TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN **Fakultät Physik** Physikalisches Grundpraktikum	Versuch: **SW** Aktualisiert: am 11. 04. 2019

Stehende Wellen

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung

1. Nach der Methode von Quincke ist anhand der Schallgeschwindigkeit der Luft die Frequenz f zweier gegebener Stimmgabeln (Mittelwert von jeweils fünf Messungen) zu ermitteln.
2. Mittels Tonfrequenzgenerator, Lautsprecher und Mikrophon ist mit Hilfe stehender Wellen in einem horizontalen Glasrohr (KUNDTsches Rohr) nahe der Reflexionswand die Schallgeschwindigkeit c in Gasen (Luft) zu bestimmen und auf 0 °C umzurechnen.

2 Allgemeine Grundlagen

2.1 Schallwellen in Luft

Eine Welle ist ein *zeitlich* und *räumlich periodischer* Vorgang. Bei elastischen Wellen werden einzelne Volumenelemente durch elastische Deformation aus dem Gleichgewicht (homgener Körper, konstante Dichte) gebracht und führen am Ort x harmonische Schwingungen (Dichteschwankungen) aus. Infolge der elastischen Kopplung benachbarter Volumenelemente breiten sich die Schwingungen als elastische longitudinale Wellen räumlich aus.
Bei Luft als elastischem Medium ist die „elastische Konstante" im entsprechenden *Hookeschen Gesetz* ($\mathrm{d}p = -K \cdot \mathrm{d}V/V$) das Kompressionsmodul K. Dieses ist bei einem idealen Gas für isotherme und adiabatische Prozesse unterschiedlich, durch den Druck p und den Adiabatenexponenten κ gegeben:

$$K^{\mathrm{iso}} = -V\frac{\mathrm{d}p^{\mathrm{iso}}}{\mathrm{d}V} = p \quad \text{und} \quad K^{\mathrm{ad}} = -V\frac{\mathrm{d}p^{\mathrm{ad}}}{\mathrm{d}V} = \kappa p.$$

Periodische Druckschwankungen oder *Schall* breiten sich in Luft als *longitudinale Dichte-Welle* mit der *Phasengeschwindigkeit* $c = \omega/k = f\lambda$ aus, wobei die periodischen Druckschwankungen so schnell erfolgen, dass die Kompressionen *adiabatisch* ablaufen.

Als periodisch veränderliche Größen, deren Schwingungsphase sich mit c ausbreitet, können z. B. der Schall-Aussschlag $\xi(t,x)$, die -Schnelle $v_s(x,t)$ oder der -Wechseldruck $p_w(t,x)$ betrachtet werden. Die zugehörigen Lösungen der ebenen Wellengleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \xi(t,x) &= \hat{\xi}\cos(\omega t - kx) \\ v_s(t,x) &= \frac{\partial \xi}{\partial t} = \omega\hat{\xi}\cos(\omega t - kx + \pi/2) \\ p_w(t,x) &= \rho c \cdot v_s = \hat{p}\cos(\omega t - kx + \pi/2). \end{aligned}$$

Dabei ist ρ die Dichte, c die Schallgeschwindigkeit und x die Ausbreitungsrichtung. Schallschnelle und Schallwechseldruck sind in Phase [4], während der Schallwechseldruck gegenüber dem Schallausschlag eine Phasenverschiebung um $\pi/2$ aufweist (s. Anhang). c ist temperaturabhängig (Herleitung s. Anhang):

$$c(T) = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho(T)}} = \sqrt{\kappa R' T} \tag{1a}$$

$$c_{\mathrm{Luft}}(\vartheta) = \left(331 + 0{,}6\frac{\vartheta}{[°\mathrm{C}]}\right)\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{1b}$$

Zahlenwerte für Luft: Molare Masse $M \approx 29\,\mathrm{g/mol}$; $\kappa \approx 1{,}4$; $R' = \frac{R}{M} = \frac{1}{M} \cdot 8{,}315\,\mathrm{J/(mol \cdot K)}$.

Dabei ist ϑ die Temperatur in °C. Für den Adiabatenexponenten gilt $\kappa \approx 1{,}67$; 1,4 bzw. 1,33 für ein-, zwei- bzw. dreiatomige Gase.

2.2 Reflexion und stehende Schallwellen

Bei der Reflexion einer Schallwelle an einer Wand, die sich senkrecht zur Ausbreitungsrichtung am Ort $x = 0$ befindet, ist der Schallwechseldruck p_w maximal (Phasensprung Null) und der Schallausschlag Null (Phasensprung π).

