

# Fehleranalyse

## Inhaltsverzeichnis

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1   | Lernziele.....   | 1  |
| 2   | Aufgabenstellung .....                                   | 1  |
| 3   | Motivation .....   | 1  |
| 4   | Grundlegende Begriffe .....                              | 2  |
| 5   | Messung .....  | 3  |
| 5.1 | Intervall auf der Zahlengeraden .....                    | 3  |
| 5.2 | Diskrete Häufigkeitsverteilung .....                     | 3  |
| 5.3 | Kontinuierliche Normalverteilung .....                   | 4  |
| 6   | Zufällige Messunsicherheiten .....                       | 6  |
| 6.1 | Zufällige Messunsicherheiten von Mehrfachmessungen ..... | 6  |
| 6.2 | Zufällige Messunsicherheiten von Einzelmessungen .....   | 7  |
| 7   | Systematische Messunsicherheiten .....                   | 8  |
| 7.1 | Bekannte systematische Messunsicherheiten.....           | 8  |
| 7.2 | Unbekannte systematische Messunsicherheiten.....         | 8  |
| 8   | Fortpflanzung von Messunsicherheiten .....               | 9  |
| 9   | Das Messergebnis.....                                    | 12 |
| 9.1 | Angabe des Messergebnisses .....                         | 12 |
| 9.2 | Absolute und relative Messunsicherheiten.....            | 13 |
| 10  | Physikalische Grundlagen des Fadenpendels.....           | 13 |
| 11  | Beispiel – Dichtebestimmung eines Würfels .....          | 15 |
| 12  | Fragen.....  | 17 |
| 13  | Lösungen .....   | 18 |
| 14  | Literatur.....   | 19 |

# 1 Lernziele

1. Sie erwerben ein grundlegendes Verständnis zum physikalischen Messprozess, der Streuung von Messwerten und der Bedeutung von Messunsicherheiten.
2. Sie kennen zwei Arten von Messunsicherheiten und können diese voneinander unterscheiden.
3. Sie wenden die in der Versuchsanleitung vorgestellten Methoden zur Abschätzung zufälliger und systematischer Messunsicherheiten an.
4. Sie ermitteln durch Fortpflanzung der Messunsicherheiten die maximale Gesamtunsicherheit einer indirekten Messgröße.

# 2 Aufgabenstellung

Ziel des Versuchs ist die Ermittlung der Periodendauer  $T$  eines Fadenpendels. Hierfür werden 10 bis 200 Einzelmessungen für die Periodendauer  $T$  durchgeführt. Die Unsicherheit des Messergebnisses wird abgeschätzt, indem die Resultate der Messung hinsichtlich des arithmetischen Mittels  $\bar{T}$ , der empirischen Standardabweichung  $s_T$  und der empirischen Standardabweichung des Mittelwerts  $s_{\bar{T}}$  sowie der Verteilungsfunktion von  $T$  untersucht werden.

1. Für 10 Einzelmessungen sind von Hand  $\bar{T}$ ,  $s_T$  und  $s_{\bar{T}}$  zu berechnen.
2. Nach der Klasseneinteilung werden 200 Messungen durchgeführt und mit dem zur Verfügung stehenden Programm ausgewertet. Um die Entwicklung statistisch relevanter Größen in Abhängigkeit vom Stichprobenumfang zu verfolgen, werden nach 10, 25, 50, 100 und 200 Messungen die Häufigkeiten der Messwerte ermittelt.
3. Nach der Messung der Periodendauer  $T$  und der Pendellänge  $l$  wird aus den gewonnenen Daten die Fallbeschleunigung  $g$  und deren Messunsicherheit ermittelt.
4. Für die einzelnen Messungen ist anhand der Häufigkeitsverteilung das Vorliegen einer Normalverteilung zu prüfen.

# 3 Motivation

Die Physik ist eine Wissenschaft, die grundlegende Naturphänomene untersucht. Ein Beispiel hierfür ist die Bewegung von Körpern, wie die mechanische Schwingung eines Fadenpendels. Bei der Durchführung physikalischer Experimente werden Messwerte aufgenommen und ausgewertet, um den Wert einer physikalischen Größe zu bestimmen. Ziel dieses Vorgehens ist u. a., theoretische Modelle experimentell zu überprüfen. Anhand eines Experiments kann festgestellt werden, wie gut ein theoretisches Modell die Wirklichkeit beschreibt. Manchmal stellt man fest, dass ein theoretisches Modell keine genaue Beschreibung der Wirklichkeit liefert. In diesem Fall muss das Modell verworfen bzw. überarbeitet und erneut experimentell überprüft werden. Theorie und Experiment stehen somit in einem direkten Zusammenhang.

Wenn in einem Versuch eine physikalische Größe mehrmals unter gleichen Bedingungen gemessen wird, dann wird der Messwert immer verschieden sein, wenn die Auflösung des Messgeräts ausreichend groß ist. Infolgedessen treten bei jeder Messung Abweichungen auf, die als Messunsicherheiten bezeichnet werden. Störungen aufgrund äußerer Einflüsse führen dazu, dass der erhaltene Messwert vom wahren Wert der physikalischen Größe abweicht, wobei der wahre Wert stets unbekannt ist. Ein Messwert erhält nur durch die Angabe seiner Messunsicherheit eine wissenschaftliche Bedeutung, da somit dessen Genauigkeit eingeschätzt werden kann. Es ist deshalb erforderlich, dass das Endergebnis eines physikalischen Experiments den ermittelten Messwert und seine Messunsicherheit umfasst, da andernfalls nicht überprüft werden kann, wie gut das theoretische Modell die Wirklichkeit beschreibt.

## 4 Grundlegende Begriffe

### Messen

Messen ist ein experimenteller Vorgang, durch den ein spezieller Wert einer physikalischen Größe (der Messgröße) als Vielfaches ihrer Maßeinheit oder eines Bezugswertes ermittelt wird. Das Ergebnis der Messung einer physikalischen Größe ist der Messwert. Zu jedem Messwert gehören Zahlenwert und Einheit:

$$\begin{aligned} \text{Messwert} &= \text{Zahlenwert} \cdot \text{Einheit} \\ \text{Schwingungsdauer } T \text{ eines Fadenpendels} &= 3,91 \cdot \text{s} \end{aligned}$$

Jedes Messergebnis wird unter speziellen Messbedingungen erzielt. Diese sind möglichst konstant zu halten und stets im Protokoll anzugeben.

### Direkte und indirekte Messgrößen

Messgrößen können direkt oder indirekt bestimmt werden. Bei einer direkten Messung wird der Messwert direkt an einem geeigneten Messgerät abgelesen. Ein Beispiel hierfür ist die Messung der Zeit  $t$  mit einer Stoppuhr. Im Unterschied zu direkten Messgrößen werden indirekte Messgrößen nicht gemessen, sondern aus direkten Messgrößen berechnet. Ein Beispiel ist die Berechnung der Dichte  $\rho$  anhand der Messwerte für die Masse  $m$  und des Volumens  $V$  unter Zuhilfenahme der Gleichung

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \begin{array}{l} m, V \dots \text{ direkte Messgrößen} \\ \rho \dots \text{ indirekte Messgröße} \end{array}$$

### Messunsicherheiten

Die Messung einer physikalischen Größe ist stets mit Messunsicherheiten behaftet. Das Ergebnis einer Messung umfasst daher den experimentell ermittelten Wert einer physikalischen Größe oder den aus mehreren Messwerten berechneten Wert (Schätzwert) sowie die zugehörige Messunsicherheit. Erst wenn der Schätzwert und die zugehörige Messunsicherheit ermittelt wurde, ist das Ergebnis einer Messung aussagekräftig. Die Messunsicherheit entspricht einem zweiseitigen Intervall, das die Genauigkeit des Schätzwertes durch eine Wahrscheinlichkeitsaussage (Vertrauensniveau) widerspiegelt. Das Vertrauensniveau gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei wiederholter Durchführung des Experimentes der dann erhaltene Schätzwert innerhalb des ursprünglich angegebenen Vertrauensintervalls liegt.

Bei der Betrachtung von Messunsicherheiten wird zwischen zufälligen und systematischen Messunsicherheiten unterschieden. Von **zufälligen Messunsicherheiten** spricht man, wenn sich die Messwerte mehrfach durchgeführter Einzelmessungen voneinander unterscheiden und zufällig um den gesuchten Wert einer physikalischen Größe streuen. Von **systematischen Messunsicherheiten** spricht man, wenn Messwerte nicht um den gesuchten Wert einer physikalischen Größe streuen, sondern systematisch verschoben sind. Messunsicherheiten werden von groben Fehlern unterschieden, da grobe Fehler vermeidbar sind und auf nachlässigen Handlungen, Irrtümern usw. beruhen. Grobe Fehler werden daher nicht in die Berechnung von Messunsicherheiten einbezogen.

Die folgende Abbildung 1 veranschaulicht den Unterschied zwischen zufälligen und systematischen Messunsicherheiten.

