



**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DRESDEN**

Fakultät Physik

Physikalisches Grundpraktikum

Versuch: **FK**

Aktualisiert: am 02.05.2022

Federkonstante (Nebenfach)

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	2
1.1 Grundbegriffe der Bewegungslehre (Kinematik)	2
1.2 Das Newtonsche Grundgesetz der Mechanik - die Bewegungsgleichung	2
1.3 Lineare, ungedämpfte Schwingungen	3
2 Methode der linearen Regression	4
2.1 Grafischer Ausgleich	4
2.2 Grafische Ermittlung der Messunsicherheiten	5
Fragen	10
Literatur	10

Versuchsziel

Neben der Aufnahme einer einfachen Messreihe besteht das Versuchsziel darin, die lineare Regression einschließlich der Bestimmung der Messunsicherheiten als wichtige Auswertemethode ausführlich kennenzulernen.

Aufgabenstellung

Bestimmen Sie die Federkonstante k einer Feder mittels dynamischer Methode. Messen Sie dazu die Periodendauer T der Federschwingung als Funktion der Masse m . Werten Sie Ihre Messreihe in der folgende Weise aus:

1. Stellen Sie Ihre Messwerte in einem geeigneten Diagramm grafisch dar. Führen Sie einen Geradenausgleich grafisch durch und bestimmen Sie aus dem Anstieg die Federkonstante k . Ermitteln Sie ebenfalls grafisch die Messunsicherheit der gesuchten Größe.
2. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der „naiven“ Berechnung des Mittelwertes aus den Werten der Federkonstante, die sich aus den jeweiligen Einzelmessungen ergeben.
3. Diskutieren Sie neben dem Endergebnis auch das Absolutglied und den Anstieg der Ausgleichsgeraden.

1 Grundlagen

1.1 Grundbegriffe der Bewegungslehre (Kinematik)

Die Bewegung einer Punktmasse auf einer Geraden (z.B. x -Richtung) wird durch die **Ort-Zeit-Funktion** $x(t)$ vollständig beschrieben. Für den Fall einer Schwingung beschreibt $x(t)$ beispielsweise die momentane Auslenkung der schwingenden Punktmasse. Aus dieser Funktion lässt sich zu jedem Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit v_x und die momentane Beschleunigung a_x bestimmen. Es gilt:

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \quad (1)$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} = \dot{v}_x(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \ddot{x}(t) \quad (2)$$

Im weiteren Verlauf verwenden wir die Punkt-Notation zur Kennzeichnung von Ableitungen. Die Geschwindigkeit lässt sich als Bewegungszustand auffassen und die Beschleunigung gibt Aufschluss über die Änderung des Bewegungszustandes. Letztere ist entscheidend für die Frage nach der Ursache von Bewegungsabläufen, wie im nächsten Unterabschnitt deutlich wird.

1.2 Das Newtonsche Grundgesetz der Mechanik - die Bewegungsgleichung

Der Bewegungszustand ändert sich durch das Einwirken äußerer Kräfte. Für die eindimensionale Bewegung gilt das Newtonsche Grundgesetz in der folgenden Form:

$$F_x = ma_x = m\ddot{x}. \quad (3)$$

Diese Gleichung verknüpft Ursache mit Wirkung, d.h. auf der linken Seite steht als Ursache die von außen auf den Massenpunkt einwirkende Kraft F_x und auf der rechten Seite die erfahrene Beschleu-

nigung \ddot{x} als entsprechende Wirkung, die in ihrem Ausmaß von der Trägheit des Massenpunktes, also seiner Masse m , abhängt.

Wirkt keine äußere Kraft, so ergibt sich auch keine Beschleunigung - der Bewegungszustand ändert sich nicht und die Geschwindigkeit bleibt demzufolge konstant. Für den vorliegenden Versuch sind allerdings Schwingungsbewegungen von Interesse, also solche mit periodisch sich ändernden Bewegungszuständen, die durch äußere, stets der Bewegung entgegengerichtete Kräfte zustandekommen. Im folgenden Abschnitt wollen wir die Bewegungsgleichung für eine Schwingungsbewegung aufstellen und durch deren Lösung die Ort-Zeit-Funktion bestimmen.

