

**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN****Fakultät Physik**

Physikalisches Grundpraktikum

Versuch: ES

Aktualisiert: am 8. Oktober 2025

Erzwungene Schwingungen (Nebenfach)

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung	2
2 Theoretische Grundlagen	2
2.1 Lineare, ungedämpfte Schwingungen	2
2.2 Lineare, gedämpfte Schwingungen	3
2.3 Gedämpfte Drehschwingungen	6
2.4 Erzwungene Schwingungen	7
2.5 Die Resonanzkurve	8
2.6 Wirbelstrombremse	8
3 Durchführung	9
3.1 Messung der Eigenfrequenz	9
3.2 Messung der Dämpfungskonstanten	9
3.3 Resonanzkurven	10
3.4 Messprogramme	10
3.4.1 ES	10
3.4.2 Measure	10
4 Fragen zur Vorbereitung	12

1 Aufgabenstellung

Ziel des Versuchs ist es, die charakteristischen Eigenschaften gedämpfter und erzwungener Schwingungen zu verstehen.

Gegenstand dieses Versuchs ist ein Drehpendel, das sog. Pohlsche Rad.

1. Ermitteln Sie die Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Pohlschen Rads.
2. Ermitteln Sie die Dämpfungskonstante δ in Abhängigkeit von der an der Wirbelstrombremse angelegten Stromstärke I . Bestimmen Sie durch graphische Auftragung den Wert von δ für $I = 0$.
3. Ermitteln Sie die Resonanzkurve einer gedämpften Schwingung. Vergleichen Sie die Resonanzfrequenz mit der Eigenfrequenz der ungedämpften Schwingung.

2 Theoretische Grundlagen

Vereinfachend werden zunächst eindimensionale Schwingungen betrachtet und Erkenntnisse auf anschließend auf die Drehschwingungen am Pohlschen Rad übertragen.

2.1 Lineare, ungedämpfte Schwingungen

Wirkt auf einen Körper eine Kraft, die proportional zu seiner Auslenkung aus der Ruhelage ist und entgegen der Auslenkung wirkt (rücktreibende Kraft), so schwingt der Körper harmonisch. Als einfaches Modell betrachten wir den Federschwinger (Abb. 1).

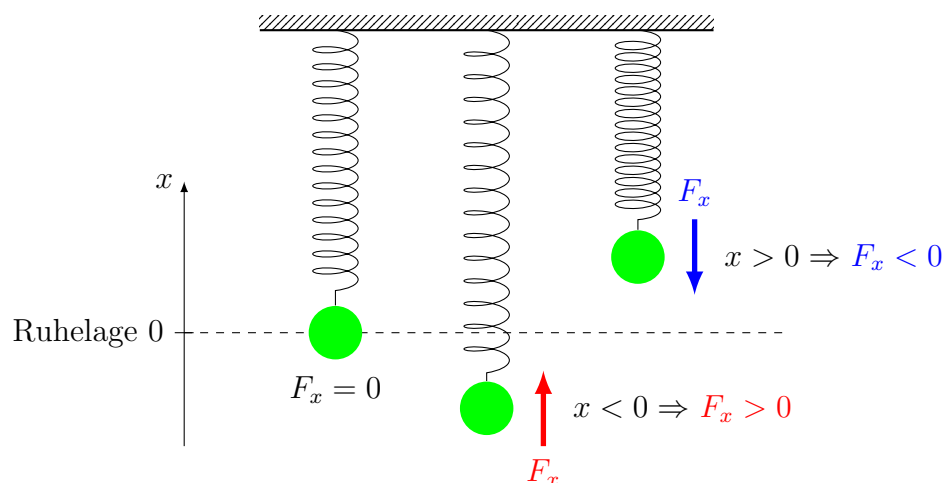


Abbildung 1: Modell des Federschwingers mit der Federkonstanten k : Rücktreibende Kraft F_x in Abhängigkeit von der momentanen Auslenkung $x(t)$.

Als äußere Kraft F_x , die von der Auslenkung x des Federschwingers mit der Federkonstanten k abhängt gilt (bei nicht zu großen Dehnungen) bekanntlich:

$$F_x = -kx. \quad (1)$$

Wie aus Abbildung 1 hervorgeht, ist die Kraft der Auslenkung stets entgegengerichtet und erfordert deshalb ein Minuszeichen. Einsetzen in das Newtonsche Grundgesetz ergibt:

$$F = m\ddot{x} = -kx \quad (2)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3)$$

Es handelt sich um eine sogenannte gewöhnliche lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung, die sich nicht durch einfache Integration lösen lässt. Da die Ort-Zeit-Funktion eine harmonische Schwingung beschreiben muss, kann für die Lösung folgende Form angenommen werden (Ansatz):