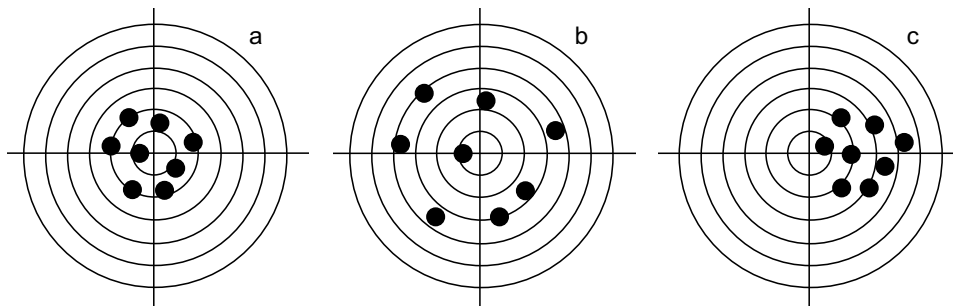


Abb. 1: Ein Schütze versucht, den Mittelpunkt der Zielscheibe zu treffen. Im vorliegenden Beispiel entspricht der Mittelpunkt dem wahren Wert einer physikalischen Größe. Anhand des Trefferbildes a wird deutlich, dass die Treffer um den Mittelpunkt der Zielscheibe streuen. Die zufällige Messunsicherheit ist ein quantitatives Maß zur Beschreibung dieser Streuung. Trefferbild b verdeutlicht ebenfalls eine Streuung der Messwerte um den wahren Wert, allerdings ist die Streuung größer als in Trefferbild a. Hieraus lässt sich schlussfolgern, dass die zufälligen Messunsicherheiten in b größer sind als in a. Auch Trefferbild b veranschaulicht ausschließlich die Natur zufälliger Messunsicherheiten. In Trefferbild c zeigt sich die gleiche Streuung wie in a sowie eine konstante Verschiebung von Treffern gegenüber dem wahren Wert nach rechts. Die systematische Messunsicherheit ist ein quantitatives Maß für die Verschiebung aller Treffer bezüglich des Mittelpunktes. Zufällige und systematische Messunsicherheiten treten in Abbildung c in Kombination auf.

## 5 Messung

### 5.1 Intervall auf der Zahlengeraden

Wir gehen nun davon aus, dass die Messung einer physikalischen Größe sehr oft wiederholt wird und unter identischen Bedingungen stattfindet. Ein Beispiel ist die 200-fache Messung der Periodendauer  $T$  im vorliegenden Versuch. Der Messwert  $T_i$  jeder Einzelmessung wird nun auf einer Zahlengeraden aufgetragen (Abb. 2). Dabei wird deutlich, dass die Messwerte streuen. Für die Messung kann ein Intervall auf der Zahlengerade dargestellt werden, welches sich vom kleinsten bis zum größten Messwert erstreckt. Je größer die Streuung der Messwerte ist, desto breiter ist das Intervall.

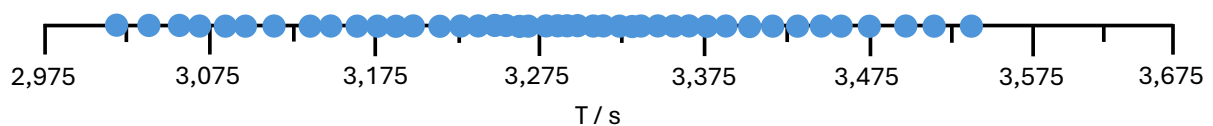


Abb. 2: Die Messwerte  $T_i$  der 200-fachen Einzelmessung der Periodendauer  $T$  als Punkte auf der Zahlengerade

Um zu analysieren, ob Messergebnisse in bestimmten Teilintervallen häufiger auftreten als in anderen, reicht die Darstellung in Abbildung 2 nicht aus. Hierfür muss eine diskrete Häufigkeitsverteilung erstellt werden.

### 5.2 Diskrete Häufigkeitsverteilung

Mit einer diskreten Häufigkeitsverteilung (Histogramm) wird graphisch dargestellt, wie viele Messwerte in einem bestimmten Teilintervall auftreten. Hierfür wird die Zahlengerade in kleinere Intervalle eingeteilt (Klasseneinteilung). In der Statistik wird die Anzahl an Klassen mit  $r = \sqrt{n}$  berechnet, wobei  $n$  der Anzahl an Einzelmessungen entspricht. In den einzelnen Intervallen wird die Anzahl der Messwerte, die innerhalb des Intervalls liegen, bestimmt. Anschließend wird diese Häufigkeit graphisch in Form senkrechter Balken dargestellt (Abb. 3). Zu erkennen ist, dass sich die Messwerte in den mittleren Intervallen häufen. Geringere Abweichungen vom häufigsten Wert treten hier öfter auf als größere Abweichungen.

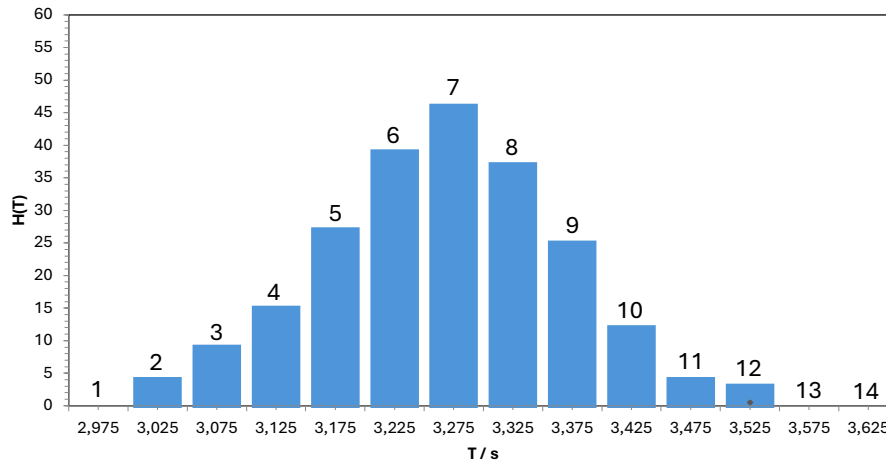


Abb. 3: Histogramm nach der 200-fachen Messung der Periodendauer  $T$ . An der  $x$ -Achse ist jeweils die Intervallmitte der 14 Intervalle aufgetragen. An der  $y$ -Achse ist die Häufigkeit  $H(T)$  gemessener Einzelwerte als Funktion der gemessenen Größe  $T$  aufgetragen. Die Balken (blau) zeigen die Anzahl von Messwerten in einem bestimmten Intervall. Die Intervallbreite beträgt 0,05 s. Es wird deutlich, dass die meisten Messwerte im 7. Intervall liegen.

### 5.3 Kontinuierliche Normalverteilung

Betrachtet man Histogramme mit immer mehr Einzelmessungen und einer Unterteilung der Daten in immer mehr Klassen, so erhält man immer glattere Darstellungen. Im Grenzfall unendlich vieler Einzelmessungen geht die diskrete Häufigkeitsverteilung (blau) in eine kontinuierliche Verteilung (rot) über (Abb. 4).

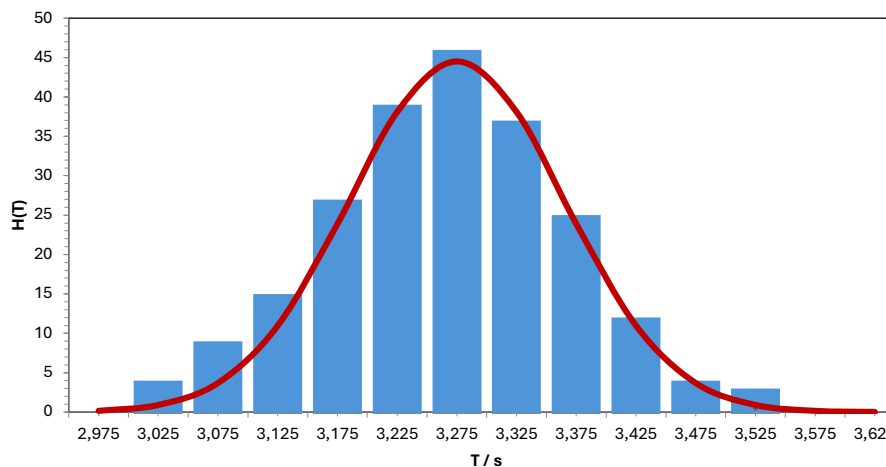


Abb. 4: Der Übergang von der diskreten Häufigkeitsverteilung (blau) zu einer kontinuierlichen Verteilung (rot) am Beispiel der 200-fachen Messung der Periodendauer  $T$ . Die rote Kurve hat die Form einer Normalverteilung.

Wird die Fläche unter der roten Kurve auf Eins normiert, so beschreibt diese eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und wird Gaußverteilung, Normalverteilung oder Gauß'sche Normalverteilung genannt. Sie hat die Form einer Glockenkurve (Abb. 5) und wird durch folgende Funktion mathematisch beschrieben:

$$w(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Die Normalverteilung ist durch zwei Parameter eindeutig bestimmt: den Erwartungswert  $\mu$  und die Standardabweichung  $\sigma$ . Der Erwartungswert  $\mu$  beschreibt die Lage des Maximums der Glockenkurve, während die Standardabweichung  $\sigma$  als horizontaler Abstand zwischen den Wendepunkten und dem

Maximum  $\mu$ , ein Maß für deren Breite ist. Anhand der Parameter der Normalverteilung, werden die folgenden drei Vertrauensbereiche festgelegt:

- Der **1 $\sigma$ -Vertrauensbereich** erstreckt sich über das symmetrisch um  $\mu$  gelagerte Intervall  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ . Es gilt:  $\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} w(x) dx = 0,682$ , dies entspricht 68,2% der Fläche unter der auf Eins normierten Kurve.
- Der **2 $\sigma$ -Vertrauensbereich** erstreckt sich über das symmetrisch um  $\mu$  gelagerte Intervall  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$ . Es gilt:  $\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} w(x) dx = 0,954$ , dies entspricht 95,4% der Fläche unter der auf Eins normierten Kurve.
- Der **3 $\sigma$ -Vertrauensbereich** erstreckt sich über das symmetrisch um  $\mu$  gelagerte Intervall  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ . Es gilt:  $\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} w(x) dx = 0,997$ , dies entspricht 99,7% der Fläche unter der auf Eins normierten Kurve.

