassen und die Halbwertszeit als Parameter mit stat. Messunsicherheit auszugeben. Beachten Sie, dass die Zielfunktion auch den Untergrund als Anpassungsparameter enthalten muss. In einer halblogarithmischen Darstellung der Zählrate kann man leicht erkennen, wann sich beide Phasen vollständig entmischt haben. Erst ab diesem Zeitpunkt sollen Datenpunkte für die Kurvenanpassung berücksichtigt werden.

Autorenschaft

Diese Versuchsanleitung wurde in ihrer ursprünglichen Form von PD Dr. Jürgen Henniger und Dr. Rainer Schwierz erstellt und von F. Hartung bearbeitet. Aktuelle Änderungen werden von der Praktikumsleitung durchgeführt.

4 Fragen

In dieser Anleitung stehen mehrere Dutzende Gleichungen, die für eine halbwegs vollständige Darstellung des Stoffes notwendig sind. Für den eigentlichen Versuch brauchen Sie weit weniger Formeln. Bereits das Herausarbeiten dieser essentiell wichtigen Formeln stellt schon eine gute Art der Vorbereitung dar. Als Hilfestellung dienen Ihnen die folgenden Fragen.

1. Erarbeiten Sie sich ein Grundlagenwissen zur Radioaktivität (Definition, Größen und Einheiten, Zerfallstypen).
2. Wie kann der sogenannte Nulleffekt verringert werden?
3. Wann ist eine Aktivität auf ihren tausendsten bzw. millionsten Teil abgeklungen?
4. Unter welchen Bedingungen folgen bei Aktivitätsmessungen die ermittelten Impulszahlen einer POISSON-Verteilung?
5. Wie groß sind bei einer Zählmessung die Varianz und die Standardabweichung bei N gemessenen Impulsen? Wie ist eine Messzeit t_m festzulegen, wenn bei einer Zählmessung eine bestimmte Fehlergrenze für die relative zufällige Messabweichung unterschritten werden soll? (Formel!) Welche Informationen benötigen Sie zur Ermittlung dieser Messzeit?
6. Eine physikalische Größe x soll durch eine Serie von n Einzelmessungen bestimmt werden. (Es handelt sich im Allgemeinen nicht um Zählmessungen!) Wie lauten die fünf Formeln, mit denen der Mittelwert sowie die Varianz und Standardabweichung der Einzelmesswerte bzw. des Mittelwertes (\bar{x} , σ_x^2 , σ_x , $\sigma_{\bar{x}}^2$, $\sigma_{\bar{x}}$) ermittelt werden?
7. Wie hat die grafische Darstellung eines Zusammenhanges $M = f(x)$ zu erfolgen, wenn der Messeffekt das Resultat einer Zählmessung ist (siehe Abbildung 10)?
8. Verifizieren Sie Gleichung (27)!
9. Für eine vorgegebene Gesamtmesszeit $t_{\text{ges}} = t_b + t_0$ ist eine Optimierung der Aufteilung der Messzeiten für Brutto- und Nulleffektmessung vorzunehmen. In welchem Verhältnis $\eta = t_b/t_0$ sollten die Messzeiten stehen, damit die zufällige Messabweichung minimal wird? (Die zu erwartenden Brutto- bzw. Nulleffektzählraten Z_b und Z_0 sind näherungsweise durch Übersichtsmessungen bekannt.)

Literatur

- [1] W. Ilberg (Hrsg.), M. Krötzsch (Hrsg.) et. al., *Physikalisches Praktikum für Anfänger*, Teubner-Verlag, Leipzig 1994
- [2] W. Stolz, *Radioaktivität: Grundlagen – Messungen – Anwendungen*, Teubner-Verlag, Stuttgart/Leipzig 2003
- [3] L. Herforth, H. Koch, *Praktikum der Radioaktivität und Radiochemie*, Verlag A. Barth, Leipzig 1992
- [4] B. Dörschel, V. Schuricht, J. Steuer, *Praktische Strahlenschutzphysik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin 1992