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0).. \quad (4)$$

Hierbei stellt x_0 die Amplitude (maximale Auslenkung) und θ_0 den Phasenwinkel, der die momentane Auslenkung zur Zeit $t = 0$ bestimmt, dar. Diese beiden Parameter sind frei wählbar und werden durch zwei Anfangsbedingungen (z.B. für Ort und Geschwindigkeit) festgelegt. Da es sich um eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung handelt, sind es genau zwei freie Parameter. Die Kreisfrequenz ω_0 ist hingegen nicht frei wählbar, sondern ist durch die Physik des Schwingers gegeben:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5)$$

Von Gültigkeit dieser Lösung kann man sich schnell durch Einsetzen von (4) in (3) überzeugen. Bei der ungedämpften harmonischen Schwingung bleibt die Gesamtenergie des Systems erhalten und wandelt sich im Laufe der Schwingung ständig von potentieller in kinetische Energie um und umgekehrt. Reale Schwingungen unterliegen aber noch zusätzlichen Reibungskräften, die dem System Energie entziehen und somit die Amplitude im Zeitverlauf verringern. Um derartige gedämpfte Schwingungen soll es im folgenden Unterabschnitt gehen.

2.2 Lineare, gedämpfte Schwingungen

Wenn eine Bremsende Kraft - wie z.B. eine Reibungskraft - auf den Schwinger wirkt, wird die Schwinung gedämpft. Modellhaft könnte dies beispielsweise durch Schwingung eines Federschwingers in einem Ölbad realisiert werden. Die geschwindigkeitsabhängige dämpfende Kraft F_r wird wie folgt beschrieben:

$$F_r = -rv_x = -r\dot{x}. \quad (6)$$

An dieser Stelle ist das Minuszeichen entscheidend. Es beschreibt, dass die Reibungskraft entgegen der Bewegungsrichtung (Vorzeichen von $\dot{x}$) wirkt. r ist eine Konstante, die beschreibt, wie stark die Dämpfung ist. In obigem Beispiel würde r von der Viskosität des Öls abhängig sein, in der sich der Federschwinger bewegt.

Für das Newtonsche Grundgesetz ergibt sich unter Einbeziehung der Reibungskraft die folgende Erweiterung:

$$F = m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} \quad (7)$$

$$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (8)$$

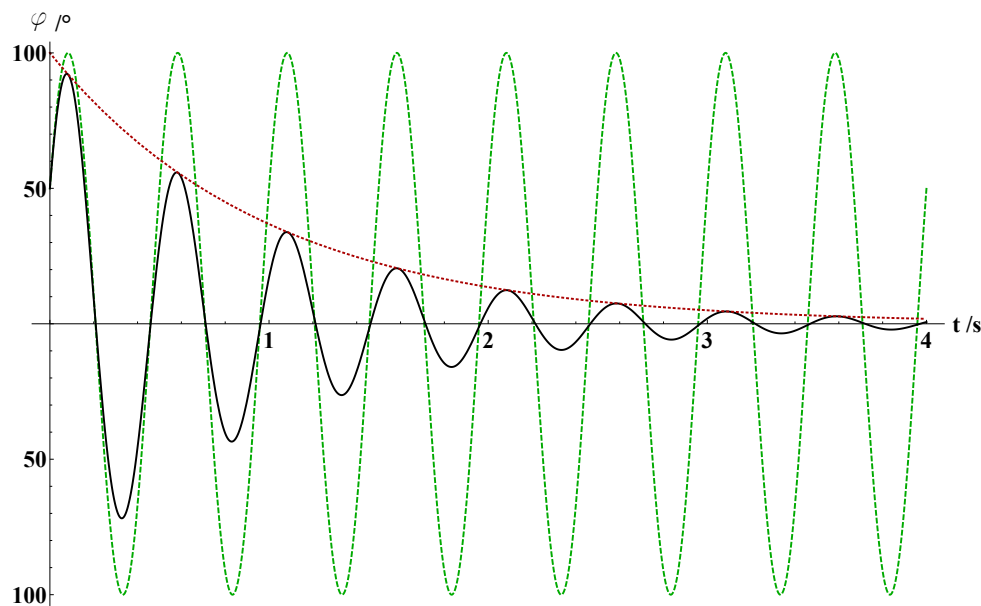


Abbildung 2: Dargestellt wurden hier eine ungedämpfte Schwingung (grün), eine gedämpfte Schwingung mit $\delta = \frac{1}{s}$ (schwarz), sowie die Einhüllende (rot), die die exponentielle Abnahme der Amplitude verdeutlicht.