1.3 Lineare, ungedämpfte Schwingungen

Wirkt auf einen Körper eine Kraft, die proportional zu seiner Auslenkung aus der Ruhelage ist und entgegen der Auslenkung wirkt (rücktreibende Kraft), so schwingt der Körper harmonisch. Als einfaches Modell betrachten wir den Federschwinger (Abb. 1).

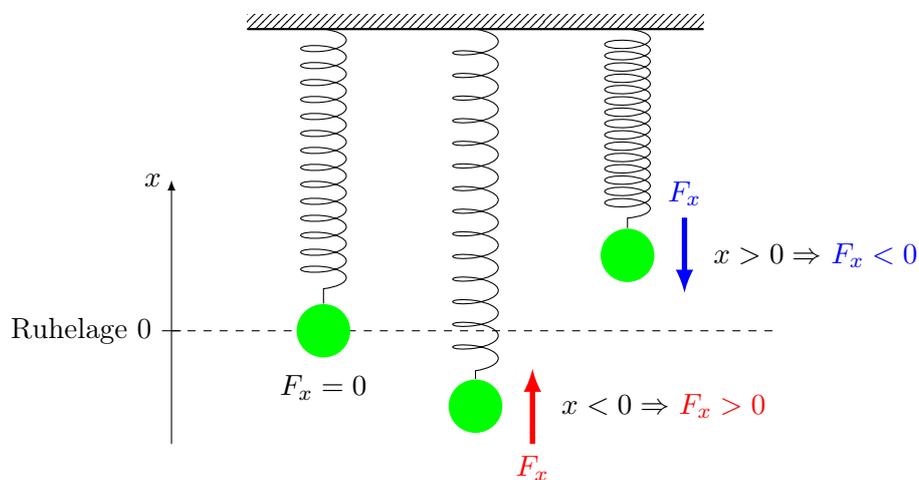


Abb. 1: Modell des Federschwingers mit der Federkonstante k : Rücktreibende Kraft F_x in Abhängigkeit von der momentanen Auslenkung $x(t)$.

Als äußere Kraft F_x , die von der Auslenkung x des Federschwingers mit der Federkonstanten k abhängt, gilt (bei nicht zu großen Dehnungen) bekanntlich:

$$F_x = -kx. \tag{4}$$

Wie aus Abbildung 1 hervorgeht, ist die Kraft der Auslenkung stets entgegengerichtet und erfordert deshalb ein Minuszeichen. Einsetzen in das Newtonsche Grundgesetz (3) ergibt:

$$F = m\ddot{x} = -kx \tag{5}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{6}$$

Es handelt sich um eine sogenannte gewöhnliche lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung, die sich durch Integration, wie eventuell durch (1, 2) suggeriert, leider nicht lösen lässt. Da die Ort-Zeit-Funktion eine harmonische Schwingung beschreiben muss, wird mit etwas Intuition klar, dass sie im Grunde die folgende Form annimmt:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0). \tag{7}$$

Hierbei stellt x_0 die Amplitude (maximale Auslenkung) und θ_0 den Phasenwinkel, der die momentane Auslenkung zur Zeit $t = 0$ bestimmt, dar. Diese beiden Parameter sind frei wählbar und werden durch zwei Anfangsbedingungen (z.B. für Ort und Geschwindigkeit) festgelegt. Da es sich um eine Differenzialgleichung zweiter Ordnung handelt, sind es genau zwei freie Parameter. Die Kreisfrequenz ω_0 bzw. die Periodendauer T_0 ist hingegen nicht frei wählbar, sondern ist durch die Physik des Schwingers gegeben:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{8}$$

Von der Gültigkeit dieser Lösung kann man sich schnell durch Einsetzen von (7) in (6) überzeugen.

2 Methode der linearen Regression

Bei Wiederholungsmessungen unter identischen Bedingungen ist der Mittelwert aller Messwerte die geeignete Größe, welche mit allen statistischen Schwankungen am besten verträglich ist. Anders ausgedrückt gleicht der Mittelwert die statistischen Abweichungen optimal aus.