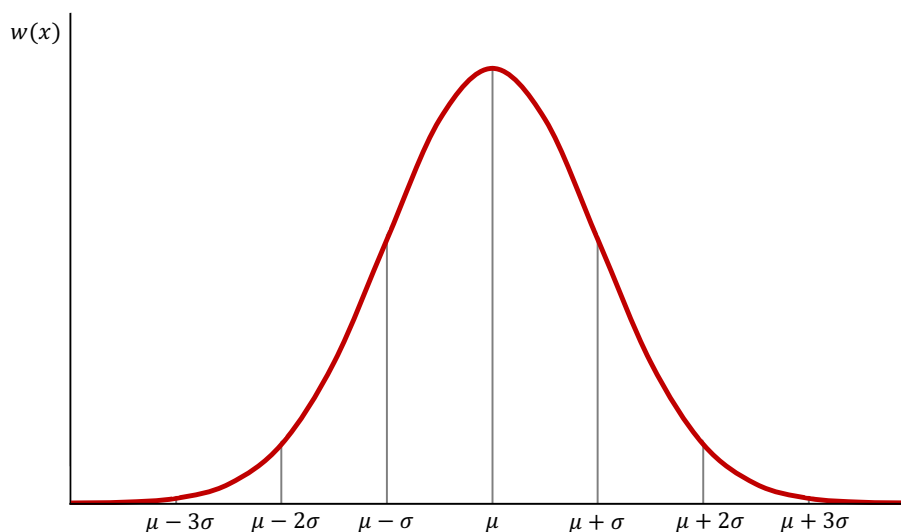


Abb. 5: Normalverteilung (rot) mit den Parametern  $\mu$  und  $\sigma$ . Das Maximum der Glockenkurve entspricht dem Erwartungswert  $\mu$ . 68,2% der Fläche unter der Kurve liegen im Intervall  $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ , 95,4% im Intervall  $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$  und 99,7% im Intervall  $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ .

Der Erwartungswert  $\mu$  entspricht, sofern keine systematischen Messunsicherheiten vorliegen, dem wahren Wert einer physikalischen Größe, der uns stets unbekannt ist. In der Praxis wird unter Annahme einer normalverteilten Streuung der Messwerte der Erwartungswert  $\mu$  durch das arithmetische Mittel  $\bar{x}$  abgeschätzt. Den besten Schätzer für die Standardabweichung  $\sigma$  stellt die empirische Standardabweichung  $s_x$  dar. Aufbauend auf den Vertrauensbereichen der Normalverteilung können anhand von  $\bar{x}$  und  $s_x$  Wahrscheinlichkeitsaussagen zum Ausgang einer Wiederholungsmessung getroffen werden: Bei gleichbleibenden Bedingungen ergibt die Messung einer normalverteilten Größe einen Wert, der mit einer Wahrscheinlichkeit von

- 68,2% im Intervall  $\bar{x} \pm s_x$  (68,2% - Vertrauensniveau)
- 95,4% im Intervall  $\bar{x} \pm 2s_x$  (95,4% - Vertrauensniveau)
- 99,7% im Intervall  $\bar{x} \pm 3s_x$  (99,7% - Vertrauensniveau)

liegt. Die Vertrauensniveaus können gleichzeitig genutzt werden, um zu überprüfen, ob eine Messgröße tatsächlich normalverteilt ist.

In vielen Fällen kann die Messung einer physikalischen Größe nicht so oft wiederholt werden, bis die Häufigkeitsverteilung tatsächlich in guter Näherung einer Normalverteilung genügt. Sofern nicht anders angegeben, ist im Praktikum unabhängig von der tatsächlichen Stichprobengröße (Anzahl der Messwerte) davon auszugehen, dass Messgrößen normalverteilt streuen. Die zufälligen Messunsicherheiten werden bei Physik im Nebenfach für ein  $2\sigma$  - Vertrauensbereich angegeben. Verfahren zur Ermittlung der zufälligen Messunsicherheiten werden im nächsten Abschnitt erläutert.

## 6 Zufällige Messunsicherheiten

Zufällige Messunsicherheiten können durch statistische Verfahren bestimmt werden. Je mehr Messungen durchgeführt werden, desto genauer können sie erfasst werden. Zufällige Messunsicherheiten werden überwiegend dem Beobachter und Einflüssen der Umgebung zugeschrieben, sofern sie nicht in der Natur des Messobjektes zu suchen sind. Sie treten bei Wiederholung der Messungen mit Unterschieden im Betrag und im Vorzeichen auf (Abb. 1a und 1b). Bei der Ermittlung zufälliger Messunsicherheiten wird zwischen Einzel- und Mehrfachmessungen unterschieden.

### 6.1 Zufällige Messunsicherheiten von Mehrfachmessungen

Wird eine physikalische Größe mehrfach unter identischen Bedingungen gemessen, dann entspricht das arithmetische Mittel  $\bar{x}$  dem besten Schätzwert des Erwartungswertes  $\mu$  (ohne Beweis):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (1)$$

Das arithmetische Mittel wird berechnet, indem alle Messwerte addiert und dann durch die Anzahl  $n$  der Messwerte geteilt werden.

(1) Begründen Sie, dass der Erwartungswert  $\mu$  nur abgeschätzt werden kann.

#### Mehrfachmessungen mit $n \geq 10$

Die zufällige Messunsicherheit wird durch die **empirische Standardabweichung des Mittelwerts  $s_{\bar{x}}$**  abgeschätzt. Dafür wird zunächst die **empirische Standardabweichung  $s_x$**  bestimmt. Die empirische Standardabweichung  $s_x$  dient als Schätzer für die **Standardabweichung  $\sigma$** . Sie ist ein Maß für die Größe der Streuung der einzelnen Messwerte. Die empirische Standardabweichung beschreibt das symmetrisch um den Mittelwert  $\bar{x}$  gelagerte Intervall  $[\bar{x} - s_x, \bar{x} + s_x]$ . Für große  $n$  nähert sich  $s_x$  dem Parameter  $\sigma$  der zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung an. In diesem Fall enthält das Intervall  $[\bar{x} - s_x, \bar{x} + s_x]$  mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 68,2% mögliche Ergebnisse von Einzelmessungen. Die empirische Standardabweichung  $s_x$  wird wie folgt ermittelt:

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n - 1}} \quad (2)$$

Im ersten Schritt werden die Abweichungen der Einzelmessungen vom Mittelwert berechnet, indem für jeden Messwert  $x_i$  die Differenz vom Mittelwert  $\bar{x}$  gebildet wird. Die Ergebnisse werden im Anschluss quadriert und dann aufsummiert. Durch das Quadrieren der Abweichungen vor dem Aufsummieren ist der Wert der Standardabweichung immer positiv und wird größer, je stärker die einzelnen Messwerte  $x_i$  vom Mittelwert  $\bar{x}$  abweichen. Im letzten Schritt wird das Ergebnis durch  $(n - 1)$  geteilt und die Wurzel gezogen.

Die **empirische Standardabweichung des Mittelwerts  $s_{\bar{x}}$**  gibt an, wie genau der Mittelwert  $\bar{x}$  bestimmt wurde. Die Unsicherheit  $s_{\bar{x}}$  des Mittelwerts nimmt bei wachsendem Stichprobenumfang ab und der Mittelwert  $\bar{x}$  nähert sich dem Erwartungswert  $\mu$  an. Für eine unendliche Anzahl an Einzelmessungen wird  $s_{\bar{x}}$  Null. Die empirische Standardabweichung des Mittelwerts  $s_{\bar{x}}$  wird wie folgt berechnet:

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n \cdot (n - 1)}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} \quad (3)$$

Für die Berechnung der empirischen Standardabweichung des Mittelwerts  $s_{\bar{x}}$  muss der Wert für die empirische Standardabweichung  $s_x$  durch die Wurzel von  $n$  geteilt werden.

(2) Begründen Sie, dass der Mittelwert mit einer zufälligen Unsicherheit behaftet ist.

In Abhängigkeit vom gewählten Vertrauensniveau wird die **statistische Messunsicherheit** wie folgt berechnet:

$$\Delta x_{\text{zuf}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}} = s_{\bar{x}} \quad (68,2\% - \text{Vertrauensniveau})$$

$$\Delta x_{\text{zuf}} = \frac{2 \cdot s_x}{\sqrt{n}} = 2 \cdot s_{\bar{x}} \quad (95,4\% - \text{Vertrauensniveau}) \quad (4)$$

Im Praktikum für Studierende mit Physik im Nebenfach wird ein Vertrauensniveau von 95,4% zugrunde gelegt. Das bedeutet, dass bei der wiederholten Messung von  $x$  der Messwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,4% im Intervall  $[\bar{x} - 2s_x, \bar{x} + 2s_x]$  zu finden ist.