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist durch die folgende Ort-Zeit-funktion gegeben:

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \theta_0). \quad (9)$$

Diese Lösung kann so interpretiert werden, dass Infolge der wirkenden Reibungskräfte der Schwinger Energie an seine Umgebung abgibt und somit die maximale Auslenkung (Amplitude) der Schwingung mit der Zeit abnimmt. Die Lösung besteht aus zwei Teilen, die in Abbildung 2 dargestellt sind:

1. Den Schwingungsteil $\cos(\omega t + \theta_0)$, den wir bereits von der ungedämpften Schwingung kennen. (Abschn. 2.1) Und
2. Einem exponentiellem Abfall der Amplitude $x_0 e^{-\delta t}$ aufgrund des Energieverlustes durch die Reibungskraft $F_r = -r\dot{x}$.

Wieder gibt es zwei freie Parameter (x_0, θ_0) , die wie in Abschn. 2.1 durch Anfangsbedingungen festgelegt werden. Die Parameter ω und δ sind durch die Physik des Schwingers bestimmt und ergeben sich durch Einsetzen von (9) in (8). Nach etwas längerer Rechnung erhalten wir:

$$\delta = \frac{r}{2m} \quad (10)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (11)$$

Die Konstante δ wird als **Dämpfungskonstante** bezeichnet und steht natürlich in Verbindung mit der Reibungskonstanten r . Die Konstante ω ist die **Kreisfrequenz des gedämpften**

Schwingers die sich von der Kreisfrequenz des ungedämpften Schwingers ω_0 unterscheidet (siehe Abschn. 2.1). Infolge der Reibung ist ω zu niedrigeren Frequenzen verschoben.

Für den Fall, dass die Dämpfungskonstante die Kreisfrequenz des ungedämpften Schwingers erreicht ($\delta = \omega_0$), spricht man vom sogenannten **aperiodischen Grenzfall**, bei dem der Schwinger nach einmaliger Auslenkung asymptotisch die Ruhelage, erstmals ohne sie zu übertreten, erreicht. Sollte δ größer als ω_0 werden, erfolgt die Annäherung an die Ruhelage noch langsamer, sodass man vom sogenannten **Kriechfall** spricht. Das Übergangsverhalten ist in Abb. 3 veranschaulicht.

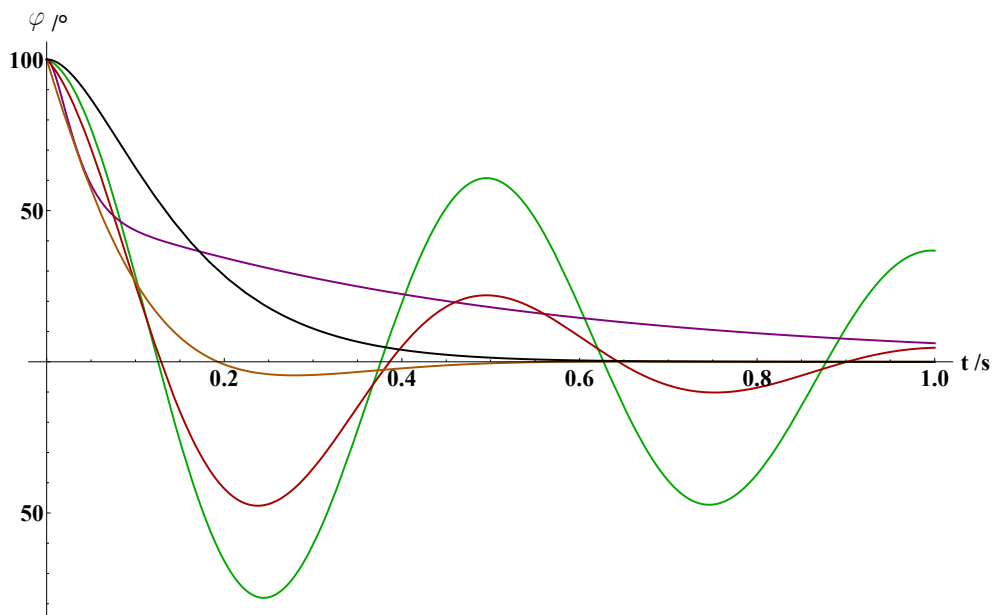


Abbildung 3: Es wurden gedämpfte Schwingungen für fünf unterschiedliche Dämpfungskonstanten dargestellt. Grün: $\delta = \frac{1}{s}$, rot: $\delta = \frac{3}{s}$, orange: $\delta = \frac{9.7}{s}$, schwarz: $\delta = \frac{4\pi}{s} = \omega$, lila: $\delta = \frac{12\pi}{s}$.

2.3 Gedämpfte Drehschwingungen

Nun wollen wir von der linearen Schwingung auf die Drehschwingung (Abb. 4), die für den Versuch relevant ist, übergehen. Dazu stellen wir die relevanten physikalischen Größen gegenüber und können somit allein durch eine Analogiebetrachtung die Bewegungsgleichung für den momentanen Drehwinkel φ aufstellen.

