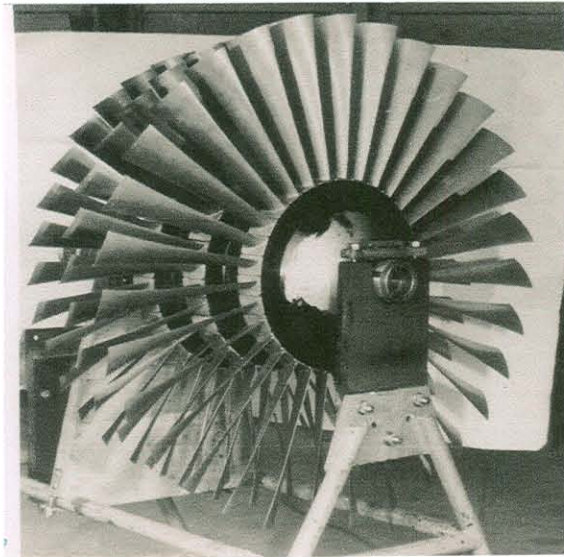


Die Entwicklung der Axialverdichter  
für Gasturbinen – Flugtriebwerke  
in der ehemaligen DDR.

Theorie/Berechnung/Versuchsergebnisse

Von Gerhard Mäcker





## Vorwort.

Die vorliegenden Ausführungen zur Problematik der Axialverdichter entstanden auf Grund mehrfacher Anregungen die im VEB Entwicklungsbau Pirna erworbenen Erfahrungen bei der Entwicklung der theoretischen Grundlagen zur Auslegung hochbelasteter Axialverdichter und deren praktischen Erprobung auf den Verdichterprüfstand der allgemeinen Öffentlichkeit zugänglich zu machen.

Ausgangspunkt für die theoretische Bearbeitung der Verdichterproblematik waren die mit der Rückführung der deutschen Triebwerksspezialisten im Jahre 1954 aus der Sowjetunion übergebenen theoretischen Ausarbeitungen.

Da alle aus der Sowjetunion zurückgekehrten Verdichterspezialisten ihren Heimatsitz in den alten Bundesländern gefunden hatten, mussten die Verdichterprobleme von zwei Seiteneinsteigern aus der ehemaligen Forschungs- und Versuchsanstalt für Strömungsmaschinen Dresden, zu denen auch der Autor zählt, bearbeitet werden. Dies hatte zur Folge, dass eine Inventur der vorhandenen theoretischen Unterlagen für die weitere theoretische Bearbeitung der Problematik notwendig war.

Auf dem Gebiet des Axialverdichterbaues sind hier besonders die Arbeiten zur Kinematik in den Verdichterstufen /33/ und des Schaufelgitterberechnungsverfahrens /58/ zu nennen. Zu diesen Zeitpunkt befand sich die Axialverdichterentwicklung noch in der Pionierphase und einem schnellen Entwicklungstempo.

Das bemerkenswerte und erprobte Näherungsverfahren zur Berechnung von dreidimensionalen Gitterströmungen vor Schröder konnte übernommen werden. Für die Berechnung der axialen Geschwindigkeitsverteilungen vor und hinter den Laufgittern waren zur Weiterentwicklung hochbelasteter Axialverdichter Erweiterungen notwendig. Da sich mit der Verdichtung eines Gases in einer Verdichterstufe der Austrittsquerschnitt gegenüber den Eintrittsquerschnitt verringert ist eine einfache strömungstechnische Betrachtung auf koaxialen Zylinderschnitten in den Stufen nicht mehr relevant. Der Strömungsverlauf des Gases folgt den sogenannten Pseudostromlinien was bei Einhaltung der Strömungsstabilität nach dem Prinzip von Hamilton zu den bekannten Nabentotwassergebieten führen kann. Gefährdet sind hierbei insbesondere die ersten Stufen hochbelasteter Axialverdichter. Nähere Einzelheiten vermitteln die Abschnitte 3.3 und 5.1. Für die Anwendung einer Überschallanströmung der Laufgitter machte sich weiterhin bei Einhaltung des Stabilitätskriteriums an der Nabe einer Stufe die Einführung einer über den Stufenradius linear veränderliche Energiezufuhr an das Gas im Laufgitter in den Gleichungen für die Axialgeschwindigkeitsverteilung notwendig.