Eine ganz ähnliche Frage stellt sich nun bei der Messung von zwei Größen, wobei eine in bestimmter Weise variiert wird (in diesem Versuch ist das die Masse). Zeigt die Messung, dass es einen Zusammenhang gibt, stellt sich die Frage welche Funktion diesen optimal beschreibt. Diese Funktion wird ermittelt mit dem Ziel, die statistischen Abweichungen der Messpunkte zu den entsprechenden Funktionswerten zu minimieren. In Analogie zum Mittelwert kommt es auch hier zum bestmöglichen Ausgleich aller statistischen Abweichungen. Daher spricht man auch von Ausgleichsrechnung oder Ausgleichskurven/-geraden.

Das Verfahren der Ausgleichsrechnung wird oft auch als Regression bezeichnet. Dieser Begriff bezieht sich darauf, dass die Gesamtheit einer Messreihe bestehend aus einer Vielzahl von Messpunkten auf wenige Parameter im Rahmen eines Modells zurückgeführt wird (Datenreduktion). Die Methode der linearen Regression soll bei diesem Versuch auf grafischem Weg durchgeführt werden mit dem Ziel, die Parameter der Ausgleichsgeraden sowie deren maximale Messunsicherheiten zu bestimmen. Im Physikpraktikum für Studierende mit Physik im Nebenfach beschränken wir uns auf den linearen Ausgleich, was bei nichtlinearen Zusammenhängen nur bei möglicher Linearisierung anwendbar ist:

Messwerte	nichtlinear	\Rightarrow	linearisiert	linearer Ausgleich
(m_i, T_i)	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	\Rightarrow	$T^2 = 4\pi^2\frac{m}{k}$	(m_i, T_i^2)
(T_i, p_i)	$p = p_0 \exp\left(\frac{\alpha}{T}\right)$	\Rightarrow	$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{\alpha}{T}$	$\left(\frac{1}{T_i}, \ln\left(\frac{p_i}{p_0}\right)\right)$
(β_i, α_i)	$\alpha = \arcsin(n \sin \beta)$	\Rightarrow	$\sin(\alpha) = n \sin \beta$	$(\sin(\beta_i), \sin(\alpha_i))$

Tabelle 1: Beispiele zur Linearisierung von nichtlinearen Zusammenhängen.

2.1 Grafischer Ausgleich

Wir betrachten die folgende Messreihe

x	Δx	y	Δy
x_1	Δx_1	y_1	Δy_1
x_2	Δx_2	y_2	Δy_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
x_n	Δx_n	y_n	Δy_n

und suchen die Ausgleichsgerade $y = f(x) = a + bx$, welche den gemessenen Zusammenhang zwischen den Messgrößen x und y optimal beschreibt. Weiterhin sind die Unsicherheiten des Anstiegs Δb und des absoluten Glieds Δa gesucht, die sich aus den Abweichungen der Messpunkte von der Ausgleichsgerade ergeben.

Vorgehensweise:

1. Tragen Sie die Messwerte in ein Diagramm mit geeigneter Achseneinteilung ein. Diese Einteilung sollte so gewählt werden, dass die Koordinaten der Messpunkte den gesamten Bereich beider Achsen füllen. Nehmen Sie bei nicht-linearen Zusammenhängen sofern möglich eine Linearisierung vor.
2. Bestimmen Sie für jeden Messpunkt die Gesamtunsicherheit in x - und y -Richtung und tragen Sie diese als Fehlerbalken in Ihr Diagramm ein.
3. Nach Augenmaß wird eine Ausgleichsgerade durch die Messpunkte gelegt, sodass in etwa die Gesamtheit der (quadratischen) Abweichungen zwischen den Messpunkten und der Geraden minimal ist - bei einer gut gewählten Skalierung, sollte der Winkel der Gerade mit der Abszisse zwischen 30° und 60° betragen. Sind die Messunsicherheiten in jedem Messpunkt gleich groß, so sollten sich gleich viele Messwerte ober- und unterhalb der Ausgleichsgerade befinden.

Dies entspricht analog der Bildung des Mittelwertes aus einer Messreihe von Wiederholungsmessungen. Sollten die Unsicherheiten in den Messpunkten unterschiedlich sein, so tragen die kleineren Unsicherheiten mit einem stärkeren Gewicht bei. Beachten Sie weiterhin, dass die Ausgleichsgerade nicht immer zwingend durch Null gehen muss.