Die Überlagerung (Addition, Superposition, Interferenz) von hin- (ξ^+) und rück- (ξ^-) laufender Welle gleicher Frequenz und Amplitude ergibt eine *stehende Welle*

$$\begin{aligned} \xi^+(t,x) &= \hat{\xi}\cos(\omega t - kx) \\ \xi^-(t,x) &= \hat{\xi}\cos(\omega t + kx - \pi). \end{aligned} \tag{2}$$

Für den Schallausschlag folgt (das Endergebnis durch Separation bezüglich x und t, Additionstheorem):

$$\begin{aligned} \xi_{\text{res}} &= \hat{\xi}\cdot[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx - \pi)] \\ &= \hat{\xi}\cdot[\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)] \end{aligned} \tag{3}$$

$$\xi_{\text{res}} = \left[2\hat{\xi}\sin(kx)\right]\cdot\sin\omega t = \left[2\hat{\xi}\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\right]\cdot\sin\omega t. \tag{4}$$

Gleichung (4) stellt als Gleichung einer stehenden Welle eine *Schwingung* dar, deren Amplitude mit $[2\hat{\xi}\sin(kx)]$ periodisch vom Ort x abhängt. Die Orte mit der Amplitude Null (bei $x = 0$, $x = 2n\cdot\lambda/4$) heißen *Knoten*, die Orte maximaler Amplitude (bei $x = (2n+1)\cdot\lambda/4$) heißen *Bäuche* für den Schallausschlag. Man diskutiere die den Gleichungen (2) bis (4) entsprechenden Beziehungen für den Schallwechseldruck p_w.

In jedem Fall beträgt der *Knotenabstand* $\lambda/2$. Das Erzeugen und Ausmessen stehender Wellen ist eine der wichtigsten Methoden zur Bestimmung von Wellenlängen.

2.3 Eigenfrequenzen im endlich ausgedehnten Medium

Zur optimalen Ausbildung stehender Wellen muss die Gesamtlänge des Mediums, in dem sich die Welle ausbreitet, z.B. die Luftsäule in einem Rohr, ein Vielfaches von $\lambda/4$ betragen (z.B. bei Musikinstrumenten)[1]. Die Serie von Eigenfrequenzen bei zwei geschlossenen Enden (5a) bzw. einem offenen Ende (5b) bei einem Rohr der Länge l ist:

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2l} \tag{5a}$$

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{(2n+1)\cdot c}{4l}. \tag{5b}$$

3 Experimente

3.1 Erzeugung und Messung der Frequenz

Der Versuch wird in zwei Richtungen durchgeführt:

1. Bei bekanntem c ist die Frequenz nach der Methode von Quincke zu bestimmen.
2. Umgekehrt wird bei bekannter Frequenz die Schalgeschwindigkeit c mit dem Kundtschen Rohr bestimmt.

[1] siehe auch Versuchsanleitung zur Lecherleitung

3.1.1 Longitudinale Stab-Schwingung

Beim klassischen Kundt'schen Versuch regt man einen $l \approx 1{,}5\,\mathrm{m}$ langen Metallstab zu Longitudinal-Schwingungen an, die durch eine am Stabende (am Schwingungsbauch) befestigte leichte Platte auf die Luftsäule übertragen wird.

Ist der Stab z.B. in der Mitte eingespannt, so beträgt seine Gesamtlänge $l_M = \lambda_M/2$ mit Schwingungsbäuchen an den Enden, bei anderen Einspannungen kann auch mit den Oberschwingungen gearbeitet werden, siehe Abb. 1a. Damit gilt bei bekannter Schallgeschwindigkeit für dünne Metallstäbe $c_M = \sqrt{E/\rho}$ für Longitudinalwellen (s. Tab. 1) für die Frequenz:

$$f = \frac{c_M}{\lambda_M} = \frac{c_M}{2l_M} \qquad (6)$$

Ein freies Ende des Stabes wird dabei mit einem mit Kollophonium getränkten Lappen zur laut hörbaren Grundschwingung angeregt.