Für die Beschreibung der momentanen Auslenkung verwenden wir den Drehwinkel φ als Funktion der Zeit. In Analogie zur Translationsbewegung ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit durch $\dot{\varphi}$ und die Winkelbeschleunigung durch $\ddot{\varphi}$ (Tab. 1). Als Ursache von Winkelbeschleunigungen gilt das Drehmoment M .

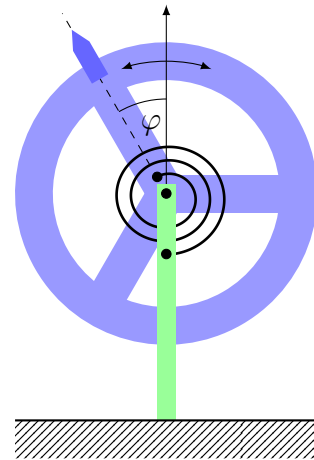


Abbildung 4: Schematischer Aufbau eines ungedämpften Drehpendels. Das rücktreibende Drehmoment wird durch Auslenkung einer Spiralfeder aufgebaut.

Translation		Rotation	
Ort	x	Winkel	φ
Geschwindigkeit	$v = \dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi}$
Beschleunigung	$a = \ddot{x}$	Winkelbeschleunigung	$\alpha = \ddot{\varphi}$
Masse (Trägheit)	m	Trägheitsmoment	$J = \int r^2 dm$
Kraft	F	Drehmoment	$M = \vec{r} \times \vec{F} $
Leistung	$P = F \cdot v$	Leistung	$P = M \cdot \omega$

Tabelle 1: Vergleich der eindimensionalen Translation und Rotation.

Somit lautet in Analogie zur Translation die Bewegungsgleichung der Drehschwingung:

$$J\ddot{\varphi} + r_D\dot{\varphi} + k_D\varphi = 0 \quad (12)$$

Hierbei ist φ der Auslenkungswinkel, k_D das Richtmoment, J das Massenträgheitsmoment bezogen auf die Drehachse und r_D die Reibungskonstante. In der Normalform lautet die DGL:

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{r_D}{2J} \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \frac{k_D}{J}. \quad (13)$$

Hierbei stellt δ wieder die Dämpfungskonstante und ω_0 die Eigenfrequenz des *ungedämpften* Systems dar. Für den Schwingfall ($\delta^2 < \omega_0^2$) ergibt sich die Winkel-Zeit-Funktion zu:

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \theta_0). \quad (14)$$

Dabei ist φ_0 die Maximalamplitude und θ_0 eine Phasenverschiebung, welche durch die Anfangsbedingungen gegeben sind. Des Weiteren ist ω die Kreisfrequenz der gedämpften

Schwingung, welche nicht mit ω_0 , der Eigenfrequenz des ungedämpften Systems, verwechselt werden darf! Zwischen diesen Größen besteht natürlich analog der bekannte Zusammenhang:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}. \quad (15)$$

Es bleibt zu erwähnen, dass die Kreisfrequenz für eine gegebene Dämpfung während des gesamten Schwingungsvorgangs konstant bleibt. Nur die Amplitude der Schwingung verringert sich mit zunehmender Schwingungsdauer (Abb. 3). Weiterhin kommt es durch die einhüllende Dämpfungsfunktion zu einer Verschiebung der Maxima und Minima bezüglich der ungedämpften Schwingung.

2.4 Erzwungene Schwingungen

Man spricht von einer erzwungenen Schwingung, wenn einem Oszillator durch eine äußere Erregung eine Schwingung aufgezwungen wird. Somit folgt der Oszillator nach einer gewissen Einschwingzeit nicht mehr seinem Eigenschwingverhalten, sondern schwingt in der Erregerfrequenz ω_E . Der Erreger übt während der Schwingung auf das System ein zeitabhängiges Drehmoment aus, welches als einen inhomogenen, zeitabhängigen Term in die Differentialgleichung (Gl. 12) eingeht. Für den Fall einer äußeren harmonischen Anregung ergibt sich:

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = A_E \cos(\omega_E t). \quad (16)$$

Die Lösung einer solchen, sog. inhomogenen Differentialgleichung lässt sich durch die Superposition der Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung finden.

Da nun durch die äußere Erregung Energie zugeführt wird, bleibt die Amplitude φ_0 auch im gedämpften Fall konstant, hängt aber nun ebenso wie der Phasenwinkel θ zwischen Erreger und Schwinger von der Erregerfrequenz ab:

$$\varphi(t) = \varphi_0(\omega_E) \cos(\omega_E t - \theta(\omega_E)). \quad (17)$$

Nach einer längeren (und lehrreichen) Rechnung ergeben sich die Bestimmungsgleichungen für die Amplitude φ_0 und Phase θ :

$$\varphi_0(\omega_E) = \frac{A_E}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + (2\delta\omega_E)^2}} \quad (18)$$

$$\theta(\omega_E) = \arctan\left(\frac{2\delta\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}\right). \quad (19)$$

Somit wird erkennbar, dass die Amplitude der erzwungenen Schwingung von folgenden Größen abhängt:

- Amplitude A_E der äußeren Erregung
- Dämpfung δ des Systems
- Eigenfrequenz ω_0 und Erregerfrequenz ω_E

Interessanterweise bleibt die Phase von der Erregeramplitude unabhängig. Die Funktion (19) beschreibt den theoretischen Verlauf der sogenannten Resonanzkurve, welche für verschiedene Dämpfungskonstanten in Abb. 5 dargestellt und in dem Versuch experimentell zu bestimmen sind.