4. Zeichnen Sie ein möglichst großes Anstiegsdreieck ein und bestimmen Sie den Anstieg sowie das Absolutglied der Ausgleichsgeraden. Kennzeichnen Sie die abgelesenen Werte.

2.2 Grafische Ermittlung der Messunsicherheiten

Die Unsicherheiten des Anstieges und des Absolutgliedes ergeben sich aus der Abweichung der Messpunkte von der Ausgleichsgerade. Das Vorgehen besteht nun darin, den Streubereich in Form eines Unsicherheitsschlauchs, der die Ausgleichsgerade umgibt, zu bestimmen und darin Geraden mit maximal und minimal möglichen Anstiegen (b_{\max} , b_{\min}) einzupassen. Die Gesamtmessunsicherheiten für die Parameter der Ausgleichsgeraden ergeben sich näherungsweise wie folgt:

$$\Delta a \approx \frac{|a_{\max} - a_{\min}|}{2}$$

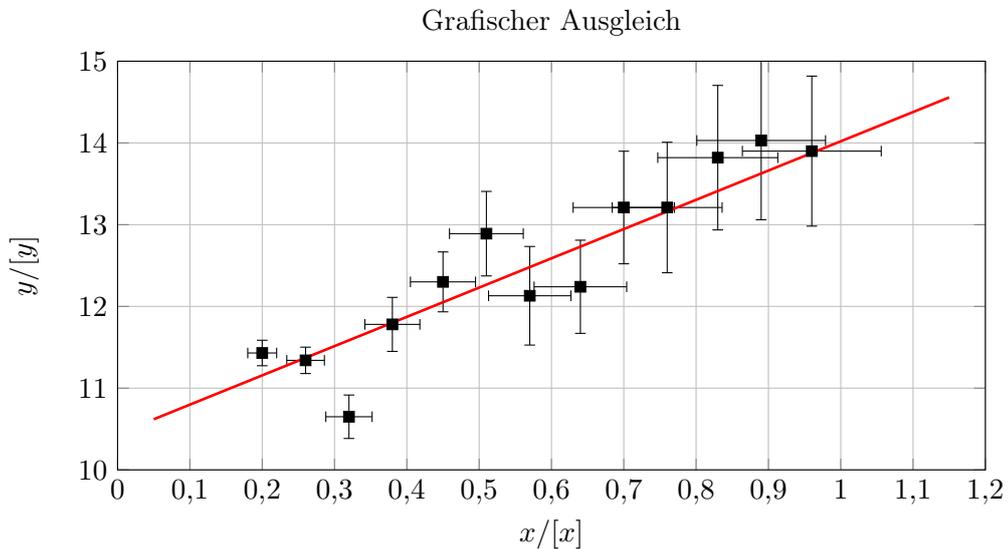
$$\Delta b \approx \frac{b_{\max} - b_{\min}}{2}$$

Ist die Messunsicherheit in jedem Messpunkt bekannt, kann i.d.R. die Konstruktion des Unsicherheitsschlauchs durchgeführt werden. Dies ist im Folgenden schrittweise dargestellt:

Für jeden Messpunkt trägt man ausgehend von der Ausgleichsgerade im Abstand von einer Fehlerbalkenlänge den oberen und unteren Stützpunkt (blaue Kreuze) auf und gleicht mögliche Variationen, die sich aus der Schätzung der Unsicherheiten ergeben können, durch Geraden aus (gestrichelt).