### Mehrfachmessungen mit $n < 10$

Je nach Zielstellung des Experiments sind große Stichproben nicht immer notwendig. Um dennoch einen brauchbaren Schätzwert für die statistische Messunsicherheit zu erhalten, bietet sich die Durchführung der Kleinst-Statistik an:

$$\Delta x_{\text{zuf}} = \frac{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}}{2} \quad (5)$$

Die zufällige Messunsicherheit wird rechnerisch aus der halben Differenz von Maximal- und Minimalwert gebildet. Ist der so berechnete Wert für die zufällige Messunsicherheit kleiner als die Ableseunsicherheit, dann wird die zufällige Messunsicherheit durch das in Kapitel 6.2 beschriebene Vorgehen bestimmt. Wird wiederholt der gleiche Wert gemessen (z.B. bei zu geringer Auflösung des Messgeräts), dann muss zur Abschätzung der zufälligen Messunsicherheit ebenfalls das in Kapitel 6.2 beschriebene Vorgehen gewählt werden.

(3) Die Höhe  $h$  wurde 5-mal gemessen. Dabei wurde folgende Messreihe aufgenommen:

$h = [23,44 \text{ cm}; 23,40 \text{ cm}; 23,45 \text{ cm}; 23,41 \text{ cm}; 23,39 \text{ cm}]$ . Bestimmen Sie die zufällige Messunsicherheit unter Anwendung der Kleinst-Statistik.

## 6.2 Zufällige Messunsicherheiten von Einzelmessungen

Manchmal ist es nicht sinnvoll oder möglich für die Messgröße eine Reihe wiederholter Messungen durchzuführen. In diesem Fall wird die zufällige Messunsicherheit durch die Ableseunsicherheit abgeschätzt und je nach Messgerät wie folgt ermittelt:

- **Bei analogen Messgeräten:** Die zufällige Messunsicherheit entspricht der halben kleinsten Skaleneinteilung und ist ein Maß für die zufällige Ableseunsicherheit.

**Beispiel:** Ein Stahlmaßstab mit einer kleinsten Skaleneinteilung von 1 mm:

$$\Delta x_{\text{zuf}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ mm} = 0,5 \text{ mm}$$

(4) Ermitteln Sie die zufällige Messunsicherheit  $\Delta x_{\text{zuf}}$  bei einer kleinsten Skaleneinteilung von 0,5 mm.

**Hinweis:** Es gibt Fälle, in denen man die zufällige Messunsicherheit durch dieses Vorgehen über- oder unterschätzt. In diesem Fall muss abgewägt werden, wie die Messunsicherheit besser abgeschätzt werden kann.

- **Bei digitalen Messgeräten:** Der Messwert ist um die Einheit der letzten angezeigten Stelle (last Digit) unsicher. Die zufällige Messabweichung entspricht einem Digit.

**Beispiel:** Ein digitales Voltmeter zeigt einen Messwert von  $U = 2,45 \text{ V}$  an.  
 $\Delta U_{\text{zuf}} = 1 \text{ Digit} = 0,01 \text{ V}$



(5) Ermitteln Sie die zufällige Messunsicherheit  $\Delta U_{\text{zuf}}$ , wenn ein digitales Voltmeter den Messwert  $U = 3,582 \text{ V}$  anzeigt.

**Hinweis:** Das beschriebene Vorgehen kann nur dann angewandt werden, wenn eine stabile Anzeige des Messwerts auf dem Display des Messgeräts vorliegt. Sollte dies nicht der Fall sein, dann ist eine Reihe wiederholter Einzelmessungen durchzuführen. Die Berechnung der Messunsicherheiten entspricht dann dem in Kapitel 6.1 beschriebenen Vorgehen.

## 7 Systematische Messunsicherheiten

Zusätzlich zur bereits thematisierten Streuung von Messwerten kann es zu einer Verschiebung aller Messwerte bezüglich des wahren Werts kommen (Abb. 1c). Systematische Messunsicherheiten zeichnen sich dadurch aus, dass sie i.d.R. zu konstanten Abweichungen führen. Charakteristisch für systematische Messunsicherheiten ist, dass sie bei einer Wiederholungsmessung unter gleichen Messbedingungen in Betrag und Vorzeichen gleichbleiben. Folglich können systematische Messunsicherheiten durch die Wiederholung von Einzelmessungen weder erkannt noch eliminiert werden.

Die Ursachen systematischer Messunsicherheiten liegen z.B. in der Unvollkommenheit der Messgeräte und der Versuchsbedingungen sowie in nicht erfassten Umwelteinflüssen, in mangelnder Kalibrierung oder Justierung oder im Messverfahren. Hinzu kommt, dass diese Abweichungen oft korreliert sind. Da im Physikalischen Praktikum für Nebenfachstudierende eine vereinfachte Betrachtung von Messunsicherheiten erfolgt, wird für weitere Informationen zum Thema Korrelationen auf das Skript *Einführung in das Physikalische Praktikum* verwiesen. Für die Identifikation systematischer Messunsicherheiten gibt es keine allgemeine Vorgehensweise, da deren Ursachen sehr vielfältig sind.

### 7.1 Bekannte systematische Messunsicherheiten

In einigen Fällen sind die systematischen Messunsicherheiten bekannt. Ist dieser Fall gegeben, dann werden die systematischen Messunsicherheiten durch Experimente oder Berechnungen bestimmt und durch eine Korrektur nach Betrag und Vorzeichen berücksichtigt.

### 7.2 Unbekannte systematische Messunsicherheiten

Häufiger tritt der Fall ein, dass die systematischen Messunsicherheiten unbekannt sind. Informationen zu den systematischen Messunsicherheiten werden dann aus den Angaben der Hersteller der Messgeräte bezogen. Die Herstellerangaben geben einen vereinbarten Höchstbetrag für (positive oder negative) systematische Abweichungen der Anzeige der Messgeräte an (siehe Tabelle 1).

| Gerät                          | Grenze des Messbereiches | Fehlergrenze                              |
|--------------------------------|--------------------------|---|
| Mechanischer Messschieber      | 15 cm                    | $50 \mu\text{m} + 10^{-4} \cdot l$        |
| Digitaler Messschieber         | 15 cm                    | $0,03 \text{ mm} + 1 \text{ Digit}$       |
| Drehspulinstrument             | 100 V                    | 0,5 % des Endausschlages                  |
| Digital-Multimeter M 3610 B    | 20 V                     | 0,3 % des Wertes + 1 Digit                |
| Laborthermometer höchster Güte | 0 bis 50 °C              | 0,15 K                                    |
| Stoppuhr (ein Umlauf in 30 s)  | z.B. 80 s                | $0,2 \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$ |

Tab. 1: Beispiele für Garantie- und Eichfehlergrenzen (Herstellerangaben) von Messgeräten

Oft besteht die Herstellerangabe aus einem konstanten und einem vom Messwert abhängigen Term (siehe Tabelle 1).

Die systematische Unsicherheit wird im Praktikum für Physik im Nebenfach direkt durch die Herstellerangabe abgeschätzt.

**Beispiel:** Die Länge  $l$  eines Gegenstandes wird mit einem mechanischen Messschieber mehrfach gemessen und der Mittelwert  $\bar{l}$  berechnet. Die Herstellerangabe für den mechanischen Messschieber lautet (siehe Tabelle 1):

$$50 \mu\text{m} + 10^{-4} \cdot l$$

Die systematische Messunsicherheit der Längenmessung wird dann wie folgt berechnet:

$$\Delta l_{\text{sys}} = (50 \mu\text{m} + 10^{-4} \cdot \bar{l})$$

Der beste Schätzwert für die Länge  $\bar{l}$  wird mit  $10^{-4}$  multipliziert. Im Anschluss wird die Summe mit  $50 \mu\text{m}$  gebildet.

**Die Herstellerangaben aller Messgeräte, die im Physikalischen Praktikum verwendet werden, sind im Skript *Einführung in das Physikalische Praktikum* zu finden.**

(6) Berechnen Sie die systematische Messunsicherheit  $\Delta U_{\text{sys}}$  eines Digital-Multimeters (vierte Zeile in Tabelle 1), wenn der Messwert  $U = 8,57 \text{ V}$  beträgt.

## 8 Fortpflanzung von Messunsicherheiten

Messgrößen, die aus direkten Messgrößen berechnet werden, bezeichnet man als indirekte Messgrößen. Die Messunsicherheiten der direkten Messgrößen wirken sich auf die Messunsicherheit der daraus zu berechnenden indirekten Messgröße aus. Das Verfahren zur Berechnung der Messunsicherheit einer indirekten Messgröße aus den Messunsicherheiten der direkten Messgrößen, wird als "Fortpflanzung von Messunsicherheiten" bezeichnet und im folgenden Abschnitt motiviert.