2.5 Die Resonanzkurve

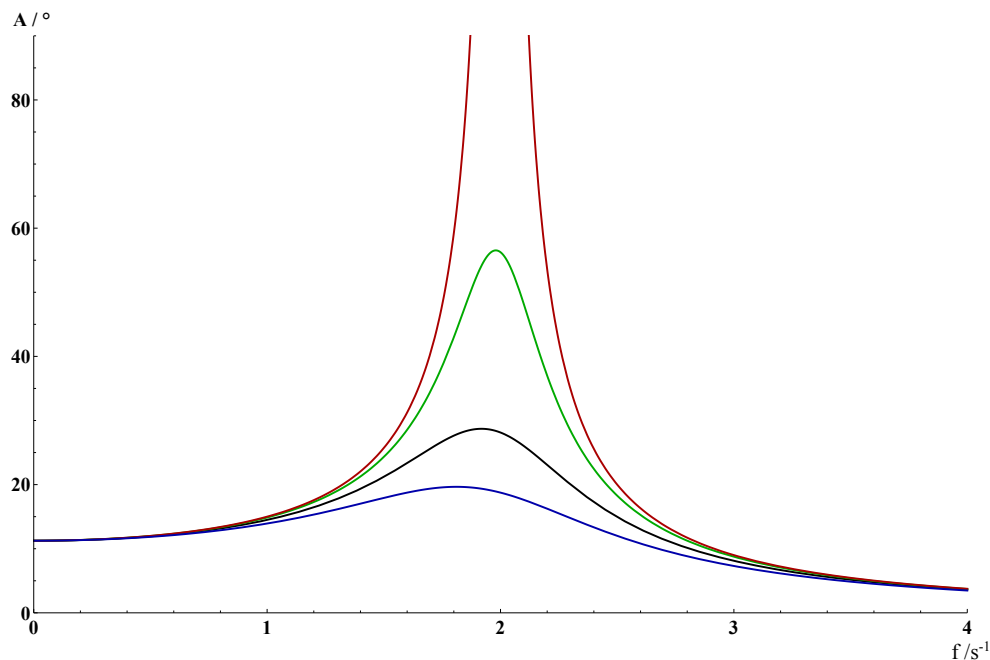


Abbildung 5: Resonanzkurven für verschiedene Dämpfungen. Die Erregeramplitude ist konstant. Man kann leicht die sog. Resonanzkatastrophe erkennen. Es gilt $\delta_{\text{rot}} = 0 < \delta_{\text{grün}} < \delta_{\text{schwarz}} < \delta_{\text{blau}}$

Resonanz bezeichnet einen besonderen Schwingungszustand, bei dem die Erregerfrequenz zu maximaler Amplitude, d.h. zu besonders heftigem Mitschwingen, führt. Aus Gl. (19) kann man durch Ableiten die Lage des Maximums der Resonanzkurve bestimmen. Das Maximum nimmt mit zunehmender Dämpfung δ ab und verschiebt sich hin zu kleineren Frequenzen. Für die Lage der Resonanz, d.h. die Resonanzfrequenz, ergibt sich:

$$\omega_{\text{max}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (20)$$

Offensichtlich führt im ungedämpften Fall die Erregung in der Eigenfrequenz des Schwingers zu divergierender Amplitude - zu einer sog. Resonanzkatastrophe.

2.6 Wirbelstrombremse

Eine Wirbelstrombremse besteht aus einer Spule, welche bei angelegtem Strom I über das Magnetfeld $B \sim I$ ein bremsendes Drehmoment auf das Pendel ausübt. Die induzierte Spannung im Drehpendel lässt sich mithilfe des Faradayschen Induktionsgesetzes zu $U_{\text{ind}} \sim B \cdot v$ berechnen. Das dämpfende Drehmoment der Wirbelstrombremse kann damit folgendermaßen abgeschätzt werden:

$$P_{\text{Brems}} \sim U_{\text{ind}}^2 \sim B^2 \cdot v^2 \sim I^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \quad (21)$$

$$M = \frac{P_{\text{Brems}}}{\dot{\varphi}} \sim I^2 \cdot \dot{\varphi}. \quad (22)$$

Daher ist eine I^2 -Abhängigkeit der Dämpfungskonstanten δ zu erwarten.