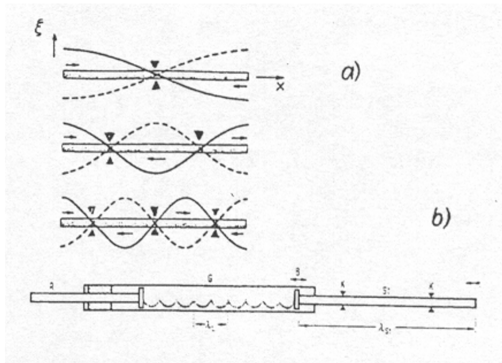

Abb. 1: a) Einspannmöglichkeiten eines Metallstabs der Länge l
b) Kundtsches Rohr

3.1.2 Stimmgabel

Bei dieser Ausführung des Quincke-Versuchs werden Stimmgabeln definierter Frequenz benutzt. Zur Erhöhung und zeitlichen Konstanz der Anregungsamplitude wird ein Röhren-Schwingkreis benutzt, in dessen Gitterkreis eine Induktivität in der Nähe eines eisernen Schenkels der Stimmgabel sitzt. Die anfänglich kleinen Ausschläge der Stimmgabel übertragen sich einerseits auf die Luftsäule und andererseits induktiv auf den Schwingkreis, dessen Rückkopplungsfaktor durch ein Potentiometer eingestellt werden kann. Damit bleibt die Amplitude konstant.

3.1.3 Tonfrequenzgenerator

Die aufgebaute Ausführungsform basiert in Abwandlung des Kundt-Versuchs auf einem Lautsprecher, der von einem auf $\frac{\Delta f}{f} \approx 1\,\%$ genau einstellbaren Tonfrequenzgenerator gespeist wird und die Luftsäule vom Rohrende über eine Membran zu Schwingungen anregt. Die Spannungsamplitude sollte ca. 80 mV betragen. Die genaue Frequenz kann mit Hilfe eines Impulszählers ermittelt werden.

3.2 Messung der Wellenlänge

Alle Varianten zur Bestimmung der Wellenlänge nutzen stehende Wellen aus. Die Knoten sind meistens besser zu lokalisieren als die Bäuche. Nach Möglichkeit ist über eine größere Knotenzahl zu mitteln. Sollten störende Oberschwingungen mit angeregt werden, so muss man sich auf den gewünschten Grundton konzentrieren.

3.2.1 Original Kundt'sche Methode

Im Glasrohr, an dessen einem Ende die Schwingung vom Metallstab nach Abb. 1b auf die Luft übertragen wird, befinden sich Korkteilchen, die anfangs nach leichtem Drehen des Rohres gleichmäßig an der Wand des Rohres verteilt sind. Nach dem Einschwingen des Tones kann die Rückwand (Reflexionsstelle) etwas verschoben werden (Längenabstimmung), bis optimale Resonanz erreicht ist. Dann bleiben an den Knoten die Korkteilchen in Ruhe und lagern sich sichtbar ab, während an den Bäuchen maximale Bewegung der Korkteilchen beobachtet wird.

3.2.2 Mikrophon

Bei der im Versuch benutzten Ausführung ($f \approx 2$ bis 3 kHz) kann auf der Achse eines relativ langen Glasrohres (1 m) in der Nähe der dem Lautsprecher gegenüberliegenden Abschlusswand ein Mikrophon um maximal 20 cm verschoben werden. Das Mikrophon spricht auf den Schallwechseldruck $p_w \sim v_s \cdot \omega$ an. Knoten und Bäuche werden als Maxima und Minima auf dem Digitalvoltmeter angezeigt. In unmittelbarer Nähe der Wand werden nahezu unabhängig von der relativ großen und konstanten Gesamtlänge des Rohres immer Knoten und Bäuche zu beobachten sein, so daß sich eine frequenzbezogene Längenabstimmung erübrigt.

3.2.3 Schallgeschwindigkeit nach Quincke

Die Luft im vertikalen Glasrohr von ca. 3 cm Durchmesser und 1 m Länge wird am oberen Ende mit der Stimmgabel zu Schwingungen angeregt. Das untere Rohrende ist mit Wasser, dessen Stand über verbundene Röhren (Schläuche) mittels eines beweglichen Vorratsgefäßes beliebig eingestellt werden kann, abgeschlossen (siehe Abb. 2). An der Wasseroberfläche als feste Wand befinden sich immer Knoten für den Schallausschlag. Im Resonanzfall ist am oberen Rohrende, dessen ungenaue Position durch Differenzbildung eliminiert wird, ein Bauch und der Ton laut hörbar (Resonanz, Kombination von festem Ende auf der einen und losen Ende auf der anderen Seite). Es müssen mindestens zwei Marken für den Wasserstand, die zwei Resonanzstellen im Abstand $\lambda/2$ entsprechen, ausgemessen werden.