### Fortpflanzung bei **einer** direkten Messgröße

Zwischen der direkten Messgröße  $x$  und der indirekten Messgröße  $y$ , besteht ein funktionaler Zusammenhang  $y = f(x)$  (Abb. 6a). Anhand eines Experiments wurde für die Messgröße  $x$  der Schätzwert  $x_1$  ermittelt. Durch den funktionalen Zusammenhang kann der zum Schätzwert  $x_1$  zugehörige Funktionswert  $f(x_1)$  bestimmt werden (Abb. 6b). Die direkte Messgröße  $x$  ist mit der Messunsicherheit  $\Delta x$  behaftet. Anhand Abbildung 6c wird deutlich, dass die Messunsicherheit  $\Delta x$  der direkten Messgröße eine Auswirkung auf die Messunsicherheit der indirekten Messgröße hat: Wird die Messgröße  $x$  um die Messunsicherheit  $\Delta x$  zu groß gemessen, dann ergibt sich  $f(x + \Delta x)$  als zugehöriger Funktionswert. Es ist ebenso möglich, dass die Messgröße  $x$  um die Messunsicherheit  $\Delta x$  zu klein gemessen wird, wodurch sich  $f(x - \Delta x)$  als zugehöriger Funktionswert ergibt. Der letzte Fall wird in Abbildung 6c nicht dargestellt.

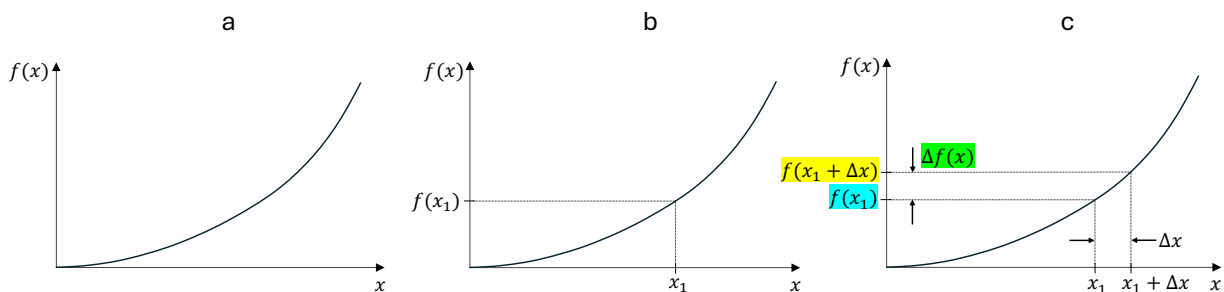


Abb. 6: Abbildung a veranschaulicht den funktionalen Zusammenhang zwischen  $f(x)$  und  $x$ . Abbildung b zeigt den Schätzwert  $x_1$  und den zugehörigen Funktionswert  $f(x_1)$ . Anhand Abbildung c wird deutlich, dass die Messunsicherheit  $\Delta x$  der direkten Messgröße die Messunsicherheit  $\Delta f(x)$  der indirekten Messgröße bedingt.

Um die Messunsicherheit  $\Delta f(x)$  der indirekten Messgröße zu ermitteln, wird die folgende Gleichung (6) aufgestellt, die anhand Abb. 6c nachvollzogen werden kann:

$$\Delta f(x) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \quad (6)$$

Um einen direkten Zusammenhang zwischen  $\Delta f(x)$  und  $\Delta x$  herzustellen, soll der Anstieg der Funktion zwischen den Punkten  $[x_1, f(x_1)]$  und  $[x_1 + \Delta x, f(x_1 + \Delta x)]$  bestimmt werden. Hierfür wird eine Sekante konstruiert, die durch die genannten Punkte verläuft (Abb. 7). Der Anstieg  $m$  der Sekante wird anhand eines Anstiegsdreiecks bestimmt. Man erhält die folgende Gleichung:

$$m = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \quad (7)$$

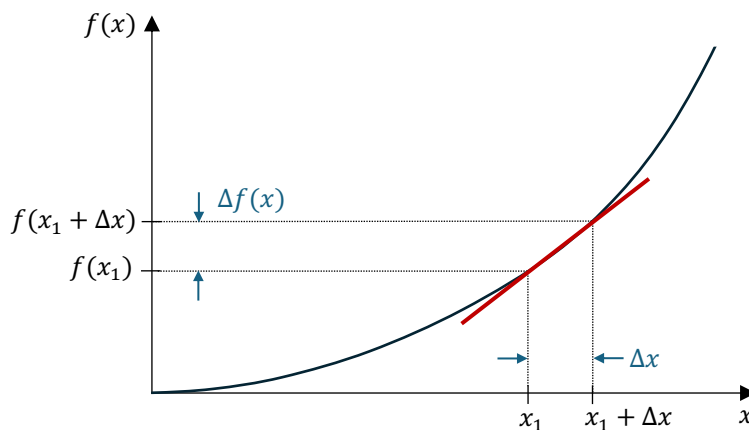


Abb. 7: Die Sekante (rot) verläuft durch die Punkte  $[x_1, f(x_1)]$  und  $[x_1 + \Delta x, f(x_1 + \Delta x)]$ . Der Anstieg  $m$  der Sekante wird aus dem Quotienten von  $\Delta f(x)$  und  $\Delta x$  bestimmt. Im Grenzfall  $\Delta x \rightarrow 0$  nähert sich der Punkt  $x_1 + \Delta x$  immer weiteren dem Punkt  $x_1$  auf der Abszissenachse an, sodass die Sekante in eine Tangente übergeht. Der Anstieg kann dann durch die Ableitung der Funktion  $f(x)$  nach  $x$  an der Stelle  $x_1$  bestimmt werden.

In Gleichung (7) wird nun Gleichung (6) eingesetzt:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad (8)$$

Im Grenzfall  $\Delta x \rightarrow 0$  nähern sich der Punkt  $x_1 + \Delta x$  immer weiter dem Punkt  $x_1$  auf der Abszissenachse an, sodass die Sekante schließlich in eine Tangente übergeht. Im Grenzfall kann der Anstieg durch die erste Ableitung der Funktion  $f(x)$  nach  $x$  an der Stelle  $x_1$  bestimmt werden. Aus Gleichung (8) erhält man dann folgenden Zusammenhang:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_1}$$

Wird nun mit der Messunsicherheit  $\Delta x$  multipliziert, dann erhält man den folgenden Ausdruck:

$$\Delta f(x) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_1} \cdot \Delta x \quad (9)$$

Durch Anwenden von Gleichung (9) kann die Auswirkung der Messunsicherheit der direkten Messgröße  $\Delta x$  auf die Messunsicherheit der indirekten Messgröße  $f(x)$  abgeschätzt werden. Hierfür wird die Ableitung der Funktion  $f(x)$  nach  $x$  berechnet und der Wert  $x_1$  eingesetzt. Durch dieses Vorgehen wird der Anstieg der Tangente am Punkt  $x_1$  bestimmt. Wird nun mit der Messunsicherheit  $\Delta x$  multipliziert, dann ergibt sich die Messunsicherheit  $\Delta f(x)$  der indirekten Messgröße.

Die Messunsicherheit der indirekten Messgröße hängt somit nicht nur von der Unsicherheit der direkten Messgröße ab, sondern auch vom funktionalen Zusammenhang zwischen  $x$  und  $f(x)$  (Abb. 8).

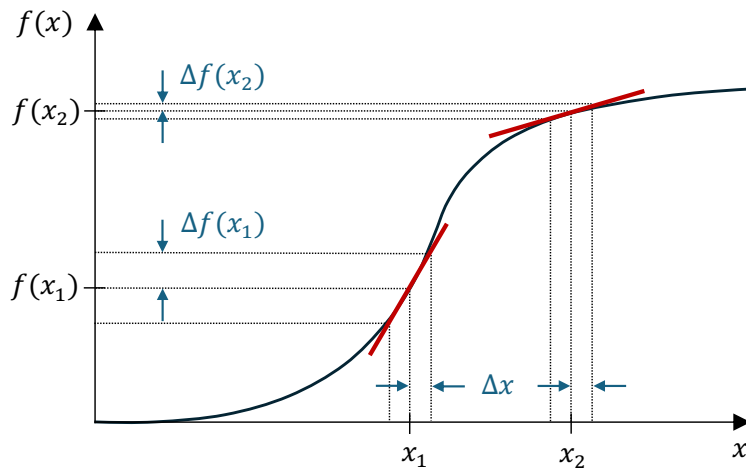


Abb. 8: Einfluss des funktionalen Zusammenhangs. Der Anstieg der Tangente (rot) am Punkt  $x_1$  ist größer als am Punkt  $x_2$ , da  $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$  ist die resultierende Messunsicherheit  $\Delta f(x_1)$  größer als  $\Delta f(x_2)$ .

### Fortpflanzung bei mehreren direkten Messgrößen

Das beschriebene Vorgehen kann für indirekte Messgrößen verallgemeinert werden, die aus mehreren direkten Messgrößen berechnet werden. Ein Beispiel ist die Funktion  $f(x, y, z)$ , die von den direkten Messgrößen  $x, y, z$  abhängt. Die Messunsicherheiten  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  der direkten Messgrößen beeinflussen die Messunsicherheit  $\Delta f(x, y, z)$  der indirekten Messgröße. Die Beiträge der direkten Messgrößen  $x, y, z$  zur Gesamtunsicherheit werden analog zu Gleichung (9) bestimmt. Eine Besonderheit ist, dass die Funktion  $f(x, y, z)$  partiell abgeleitet werden muss, da sie von mehreren direkten Messgrößen abhängt. Beim partiellen Ableiten wird eine Funktion, die von mehreren Größen abhängt, nur nach einer dieser Größen abgeleitet, während die übrigen Größen konstant gehalten werden. In Anlehnung an Gleichung (9) ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

$$\Delta f(x, y_0, z_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_1} \cdot \Delta x$$

$$\Delta f(x_0, y, z_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y=y_1} \cdot \Delta y$$

$$\Delta f(x_0, y_0, z) = \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z=z_1} \cdot \Delta z$$

Bei der Berechnung der Gesamtunsicherheit  $\Delta f(x, y, z)$  müssen alle genannten Beiträge berücksichtigt werden.