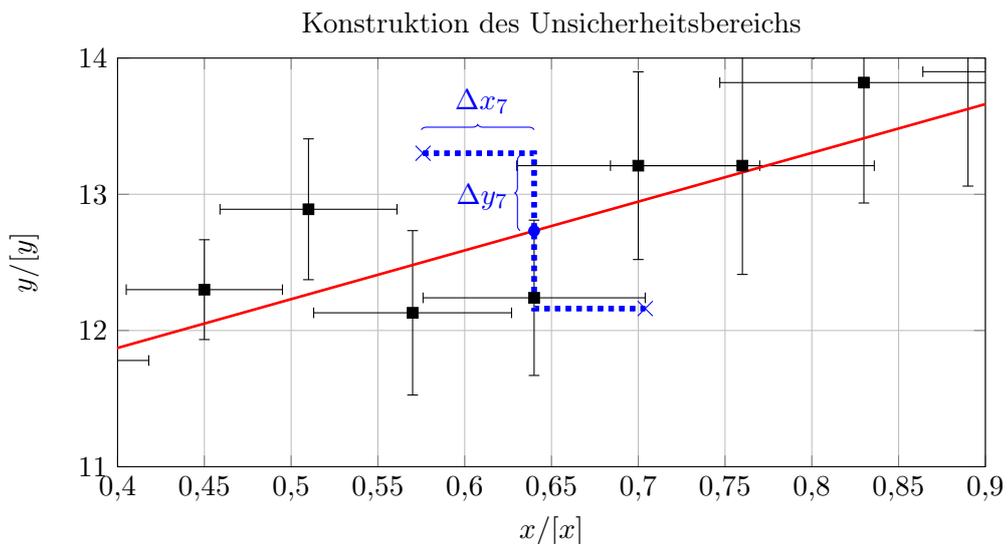
Sind die Grenzgeraden bekannt, können nun Geraden des maximalen und minimalen Anstiegs eingepasst werden.

Schritt 1: Durchführen des Geradenausgleichs

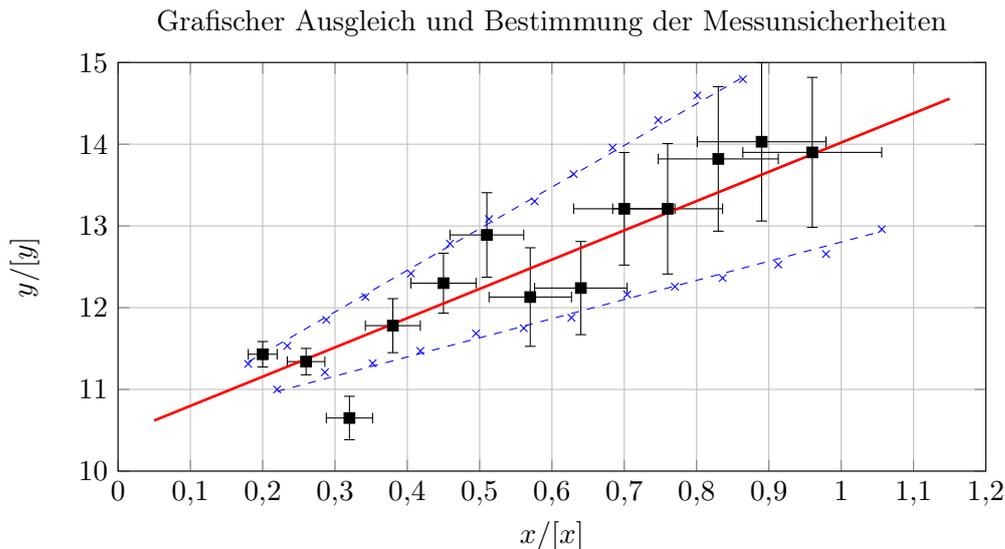


Schritt 2: Konstruktion des Unsicherheitsbereichs

Anhand des 7. Messpunktes (x_7, y_7) ist exemplarisch gezeigt, dass ausgehend von der Ausgleichsgerade (blauer Punkt) in vertikalem Abstand von Δy_7 und in horizontalem Abstand Δx_7 ein unterer bzw. oberer Stützpunkt symmetrisch aufgetragen wird (blaue Kreuze). Bei negativem Anstieg ist das Vorgehen analog.



Dies wird nun für eine hinreichende Anzahl von Messpunkten durchgeführt (blaue Kreuze) und im oberen sowie unteren Bereich jeweils mit einer Gerade ausgleichs (blau gestrichelt).



In dem sich ergebenden Unsicherheitsbereich sollten 95% aller Messwerte (ohne Fehlerbalken) liegen. Im vorliegenden Beispiel befindet sich einer von 13 Messwerten außerhalb. Aus Tab. 2 ist zu entnehmen, dass dies mit einer Wahrscheinlichkeit von 35,1% statistisch möglich ist. Wahrscheinlicher (51,3%) wäre es jedoch, wenn alle Messwerte in diesem Bereich liegen. Eine Wiederholungsmessung des betreffenden Messpunktes sollte daher eine tendenziell kleinere Abweichung liefern. Ist dies nicht der Fall, handelt es sich mit hoher Wahrscheinlichkeit um einen Ausreißer, der als solcher kenntlich gemacht werden muss und nicht in der Auswertung berücksichtigt werden darf. Die genaueren Umstände eines solchen Ausreißers sollten in der Diskussion erklärt werden.