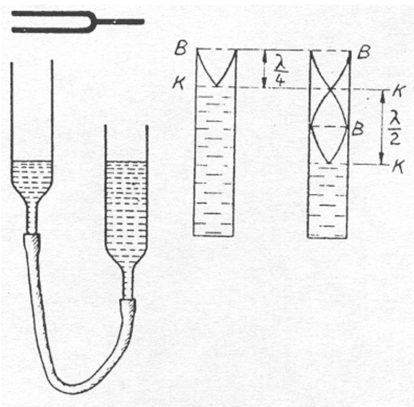

Abb. 2: Bestimmung der Schallgeschwindigkeit nach Quincke

3.3 Variation des Gases

Beim Kundt'schen Rohr besteht die Möglichkeit, die Luft mit einem zweiten Gas herauszudrücken (oder abzupumpen) und ca. 5 min lang entweder CO_2 oder Ar einzulassen. Danach kann bei geschlossenem Rohr der Versuch mit dem neuen Gas, das sich in ρ und κ von Luft unterscheidet, wiederholt werden.

4 Anhang

4.1 Die Wellengleichung für den Schallwechseldruck

Gegeben sei ein luftgefüllter Zylinder (Achse x, z.B. eine Trompete) vom Querschnitt A mit einem lokalen Druckgefälle oder Druck-Gradienten $\partial p/\partial x$. Dann wirkt auf das Volumenelement $V = A \cdot \Delta x$ die elastische Rückstellkraft $\Delta F = -A \cdot \Delta p = -A \cdot \Delta x\, \partial p/\partial x$ und die Masse $m = \rho A \cdot \Delta x$ erfährt die Beschleunigung

$$a_x = \frac{\partial v_s}{\partial t} = -\frac{A \cdot \Delta x \, \frac{\partial p}{\partial x}}{\rho A \cdot \Delta x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{7}$$

Die ortsabhängige Geschwindigkeit v_s bewirkt eine lokale Änderung des oben betrachteten Volumenelements V

$$\mathrm{d}V = A v_s \,\mathrm{d}t = A\,\mathrm{d}t \cdot (\partial v_s/\partial x) \cdot \Delta x, \tag{8}$$

die wiederum eine adiabatische Druckänderung nach sich zieht. Aus $pV^\kappa = \text{konst}$ folgt mit $K^{\mathrm{ad}} = \kappa p$

$$\mathrm{d}p = -K^{\mathrm{ad}}\,\mathrm{d}V/V = -K^{\mathrm{ad}} \cdot (\partial v_s/\partial x)\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

bzw.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v_s}{\partial x}\,K^{\mathrm{ad}}. \tag{10}$$

Nach Ableitung von Gleichung (7) nach x und von Gleichung (10) nach t sowie Gleichsetzen von $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial v_s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v_s}{\partial t}$ folgt für den Schallwechseldruck die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 p_w}{\partial t^2} = \frac{K^{\mathrm{ad}}}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$
$$p_w(x,t) = \hat{p}\cos(\omega t - kx). \tag{11}$$

Der Quotient K^{ad}/ρ in dieser eindimensionalen Wellengleichung, einer partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung, bestimmt als temperaturabhängige Materialkonstante die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Phase ($c^2 = K^{\mathrm{ad}}/\rho$). Die harmonische Schallwelle breitet sich demnach mit folgender Phasengeschwindigkeit aus:

$$c = \lambda f = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{K^{\mathrm{ad}}}{\rho}} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\kappa \cdot R'T}. \tag{12}$$

4.2 Schallwechseldruck

Der Zusammenhang zwischen p_w und v_s folgt über das Newtonsche Grundgesetz

$$F_w = m \cdot a = \rho(A\Delta x)\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = p_w A \quad \text{und} \quad -\frac{\partial p_w}{\partial x} = \rho\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \rho\frac{\partial v_s}{\partial t}$$

Integration über x liefert [4]:

$$p_w(t) = -\rho\int\frac{\partial v_s}{\partial t}\mathrm{d}x = \rho\omega^2\hat{\xi}\int\cos(\omega t - kx)\mathrm{d}x = -\rho\frac{\omega^2\hat{\xi}}{k}\cdot\sin(\omega t - kx) = \rho c\cdot v_s(t) \tag{13}$$