### Abschätzung der maximalen Unsicherheit indirekter Messgrößen

Bei korrekter Behandlung erfolgt die Fortpflanzung der zufälligen und systematischen Unsicherheiten getrennt voneinander, da sie unterschiedlicher Natur sind (Abb. 1). Im Physikalischen Praktikum für Nebenfachstudierende nutzen wir eine Vereinfachung, die zu einer Überschätzung der Messunsicherheiten führen kann. Dabei werden zunächst für jede direkte Messgröße die zufälligen und systematischen Messunsicherheiten jeweils zu einer Gesamtunsicherheit addiert:

$$\Delta x = \Delta x_{zuf} + \Delta x_{syst} \quad (10)$$

...

Die Gesamtunsicherheit  $\Delta f$  der indirekten Messgröße erhält man dann durch

$$\Delta f(x, y, z, \dots) = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \cdot \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \cdot \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \cdot \Delta z + \dots \quad (11)$$

Das Verfahren in Gleichung (11) wird Maximalfehlerabschätzung genannt und stellt eine Vereinfachung des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes dar. Die Messunsicherheiten  $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$  der direkten Messgrößen werden mit dem Betrag der partiellen Ableitung der Funktion

$f(x, y, z, \dots)$  nach der jeweiligen Messgröße multipliziert. Schließlich werden die Beiträge der einzelnen Messgrößen zur Gesamtunsicherheit  $\Delta f(x, y, z, \dots)$  aufsummiert. Die Gesamtunsicherheit  $\Delta f(x, y, z, \dots)$  umfasst sowohl die zufälligen als auch die systematischen Messunsicherheiten.

(7) Die Radialbeschleunigung  $a$  wird aus der Umlaufzeit  $T$  und dem Kreisradius  $r$  mit der Gleichung  $a = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2}$  bestimmt. Geben Sie die Gleichung zur Berechnung der Gesamtunsicherheit der Radialbeschleunigung  $a$  an und berechnen Sie die partiellen Ableitungen.

## 9 Das Messergebnis

### 9.1 Angabe des Messergebnisses

Nach der Abschätzung der Messunsicherheit wird im Endergebnis der beste Schätzwert  $\bar{f}$  der Funktion  $f$  und der Wert der maximalen Messunsicherheit (absolute Messunsicherheit)  $\Delta f$  wie folgt angegeben:

$$\underline{\underline{f = \bar{f} \pm \Delta f}} \quad (12)$$

Bei der Angabe des Messergebnisses in Form von Gleichung (12) müssen das Messergebnis und die Messunsicherheit korrekt gerundet werden.

#### Rundungsregeln

Bei der Angabe von Messergebnissen ist es wichtig, die richtige Zahl von Ziffern anzugeben, um weder eine zu große Genauigkeit noch eine zu große Messunsicherheit zu suggerieren. Die Rundungsregeln entsprechen den Vorgaben der DIN 1333. Durch die angegebenen Rundungsregeln soll sichergestellt werden, dass signifikante Stellen durch das Runden nicht verloren gehen und keine nichtsignifikanten (sog. informationsleeren) Stellen angegeben werden. Als signifikante Stellen werden Stellen bezeichnet, die aussagekräftig sind.

- Zunächst wird der ungerundete Wert der Messunsicherheit betrachtet. Von links beginnend wird die erste von Null verschiedene Stelle gesucht.
  - Fall 1:** Ist die Stelle eine 3 ... 9, dann ist SIE die zu rundende Stelle. Diese Stelle wird signifikante Stelle genannt.
  - Fall 2:** Ist die Stelle eine 1 oder 2, dann ist die zu rundende Stelle RECHTS daneben. Es ergeben sich zwei signifikante Stellen.
- Es folgt die Rundung der Ergebniszahl. Die Ergebniszahl und die Messunsicherheit werden an der gleichen Stelle gerundet.
- Nachdem sowohl die Messunsicherheit als auch die Ergebniszahl gerundet wurden, kann das Endergebnis wie in Gleichung (12) angegeben werden.

#### Beispiel

|                            | <b>Fall 1</b>  | <b>Fall 2</b>  |
|----------------------------|--|--|
| Ergebniszahl:              | 9,812467   | 9,812467   |
| Messunsicherheit:          | 0,046718   | 0,021303   |
| Messunsicherheit gerundet: | 0,05 (eine signifikante Stelle)  | 0,021 (zwei signifikante Stellen)  |
| Ergebniszahl gerundet:     | 9,81   | 9,812  |
| Endergebnis:               | <u><u><math>(9,81 \pm 0,05) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}</math></u></u> | <u><u><math>(9,812 \pm 0,021) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}</math></u></u> |

(8) Die Messunsicherheit der Fallbeschleunigung beträgt  $\Delta g = 0,0134 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Das Ergebnis beträgt  $g = 9,8235 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Geben Sie das gerundete Endergebnis an.

## 9.2 Absolute und relative Messunsicherheiten

Die resultierende Messunsicherheit kann sowohl absolut ( $\Delta f$ ) als auch relativ angegeben werden. Die relative Messunsicherheit ist definiert als Quotient aus der absoluten Messunsicherheit  $\Delta f$  und dem besten Schätzwert  $\bar{f}$  der Funktion  $f$ :

$$\frac{\Delta f}{\bar{f}}$$

Die relative Messunsicherheit ist besonders gut geeignet, um die Qualität einer Messung oder eines Messverfahrens einzuschätzen. Relative Messunsicherheiten werden auf zwei signifikante Stellen gerundet (inkonsistent in der Literatur).

## 10 Physikalische Grundlagen des Fadenpendels

Ein geeignetes Modell zur Beschreibung der Bewegung eines Fadenpendels ist das des mathematischen Pendels. Einflüsse durch Reibung, Luftwiderstand, die Masse und Dehnbarkeit des Fadens sowie die räumliche Ausdehnung des Pendelkörpers werden in diesem Modell vernachlässigt.

Der Aufbau des Fadenpendels wird in Abbildung 9a dargestellt. Die Pendellänge  $l$  reicht von der Aufhängung des Fadens bis zum Schwerpunkt des Pendelkörpers der Masse  $m$ . Wird der Pendelkörper um den Winkel  $\varphi$  ausgelenkt und losgelassen, beginnt er auf einer Kreisbahn mit dem Radius  $l$  um seine Gleichgewichtslage ( $\varphi = 0$ ) zu schwingen (Abb. 9b). Bei Kenntnis der Funktion  $\varphi(t)$  ist die Bewegung zu allen Zeiten bestimmt. Zur Berechnung von  $\varphi(t)$  wird unter Nutzung des Newtonschen Grundgesetzes die Bewegungsgleichung aufgestellt. Dafür werden die wirkenden Kräfte auf den Pendelkörper der Masse  $m$  an einem beliebigen Punkt der Bewegung analysiert (Abb. 9c).

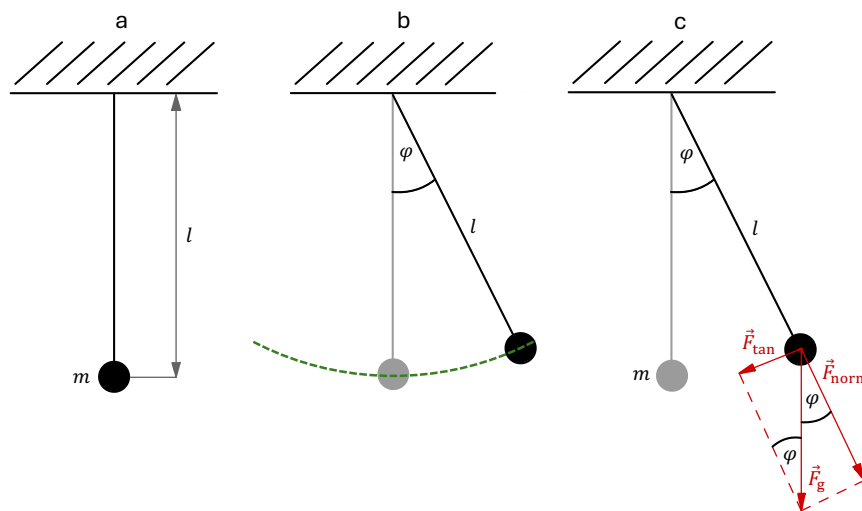


Abb. 9: a) Aufbau des Fadenpendels. b) Bewegung des Pendelkörpers auf einer Kreisbahn (grün gestrichelt). c) Zerlegung der Gewichtskraft  $\vec{F}_g$  in die Normalkraft  $\vec{F}_{\text{norm}}$  und die rücktreibende Kraft  $\vec{F}_{\text{tan}}$ .