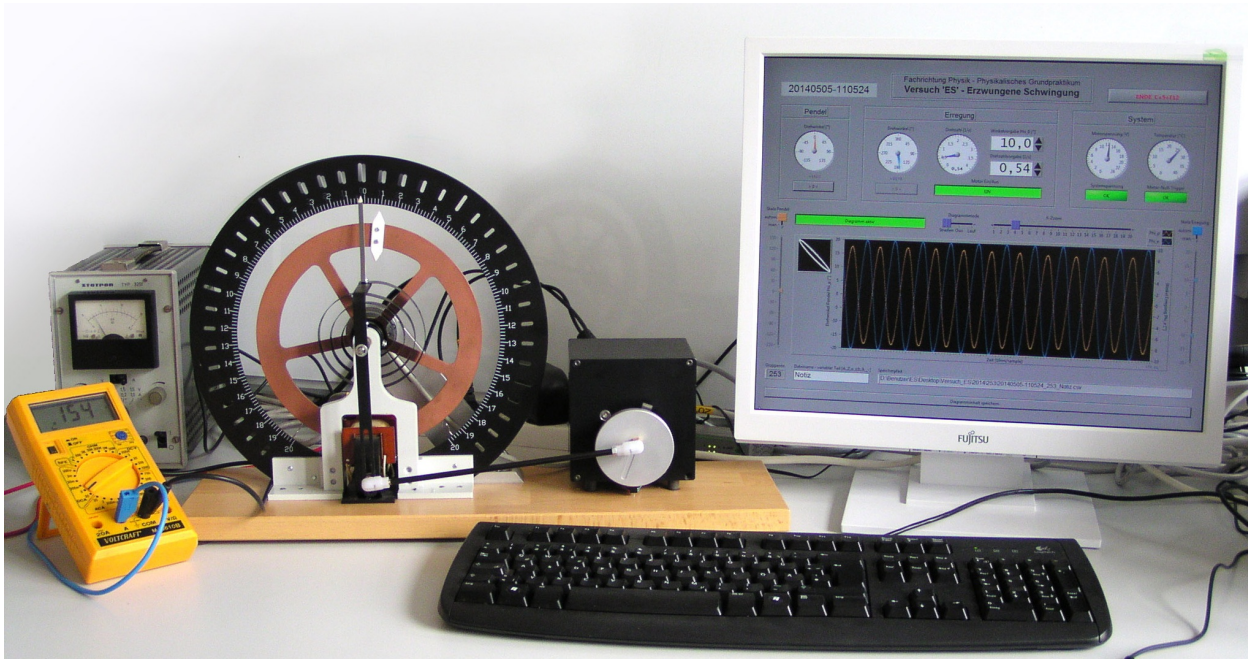


Abbildung 6: Versuchsaufbau: In der Mitte ist das kupferfarbene Pohl'sche Rad erkennbar. Dieses wird mithilfe eines gekoppelten Schrittmotors zu Schwingungen angeregt. Der Zeitverlauf der momentanen Auslenkung wird mittels PC erfasst und kann mit dem der Erregung verglichen werden.

3 Durchführung

Der Versuch wird mithilfe des Pohl'schen Rads durchgeführt (Abb. 6). Dieses besteht aus einem drehbar gelagerten Kupferrad, welches durch eine Spiralfeder in Ruhelage gehalten wird. Zusätzlich kann das Drehpendel durch einen Motor angeregt werden. Mithilfe einer Wirbelstrombremse können weiterhin verschiedene Dämpfungen eingestellt werden.

3.1 Messung der Eigenfrequenz

Lenken Sie das Drehpendel maximal aus und stoppen Sie die Zeitdauer von mindestens fünf Schwingungen. Wiederholen Sie dies mindestens fünf mal und berechnen Sie hieraus die Eigenfrequenz im nahezu ungedämpften Zustand.

Achten Sie darauf, das Drehpendel bei den Messungen gleichstark auszulenken.

3.2 Messung der Dämpfungskonstanten

Stellen Sie die Stromstärke der Wirbelstrombremse auf 200 mA ein und zeichnen Sie mithilfe des PCs die gedämpfte Schwingung auf. Bestimmen Sie die Amplituden von mehreren (jedoch mindestens 4) aufeinanderfolgenden Maxima. Berechnen Sie mithilfe von

$$\frac{\varphi(t_0)}{\varphi(t_0 + T)} = \frac{e^{-\delta t_0}}{e^{-\delta(t_0 + T)}} = e^{\delta T} \quad (23)$$

die Dämpfungskonstante δ . Benutzen Sie dazu die Annahme, dass sich die Eigenfrequenz des Pohl'schen Rads nur wenig durch die zusätzliche Dämpfung ändert. Dadurch können Sie

direkt $T \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ einsetzen.