Gesamtzahl der Messwerte	Anzahl der Messwerte außerhalb 2σ				
	0	1	2	3	4
1	0,95000	0,05000			
2	0,90250	0,09500	0,00250		
3	0,85738	0,13538	0,00713	0,00013	
4	0,81451	0,17148	0,01354	0,00048	0,00001
5	0,77378	0,20363	0,02143	0,00113	0,00003
6	0,73509	0,23213	0,03054	0,00214	0,00008
7	0,69834	0,25728	0,04062	0,00356	0,00019
8	0,66342	0,27933	0,05146	0,00542	0,00036
9	0,63025	0,29854	0,06285	0,00772	0,00061
10	0,59874	0,31512	0,07463	0,01048	0,00096
11	0,56880	0,32931	0,08666	0,01368	0,00144
12	0,54036	0,34128	0,09879	0,01733	0,00205
13	0,51334	0,35123	0,11092	0,02140	0,00282
15	0,46329	0,36576	0,13475	0,03073	0,00485
17	0,41812	0,37411	0,15752	0,04145	0,00764
20	0,35849	0,37735	0,18868	0,05958	0,01333
30	0,21464	0,33890	0,25864	0,12705	0,04514
50	0,07694	0,20249	0,26110	0,21987	0,13598
100	0,00592	0,03116	0,08118	0,13958	0,17814

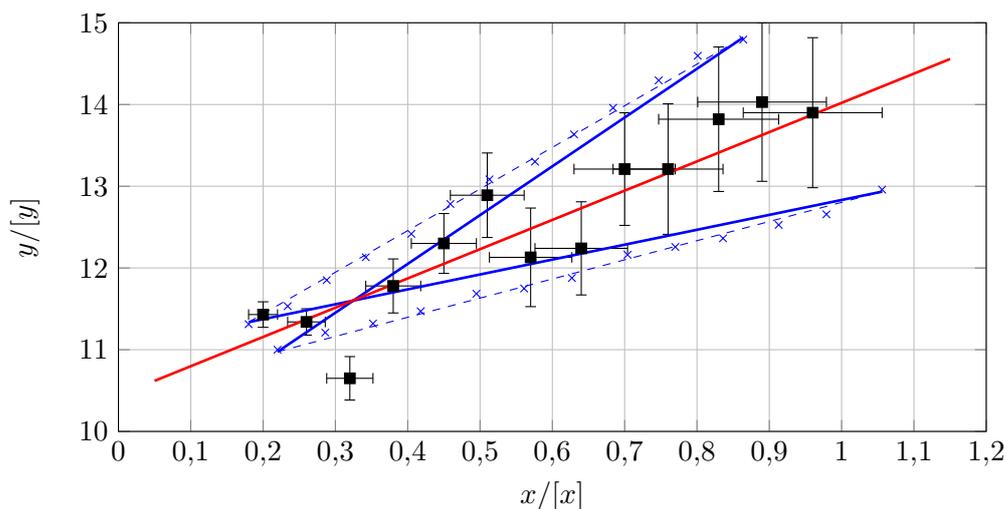
Tabelle 2: Wahrscheinlichkeiten (Binomialverteilung), dass eine bestimmte Anzahl von Messpunkten außerhalb von 2σ liegt.