4.3 Adiabatisches Kompressionsmodul

Alle benutzten Beziehungen gelten im Rahmen des Modells des idealen Gases mit den Zustandsgleichungen

$$pV = mR'T \quad \text{und} \quad pV = nRT \tag{14}$$

Hierbei sind T die absolute Temperatur, p der Druck, V das Volumen, $R' = \frac{R}{M} = \frac{1}{M}\cdot 8{,}315\,\mathrm{J/(mol\cdot K)}$ die spezifische Gaskonstante und $R = 8{,}314\,\mathrm{J/(mol\cdot K)}$ die universelle Gaskonstante. Beim adiabatischen Prozess findet kein Wärmeübertrag statt ($\Delta Q = 0$), was oft der Fall ist, wenn physikalische Prozesse sehr schnell ablaufen. Dann folgt für den ersten Hauptsatz:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W = mc_v \cdot \Delta T + p \cdot \Delta V = 0 \tag{15}$$

Dabei sind U die innere Energie, ΔW die vom Gas verrichtete Arbeit, ΔQ die zugeführte Wärmeenergie. Durch Kombination der Gleichungen (14) und (15) erhält man die Poissonschen Adiabaten-Gleichungen:

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{const.} \tag{16a}$$
$$p \cdot V^\kappa = \text{const.} \tag{16b}$$
$$\frac{T^\kappa}{p^{\kappa-1}} = \text{const.} \tag{16c}$$

Aus Gleichung (16b) folgt zunächst $\mathrm{d}p = -\kappa p \cdot \mathrm{d}V/V$ woraus dann mit dem Hookeschen Gesetz $-\sigma = \Delta p = -K\Delta V/V$ schließlich $K^{\mathrm{ad}} = \kappa p$ folgt.

Beispiel	Aggregatzustand	ϑ/°C	c/m/s
Luft	Gas	20	343
H_2	Gas	0	1261
H_2O	flüssig	25	1493
Methanol	flüssig	25	1261
Stahl	Festkörper	10	4880
Kupfer	Festkörper	10	3666
Messing	Festkörper		3479

Tabelle 1: Longitudinale Schallgeschwindigkeiten

Autorenschaft

Diese Versuchsanleitung wurde in ihrer ursprünglichen Form von L. Jahn (1998) erstellt und von M. Kreller, J. Kelling, F. Lemke, S. Majewsky bearbeitet. Aktuelle Änderungen werden von der Praktikumsleitung durchgeführt.

Fragen

1. Was versteht man unter einer harmonischen Schwingung, einer ebenen Welle und einer stehenden Welle (mathematische Beschreibung)?
2. Wie groß ist die Phasengeschwindigkeit einer Schallwelle in Luft? Wie ändert sich bei einer fortlaufenden akustischen Welle die Phase des Schallausschlags und des Schallwechseldruckes mit x und t?
3. Wie unterscheiden sich isothermes und adiabatisches Kompressionsmodul und die damit berechneten Schallgeschwindigkeiten für ein ideales Gas?
4. Was bedeutet Reflexion einer ebenen Schallwelle an einer Wand? Wie entstehen stehende Wellen? Wie groß ist der Knotenabstand?
5. Man zeige durch zweimaliges partielles Differenzieren von Gl. (11b), dass dieser Ausdruck eine Lösung von Gl. (11a) ist.
6. Was versteht man unter der Wellenzahl, der Wellenlänge und der Frequenz einer harmonischen Welle? Wie hängen sie zusammen? Wovon hängt die Schallgeschwindigkeit ab?
7. Wie unterscheiden sich Longitudinal- und Transversalwellen? Wovon hängen die Phasengeschwindigkeiten akustischer Longitudinal- und Transversalwellen ab?
8. Was ist ein adiabatischer Prozess? Was versteht man unter dem Adiabatenexponent?
9. Wie unterscheiden sich Schallgeschwindigkeit und Schallschnelle?
10. Nennen Sie Methoden zur Bestimmung der Phasengeschwindigkeit von Wellen.
11. Beschreiben Sie die Reflexion einer Seilwelle und einer Schallwelle an einer festen Wand.
12. Nennen sie Indikatoren für den Schallwechseldruck und den Schallausschlag.
13. Beschreiben Sie die Methode zur Bestimmung von c nach Quincke.
14. Beschreiben Sie die Methode zur Bestimmung von c nach Kundt.
15. Man bestätige die Gl. (1b).

Literatur

[1] W. Ilberg (Hrsg.), M. Krötzsch (Hrsg.) et. al., *Physikalisches Praktikum für Anfänger*, Teubner-Verlag, Leipzig 1994
[2] C. Gerthsen, H. Vogel, *Physik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 1995
[3] F. Kohlrausch, *Praktische Physik, Band 2*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1996
[4] H. J. Paus, *Physik in Experimenten und Beispielen*, Verlag C.-Hanser, München 1995
[5] W. Walcher, *Praktikum der Physik*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1989