Bestimmen Sie so auch die Dämpfungskonstanten für $I = 400 \text{ mA}$ und $I = 600 \text{ mA}$. Tragen Sie die ermittelten Dämpfungskonstanten gegen I^2 graphisch auf. Es reicht hier sich auf den Wertebereich $\frac{I^2}{A^2} \in [0; 0.4]$ zu beschränken. Versuchen Sie anschließend eine Ausgleichsgerade durch die erhaltenen Datenpunkte zu legen. Welcher Wert ergibt sich nun für $\delta(I = 0 \text{ mA})$ und wie groß ist die Unsicherheit dieses Wertes? Sind die von Ihnen ermittelten Dämpfungskonstanten mit einer I^2 Abhängigkeit vereinbar? (Vgl. hierzu 2.6)

Hinweis zur Länge der Fehlerbalken für δ : Vereinfachend wird im Nebenfach Physik $\Delta\delta$ direkt aus der Streuung der δ abgeschätzt (Kleinststatistik), die sich aus der Auswertung verschiedener Paare aufeinanderfolgender Maxima ergibt. Auf eine umfassende Fortpflanzung der Messunsicherheiten für $\Delta\delta$ wird verzichtet.

3.3 Resonanzkurven

Untersuchen Sie die Resonanzkurve einer gedämpften erzwungenen Schwingung. Die zu verwendende Stromstärke der Wirbelstrombremse wird Ihnen vom Betreuer vorgegeben. Wählen Sie dazu eine geeignete Motordrehzahl zwischen 0 und 2 s^{-1} . Überprüfen Sie anhand des aufgezeichneten Zeitverlaufs der Schwingung, dass sich das Pendel eingeschwungen hat. Bestimmen Sie anschließend die Amplitude der Schwingung. Bilden Sie ggf. einen Mittelwert aus linksseitiger und rechtsseitiger Amplitude.

Wiederholen Sie die gesamte Messung für verschiedene Drehzahlen im Bereich von $0\text{-}2 \text{ s}^{-1}$, sodass Sie insgesamt ca. 15 Messpunkte erhalten. Planen sie ihre Messungen sinnvoll, sodass sie die Resonanzfrequenz so genau wie möglich abtasten. Zeichnen Sie die Resonanzkurve.

3.4 Messprogramme

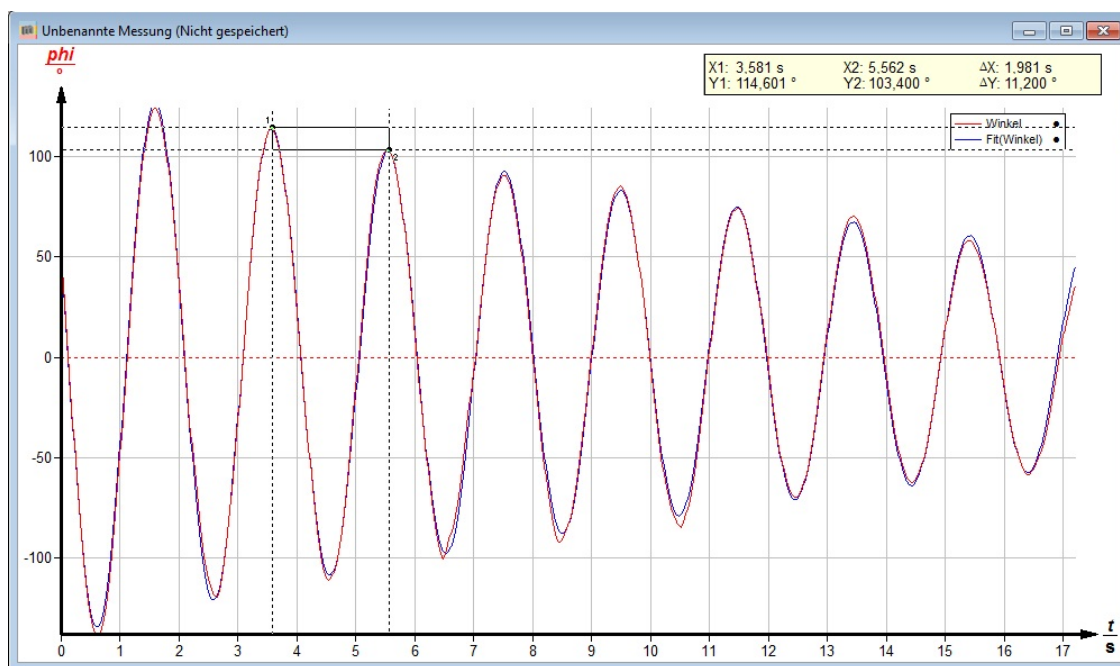
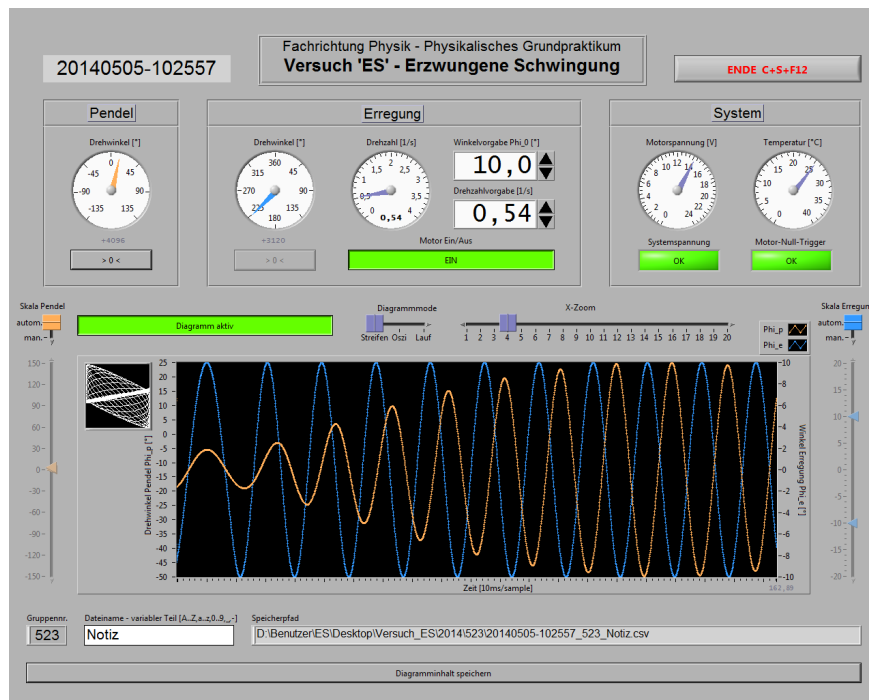
3.4.1 ES