Zu jedem Zeitpunkt der Bewegung wirkt auf den Pendelkörper die Gewichtskraft  $\vec{F}_g$ . Die Gewichtskraft wird in eine Normalkomponente  $\vec{F}_{\text{norm}}$  und eine Tangentialkomponente  $\vec{F}_{\text{tan}}$  zerlegt. Die Normalkomponente  $\vec{F}_{\text{norm}}$  wird durch den Faden kompensiert. Somit wird der Pendelkörper nur durch  $\vec{F}_{\text{tan}}$  mit  $\vec{a}_{\text{tan}}$  tangential zur Kreisbahn beschleunigt. Da  $\vec{F}_{\text{tan}}$  immer in Richtung der Ruhelage wirkt, wird sie auch als rücktreibende Kraft bezeichnet.

Das mathematische Pendel besitzt nur einen Freiheitsgrad, weshalb eine skalare Gleichung ausreichend ist. Nach dem 2. Newtonschen Axiom lautet die Bewegungsgleichung dann wie folgt:

$$m \cdot a_{\text{tan}} = \sum_i F_i \quad (13)$$

Somit ergibt sich aus Gleichung (13) unter Berücksichtigung der Winkelbeziehungen im rechtwinkligen Dreieck (siehe Abb. 9c):

$$m \cdot a_{\text{tan}} = F_{\text{tan}} = -F_g \cdot \sin \varphi \quad (14)$$

Das Minus in Gleichung (14) berücksichtigt, dass die rücktreibende Kraft immer in Richtung der Ruhelage wirkt. Mit der Definition der Tangentialbeschleunigung

$$a_{\text{tan}} = l \cdot \ddot{\varphi}$$

ergibt sich aus (14) die folgende Schwingungsdifferentialgleichung

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \sin \varphi \quad (15)$$

Für kleine Winkel gilt die Näherung  $\sin \varphi \approx \varphi$ , sodass Gleichung (15) in die Differentialgleichung der harmonischen Schwingung übergeht

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \cdot \varphi \quad (16)$$

Bei (16) handelt es sich um eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, die durch den Ansatz

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega \cdot t + \alpha) \quad (17)$$

gelöst wird, wobei  $\varphi_0$  die maximale Auslenkung,  $\alpha$  der Phasenwinkel und  $\omega$  die Kreisfrequenz der Schwingung ist. Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichung zeigt, dass (17) genau dann eine Lösung von (16) ist, wenn gilt

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

Mit der Definition der Kreisfrequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen der Periodendauer  $T$  und der Fallbeschleunigung  $g$ :

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{l} \rightarrow g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \quad (18)$$

Zuletzt erhält man die bekannte Gleichung (18) zur Berechnung der Fallbeschleunigung  $g$  eines Fadenpendels, welche im vorliegenden Versuch genutzt werden soll.

# 11 Beispiel – Dichtebestimmung eines Würfels

Die vorgestellten Konzepte zur Berechnung von Messunsicherheiten werden im folgenden Kapitel anhand eines Experiments zur **Bestimmung der Dichte eines Würfels** angewandt.

**Messprinzip:** Die Dichte  $\rho$  eines Körpers kann durch die Gleichung  $\rho = \frac{m}{V}$  bestimmt werden. Die Masse  $m$  des Würfels wird direkt mit einer Waage gemessen ( $n = 15$ ). Das Volumen  $V$  wird nach der Messung der Kantenlänge  $a$  ( $n = 5$ ) durch die Gleichung  $V = a^3$  berechnet. Hieraus ergeben sich die folgenden direkten und indirekten Messgrößen:

Direkte Messgrößen:

- Masse  $m$
- Kantenlänge  $a$

Indirekte Messgrößen:

- Volumen  $V$  mit  $V = a^3$
- Dichte  $\rho$  mit  $\rho = \frac{m}{V}$

## Messwerte und Auswertung

| i  | m/g  |
|----|------|
| 1  | 62,9 |
| 2  | 62,8 |
| 3  | 62,9 |
| 4  | 62,7 |
| 5  | 62,8 |
| 6  | 62,9 |
| 7  | 62,7 |
| 8  | 62,9 |
| 9  | 62,8 |
| 10 | 63,0 |
| 11 | 63,0 |
| 12 | 62,8 |
| 13 | 62,7 |
| 14 | 62,9 |
| 15 | 63,0 |

Tab. 2: Messwerte für die Masse  $m$

| i | a/cm |
|---|------|
| 1 | 2,11 |
| 2 | 2,08 |
| 3 | 2,01 |
| 4 | 2,12 |
| 5 | 2,02 |

Tab. 3: Messwerte für die Kantenlänge  $a$

Der beste Schätzwert direkter Messgrößen kann durch die Berechnung des arithmetischen Mittels (Gleichung 1) bestimmt werden:

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^{15} m_i}{n} = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_{15}}{15} = 62,853 \text{ g}$$

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^5 a_i}{n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = 2,068 \text{ cm}$$

Um die besten Schätzwerte für die indirekten Messgrößen  $V$  und  $\rho$  zu bestimmen, werden die berechneten Mittelwerte  $\bar{m}$  und  $\bar{a}$  eingesetzt:

$$\bar{V} = \bar{a}^3 = (2,068 \text{ cm})^3 = 8,84406 \text{ cm}^3$$

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{m}}{\bar{V}} = \frac{62,853 \text{ g}}{8,84406 \text{ cm}^3} = 7,1068 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

## Gesamtunsicherheit direkter Messgrößen

Bevor die Gesamtunsicherheit der direkten Messgrößen  $m$  und  $a$  bestimmt werden kann, müssen die zufälligen und systematischen Messunsicherheiten berechnet werden.



| <b>Masse <math>m</math></b>  | <b>Kantenlänge <math>a</math></b>   |
|--|---|
| <p><b>Zufällige Messunsicherheit <math>\Delta m_{\text{zuf}}</math></b><br/>Berechnung mit empirischer Standardabweichung <math>s_m</math><br/>da <math>n \geq 10</math>:</p> <p>Die Masse <math>m</math> wurde 15-mal gemessen, deshalb wird zur Berechnung von <math>\Delta m_{\text{zuf}}</math> zunächst die empirische Standardabweichung (Gleichung 2) bestimmt:</p> $s_m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{15} (m_i - \bar{m})^2}{15 - 1}} = 0,1060 \text{ g}$ <p>Mit einem Vertrauensniveau von 95,4% (<math>2\sigma</math>-Vertrauensbereich) ergibt sich für die zufällige Messunsicherheit (Gleichung 4):</p> $\Delta m_{\text{zuf}} = \frac{2 \cdot s_m}{\sqrt{n}} = 0,054738 \text{ g}$ | <p><b>Zufällige Messunsicherheit <math>\Delta a_{\text{zuf}}</math></b><br/>Berechnung mit Kleinst-Statistik da <math>n &lt; 10</math>:</p> <p>Die Kantenlänge <math>a</math> wurde 5-mal gemessen, deshalb wird zur Berechnung von <math>\Delta a_{\text{zuf}}</math> die Kleinst-Statistik (Gleichung 5) angewandt:</p> $\Delta a_{\text{zuf}} = \frac{a_{\text{max}} - a_{\text{min}}}{2} = 0,055 \text{ cm}$ <p>Ableseunsicherheit (halbe kleinste Skaleneinteilung):</p> $\Delta a_{\text{zuf}} = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \text{ mm} = 0,05 \text{ mm}$ <p>Der durch die Kleinst-Statistik ermittelte Wert für <math>\Delta a_{\text{zuf}}</math> ist größer als die Ableseunsicherheit, deshalb gilt <math>\Delta a_{\text{zuf}} = 0,055 \text{ cm}</math>.</p> |
| <p><b>Systematische Messunsicherheit <math>\Delta m_{\text{syst}}</math></b><br/>Aus der Herstellerangabe für die digitale Waage ergibt sich folgende systematische Messunsicherheit:</p> $\Delta m_{\text{syst}} = 0,1 \text{ g}$   | <p><b>Systematische Messunsicherheit <math>\Delta a_{\text{syst}}</math></b><br/>Für den Messschieber wird folgende Herstellerangabe angegeben:</p> $\Delta l = 50 \mu\text{m} + 5 \cdot l \cdot 10^{-4}$ <p>Die Herstellerangabe entspricht der systematischen Messunsicherheit:</p> $\Delta a_{\text{syst}} = 50 \mu\text{m} + 5 \cdot \bar{a} \cdot 10^{-4} = 0,006034 \text{ cm}$   |
| <p><b>Gesamtunsicherheit (Gleichung 10)</b></p> $\Delta m = \Delta m_{\text{zuf}} + \Delta m_{\text{syst}} = 0,154738 \text{ g}$   | <p><b>Gesamtunsicherheit (Gleichung 10)</b></p> $\Delta a = \Delta a_{\text{zuf}} + \Delta a_{\text{syst}} = 0,061034 \text{ cm}$   |

### Messunsicherheit indirekter Messgrößen – Fortpflanzung von Messunsicherheiten

Durch die Fortpflanzung der Messunsicherheit der Kantenlänge  $a$  wird die maximale Messunsicherheit des Volumens  $V$  berechnet (Gleichung 11):

$$\Delta V = \left| \frac{\partial V}{\partial a} \right| \cdot \Delta a = \left| \frac{\partial}{\partial a} a^3 \right| \cdot \Delta a = 3a^2 \cdot \Delta a = 3 \cdot (2,068 \text{ cm})^2 \cdot 0,061034 \text{ cm} = 0,783058 \text{ cm}^3$$

Im Anschluss kann die Messunsicherheit der Dichte  $\rho$  berechnet werden (Gleichung 11):

$$\Delta \rho = \left| \frac{\partial \rho}{\partial m} \right| \cdot \Delta m + \left| \frac{\partial \rho}{\partial V} \right| \cdot \Delta V = \left| \frac{\partial}{\partial m} \frac{m}{V} \right| \cdot \Delta m + \left| \frac{\partial}{\partial V} \frac{m}{V} \right| \cdot \Delta V = \frac{1}{V} \cdot \Delta m + \frac{m}{V^2} \cdot \Delta V$$

$$\Delta \rho = 0,017496 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} + 0,629242 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 0,646738 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

### Endergebnis

$$\rho = (7,1 \pm 0,6) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

### Relative Messunsicherheit

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = 0,09 = 9\%$$

Es wird deutlich, dass die Messunsicherheit des Volumens  $V$  mit  $0,629242 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  den größten Beitrag zur Gesamtunsicherheit der Dichte  $\rho$  leistet. Die relative Messunsicherheit beträgt 9%.