Bestimmung der Maximal- und Minimalgeraden

In dem oben konstruierten Unsicherheitsbereich sollen nun die Geraden mit maximal und minimal möglichen Anstiegen eingepasst werden. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

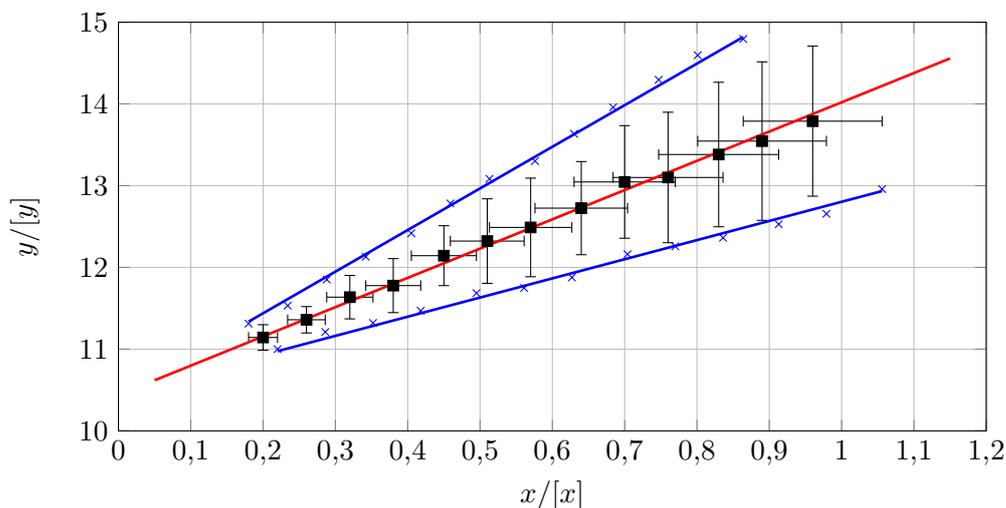
1. Messwerte, die vorwiegend statistisch (regellos) von der Ausgleichsgerade abweichen: Hierbei sind Geraden mit den tatsächlich maximalen und minimalen Anstiegen zu verwenden (blau, durchgezogen).

Grafischer Ausgleich und Bestimmung der Messunsicherheiten



2. Bei eher systematisch dominierten Messabweichungen ist eine regellose Streuung um die Ausgleichsgerade i.d.R. nicht erkennbar. In diesem Fall sind die den Unsicherheitsbereich begrenzenden Geraden zu verwenden (blau, durchgezogen).

Grafischer Ausgleich und Bestimmung der Messunsicherheiten



Sollte nicht offensichtlich sein, ob statistische oder systematische Abweichungen überwiegen, ist grundsätzlich der erste Fall anzuwenden.

Umgang mit wenigen Messwerten

Mitunter kann es auch passieren, dass nur wenige Wertepaare (<10) verfügbar sind, die einer deutlichen Streuung um die Ausgleichsgerade unterworfen sind (Abb. 2) und selbst schwankende Mes-

sunsicherheiten aufweisen. Am ehesten lässt sich eine Ausgleichsgerade unter Berücksichtigung der Messunsicherheiten finden. Schwieriger gestaltet sich die Frage nach den Messunsicherheiten der Parameter der Ausgleichsgerade selbst. Die stark schwankenden Messunsicherheiten, erlauben keinen linearen Unsicherheits Schlauch, sodass im Sinne einer Maximalunsicherheit lediglich durch Parallelverschiebung der Bereich erfasst werden sollte, der alle Messpunkte enthält. Dies führt natürlich zu einer Überabschätzung der Messunsicherheiten der Regressionsparameter, die zwingend hinsichtlich Inkonsistenzen zu diskutieren ist (siehe unten).