Starten Sie das Programm „ES“, welches sich auf dem Desktop befindet und geben Sie ihre Gruppennummer ein. Es öffnet sich das folgende Fenster:

Über den Button „> 0 <“ im Bereich „Erregung“ können Sie die Nullstellung des Motors kalibrieren. Außerdem kann in diesem Bereich ein Winkel φ_0 , sowie die Motordrehzahl vorgegeben werden. Im darunter dargestellten Diagramm wird automatisch die Bewegung des Pohlschen Rades (orange), sowie des Motors (blau) aufgetragen. Zum Speichern der Daten in eine .csv Datei, klicken Sie auf „Diagramminhalt speichern“, die Daten werden unter P:// abgelegt. Für die Auswertung des Graphens öffnen Sie zunächst die gewünschte .csv Datei mit MS Excel. Markieren Sie die relevanten Daten, kopieren sie mit STRG + C und fügen Sie diese mit STRG + V in das Messprogramm „Measure“ ein.

3.4.2 Measure

Sie finden das Messprogramm „Measure“ direkt auf dem Desktop unter dem Link „measure“. Bei der Messung der Dämpfungskonstante ist es hilfreich, das eingebaute „Vermessungstool“ des Programms zu verwenden. Sobald Sie dieses anklicken, erscheint in ihrem aufgenommenen Graphen ein Rechteck, von dem Sie zwei Ecken beliebig verschieben können:



Schieben Sie diese Punkte auf zwei aufeinanderfolgende Maxima, so können Sie direkt deren Positionen ablesen.

Autorenschaft

Diese Versuchsanleitung wurde in ihrer ursprünglichen Form von M. Kauer und B. Scholz erstellt. Aktuelle Änderungen werden von der Praktikumsleitung durchgeführt.

4 Fragen zur Vorbereitung

1. Wie lautet der Zusammenhang zwischen Frequenz und Kreisfrequenz?
2. Was ist ein Drehpendel?
3. Welche Gleichung beschreibt eine Schwingung mit schwacher Dämpfung?
4. Welche drei Fälle unterscheidet man je nach Stärke der Dämpfung?
5. Skizzieren Sie die zugehörigen Amplitudenverläufe in Abhängigkeit von der Zeit.
6. Erklären Sie die Funktionsweise der Wirbelstrombremse.
7. Zeichnen Sie eine Resonanzkurve einer erzwungenen Schwingung. Achsenbeschriftung! Was ist hierbei ω ?
8. Wie verändert sich die Resonanzkurve, wenn die Dämpfung erhöht wird? (Maximalamplitude und Lage des Maximums!)
9. Ein System besitzt die Eigenfrequenz ω_0 . Mit welcher Frequenz schwingt es, wenn eine Dämpfung der Größe $\delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_0$ angelegt wird?

Literatur

- [1] Praktikum der Physik, Wilhelm Walcher, Teubner Verlag
- [2] Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme, Wolfgang Demtröder, Springer Verlag
- [3] Grundkurs der Physik 1: Mechanik - Wärmelehre, Hildegard Hammer, Oldenbourg-Verlag