## Autorenschaft

Diese Versuchsanleitung wurde in ihrer ursprünglichen Form von R. Goldberg, L. Jahn und R. Schwierz erstellt und von M. Kreller, J. Kelling, F. Lemke, S. Majewsky, L. Ruick bearbeitet. Aktuelle Änderungen werden von der Praktikumsleitung durchgeführt.

## 12 Fragen

1. Charakterisieren Sie zufällige und systematische Messunsicherheiten.
2. Skizzieren Sie die Normalverteilung und kennzeichnen Sie die zwei Parameter, durch die die Normalverteilung eindeutig bestimmt werden kann. Geben Sie an, durch welche Größen die zwei Parameter in der Praxis genähert werden.
3. Schraffieren Sie in Ihrer Skizze aus Aufgabe 2 den Bereich, der 68,2% der Fläche unter der Kurve entspricht.
4. Die Anzahl an Intervallen wird in der Statistik durch  $r = \sqrt{n}$  abgeschätzt, wobei  $n$  der Anzahl wiederholter Einzelmessungen entspricht. Leiten Sie anhand Abbildung 5 her, wie der Anfangswert des 1. Intervalls und die Intervallbreite berechnet werden, wenn 99,7% der Messwerte abgedeckt werden müssen ( $3\sigma$ -Vertrauensbereich).
5. Für die elektrische Spannung  $U$  wurde eine Messreihe aus  $n = 3$  Einzelmessungen aufgenommen. Beschreiben Sie das Vorgehen zur Ermittlung der zufälligen Messunsicherheit der elektrischen Spannung  $U$ .
6. Für die elektrische Stromstärke  $I$  wurde eine Messreihe aus  $n = 20$  Einzelmessungen aufgenommen. Geben Sie die Gleichungen an, die zur Berechnung der zufälligen Messunsicherheit der elektrischen Stromstärke  $I$  benötigt werden.
7. Mit einem digitalen Voltmeter wurde eine elektrische Spannung von  $U = 5,18$  V gemessen. Der Hersteller gibt für das Messgerät folgende Herstellerangabe an: 0,5% + 3 Digit. Berechnen Sie die systematische Messunsicherheit der gemessenen Größe  $U$ .
8. Der elektrische Widerstand  $R$  kann nach der direkten Messung der elektrischen Stromstärke  $I$  und der elektrischen Spannung  $U$  mit der Gleichung  $R = \frac{U}{I}$  berechnet werden. Notieren Sie die Gleichung zur Berechnung der Gesamtunsicherheit  $\Delta R$  (Maximalfehlerabschätzung) für die gesuchte Funktion  $R$  und berechnen Sie die partiellen Ableitungen.
9. Für den elektrischen Widerstand  $R$  wurde der Wert  $R = 8,2415$  k $\Omega$  experimentell ermittelt. Die Messunsicherheit beträgt  $\Delta R = 0,2381$  k $\Omega$ . Geben Sie das gerundete Endergebnis an und berechnen Sie die relative Messunsicherheit.

## 13 Lösungen

Die folgenden Lösungswege beziehen sich auf die Fragen, die im Fließtext der Versuchsanleitung gestellt wurden:

- (1) Der Erwartungswert  $\mu$  wird durch das arithmetische Mittel abgeschätzt, weil in der Praxis die Messung einer physikalischen Größe nicht unendlich oft wiederholt werden kann.
- (2) Der Mittelwert (arithmetisches Mittel) ist eine Schätzgröße für den Erwartungswert  $\mu$ . Da der Mittelwert nicht genau dem Erwartungswert entspricht, ist seine Abschätzung mit einer zufälligen Messunsicherheit behaftet.
- (3) Kleinst-Statistik:  $\Delta h_{\text{zuf}} = \frac{h_{\text{max}} - h_{\text{min}}}{2} = \frac{23,45 \text{ cm} - 23,39 \text{ cm}}{2} = 0,03 \text{ cm}$
- (4) Ableseunsicherheit bei analogen Messgeräten:  $\Delta x_{\text{zuf}} = \frac{1}{2} \cdot 0,5 \text{ mm} = 0,25 \text{ mm}$
- (5) Ableseunsicherheit bei digitalen Messgeräten: Die letzte Stelle, die das digitale Messgerät angibt, ist die dritte Nachkommastelle. Hieraus folgt:  $\Delta U_{\text{zuf}} = 1 \text{ Digit} = 0,001 \text{ V}$
- (6) Die Herstellerangabe lautet (0,3 % des Wertes + 1 Digit). Der Messwert beträgt  $U = 8,57 \text{ V}$ . Für die systematische Messunsicherheit ergibt sich folgendes:

$$U_{\text{sys}} = 0,003 \cdot 8,57 \text{ V} + 0,01 \text{ V}$$

$$U_{\text{sys}} = 0,02571 \text{ V} + 0,01 \text{ V} = 0,03571 \text{ V}$$

- (7) Gesamtunsicherheit der Radialbeschleunigung  $a$ :

$$\Delta a = \left| \frac{\partial a}{\partial T} \right| \cdot \Delta T + \left| \frac{\partial a}{\partial r} \right| \cdot \Delta r$$

$$\Delta a = \left| \frac{-8\pi^2 \cdot r}{T^3} \right| \cdot \Delta T + \left| \frac{4\pi^2}{T^2} \right| \cdot \Delta r = \left( \frac{8\pi^2 \cdot r}{T^3} \right) \cdot \Delta T + \left( \frac{4\pi^2}{T^2} \right) \cdot \Delta r$$

Die partiellen Ableitungen wurden wie folgt berechnet:

$$\frac{\partial a}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2} \right) = \frac{\partial}{\partial T} (4\pi^2 \cdot r \cdot T^{-2}) = -8\pi^2 \cdot r \cdot T^{-3} = \frac{-8\pi^2 \cdot r}{T^3}$$

$$\frac{\partial a}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2} \right) = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

- |                            |                                   |
|----------------------------|-----------------------------------|
| (8) Ergebniszahl:          | 9,8235                            |
| Messunsicherheit:          | 0,0134                            |
| Messunsicherheit gerundet: | 0,013 (zwei signifikante Stellen) |
| Ergebniszahl gerundet:     | 9,824                             |

|              |  |
|--------------|--|
| Endergebnis: | <u><u><math>(9,824 \pm 0,013) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}</math></u></u> |
|--------------|--|

## 14 Literatur

- Bornath, T.; Walter, G. (2023): Messdatenauswertung im Physikalischen Praktikum. Messunsicherheiten. Berlin: Springer Spektrum
- Deutsches Institut für Normung (1992): Zahlenangaben. DIN 1333. Berlin: Beuth Verlag GmbH
- Gränicher, W. H. (1996): Messung beendet, was nun? Zürich: vdf, Hochschul-Verlag an der ETH Zürich
- Ilberg, W.; Krötzsch, M.; Geschke, D. (1994): Physikalisches Praktikum für Anfänger. Leipzig, Stuttgart: Teubner-Verlag
- Joachim Herz Stiftung (Hrsg.) (2024): Mechanische Schwingungen. Fadenpendel. <https://www.leifiphysik.de/mechanik/mechanische-schwingungen/grundwissen/fadenpendel> [19.11.2024]
- Kohlrausch, F. (1996): Praktische Physik. Band 3: Tabellen. Stuttgart: Teubner-Verlag
- Lichten, W.; Meschede, D. (1988): Skriptum Fehlerrechnung. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag
- Möhrke, P.; Runge, B.-U. (2020): Arbeiten mit Messdaten. Eine praktische Kurzeinführung nach GUM. Berlin: Springer Spektrum
- Profos, P. (1992): Handbuch der industriellen Messtechnik. München, Wien: Oldenbourg-Verlag
- Röder, F.; Schwierz, R. (2022): Einführung in das Physikalische Praktikum. Dresden: Skriptum an der TU Dresden
- Täubert, P. (1987): Abschätzung der Genauigkeit von Messergebnissen. Berlin: Technik-Verlag
- Topping, J. (1975): Fehlerrechnung: eine Einführung für Naturwissenschaftler. Weinheim: Physik-Verlag
- Walcher, W. (1989): Praktikum der Physik. Stuttgart: Teubner-Verlag
- Waldi, R. (1996): Statistik für's Physik-Praktikum. Dresden: Skriptum der TU Dresden
- Weber, H. (1992): Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Ingenieure. Stuttgart: Teubner Verlag