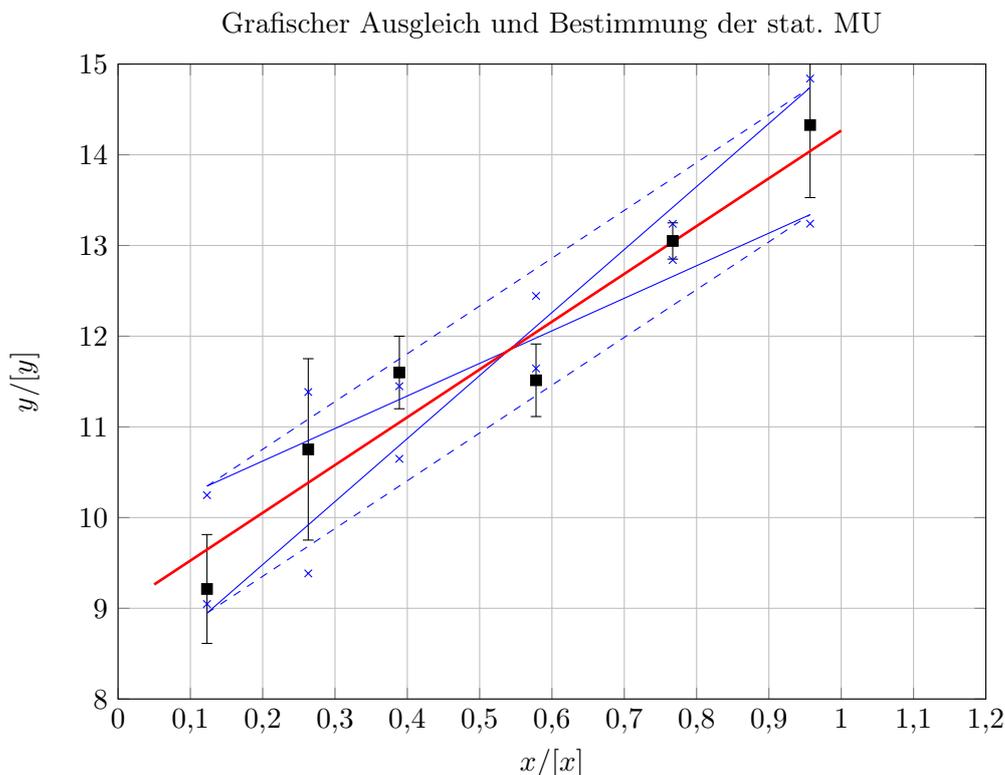


Abb. 2: Durchführung eines grafischen Ausgleiches und der Ermittlung des Messunsicherheit im Anstieg und Absolutglied (wenige Messwerte, streuende Messunsicherheiten): Festlegung der Ausgleichsgerade (rot), Konstruktion des Unsicherheitsbereichs (gestrichelt) und Ermittlung der Maximal- und Minimalgeraden (blau).

Offenbar liegen in diesem Fall 2 von 6 Messwerten außerhalb von 2σ (ursprüngliche Fehlerbalken); dies ist statistisch mit einer Wahrscheinlichkeit (bei $p = 0,05$) von nur 3,1% möglich. Aus diesem Grund müssen die betreffenden Messpunkte unbedingt nachgemessen werden.

Fragen

1. Zeigen Sie, dass die Ort-Zeit-Funktion (7) eine Lösung der Differentialgleichung (6) ist.
2. Die Messgrößen x und y stehen in folgendem exponentiellen Zusammenhang zueinander:

$$y = a \cdot \exp\left(-\frac{x^3}{b}\right).$$

Wie kann man die Parameter a und b mittels linearer Regression bestimmen?

3. Die Messgrößen x und y aus Frage 1 sind mit jeweils mit einer konstanten Unsicherheit von Δx und Δy behaftet. Bestimmen Sie Länge der für die lineare Regression notwendigen Fehlerbalken.
4. Nehmen wir an, die Ausgleichsgerade sollte theoretisch durch den Koordinatenursprung verlaufen. Die Ausgleichsrechnung Ihrer Messergebnisse liefert allerdings eine Gerade mit einem von null verschiedenen Absolutglied. Wie interpretieren Sie dieses Resultat?
5. Sie planen die Aufnahme einer Messreihe. Wie erhalten Sie möglichst geringe Unsicherheiten der Regressionsparameter?
6. Die Unsicherheiten der Messpunkte sind für jeden Messpunkt gleich und die Streuung der Messpunkte um die Ausgleichsgerade ist gering. Wie bestimmen Sie in diesem Fall die Unsicherheiten für Anstieg und Absolutglied?
7. Bei einer Messreihe von 17 Messwertepaaren liegen zwei Messwerte außerhalb des 2σ -Bereichs. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine rein statistische Abweichung?

Literatur

- [1] W. Kamke, *Umgang mit experimentellen Daten, insbesondere Fehleranalyse im Physikalischen Anfängerpraktikum*, T. Lindemann Offenbach, Freiburg 2010
- [2] W. H. Gränicher, *Messung beendet, was nun?*, vdf, Hochschulverlag an der ETH Zürich, Zürich 1996
- [3] W. Walcher, *Praktikum der Physik*, Teubner-Verlag, Stuttgart 1989