Durch den Zähigkeitseinfluss des zu verdichtenden Gases treten an den äußeren und inneren Radien im Strömungskanal an ein- und mehrstufigen Axialverdichtern Grenzschichten auf, die ein dem theoretischen Axialgeschwindigkeitsverlauf ein Geschwindigkeitsprofil überlagern, das mit dem sogenannten Rohrreibungsprofil vergleichbar ist. Dieses Profil tritt immer unabhängig davon auf, ob die einzelnen Stufen mit oder ohne das Überlagerungsprofil ausgelegt sind. Stufen ohne Berücksichtigung des Überlagerungsprofils ergeben bis auf kleine Bereiche an den Innen- und Außenradien eine gegenüber den Sollwerten verminderte Energieumsetzung in den Laufgittern die durch den Minderleistungsfaktor von Howell ausgeglichen werden können. Die Betriebspunkte der Laufgitter liegen dann abweichend von der aerodynamisch stoßfreien Anströmung bei größeren Gitterverlusten und haben eine Einengung des stabilen Betriebsbereiches eines Verdichters zur Folge. Bei Anwendung der Überlagerungsfunktion kann auf den Minderleistungsfaktor verzichtet werden und die Gitterarbeitspunkte liegen zumindest in der Nähe der aerodynamisch stoßfreien Anströmung der Profile,

Damit erhält man auch einen optimalen Betriebsbereich eines Verdichters.

Schröder hat sich für die kinematische Auslegung von Verdichterstufen den Drallverteilungsexponenten  $q$  eingeführt und sich damit von der separaten Betrachtung der kinematischen Spezialfälle der konstanten kinematischen Reaktion, der konstanten Drallverteilung und des Potentialwirbels gelöst. Die Frage nach den optimal anzuwendenden Drallverteilungsexponenten war dabei offen geblieben. Diese Frage wurde mit den Untersuchungen über Stufen optimalen Wirkungsgrades in Abschnitt 5.6.2 und den Grenzleistungsstufen in Abschnitt 5.6.2 beantwortet.

Für Grenzleistungsstufen wurden Richtwerte über die zulässigen Anströmmachzahlen an den Außen- und Innenradien der Laufgitter zugrunde gelegt wobei eine möglichst große Umfangsgeschwindigkeit der Laufgitter angestrebt wird. Grenzleistungsstufen beeinflussen somit stark die Leistungsfähigkeit der nachfolgenden Verdichterstufen haben aber einen etwas kleineren Wirkungsgrad als Stufen optimalen Wirkungsgrades deren optimale Kenndaten sich aus den Betrachtungen zur möglichen Kinematik unter Einbeziehung der Stufenverluste ergeben.

Die Profilgitterberechnungsverfahren nach den Singularitätenverfahren von Schröder und Schlichting erfolgte etwa zeitgleich.

Das Verfahren von Schröder /58/ benutzte für die Ermittlung der induzierten Geschwindigkeiten und somit für die Skelettlinienwölbung der Profile die Halbkreisförmige Zirkulationsverteilung und für den Anstellwinkel der Profile die Zirkulationsverteilung der angestellten ebenen Platte nach Birnbaum /62/ die beide prozentual kombiniert bei der Profilauslegung angewendet wurden. Die halbkreisförmige Zirkulationsverteilung am Profil ergibt keine mathematisch definierbare Profilskelettlinie obwohl Schröder eine parabolische Skelettlinie anwendete. Dies bedingt jedoch, dass die jeweils ermittelten Skelettlinien der Profile zu kleine maximale Skelettlinienwölbungen aufweisen. Die Verwendung der Zirkulationsverteilung der angestellten ebenen Platte bedeutet eine Verschiebung des Arbeitspunktes von der aerodynamisch stoßfreien Anströmung der Profile zu einen Arbeitspunkt mit größeren Profilgitterverlusten mit einer Verschlechterung des Stufenarbeitsbereiches. Für die Profilform verwendete Schröder eine feststehende Quell-Senkenverteilung (siehe S. 286) die eine Profilform mit einer Dickenrücklage von 30% ergibt. Die daraus erhaltenen induzierten Geschwindigkeiten stimmen nur für die zugehörige Profilform und sind für andere Profilformen nicht relevant.

Dem Verfahren von Schlichting liegt eine elliptische Zirkulationsverteilung entlang der Profilschneide zugrunde die auch eine mathematisch definierte parabolische Profilskelettlinie ergibt. Die Verteilung der Singularitäten auf der Profilschneide erfolgt mittels der Glauert'schen Reihe. Mit der Bestimmung einzelner Konstanten ergibt diese Betrachtungsweise eine große Anzahl von Variationsmöglichkeiten bei der Bestimmung der benötigten Profile und es können ganze Profilmfamilien aufgebaut werden.

Diese Gesichtspunkte führten zur Neubearbeitung eines Profilgitter-Berechnungsverfahrens unter Beachtung der einfachen Anwendungsmöglichkeit des Verfahrens von Schröder. Dieses Profilgitter-Berechnungsverfahren ist im Abschnitt 6,3 dargestellt.

Für die Ermittlung von Laufgitter mit Überschallanströmung wurden weiterhin in Abschnitt 2.2 die Zustandsänderung des Gases, in Abschnitt 5.6.4 die Kinematik für Grenzleistungsstufen und in Abschnitt 6.7 Hinweise zur Ermittlung der Profilformen angegeben.

G. Mäcker

Dresden im Dezember 2005

## Inhaltsverzeichnis.

0.	Einleitung	01
1.	Einführung in die Probleme und Grenzen der Axialverdichter	1
2.	Die Zustandsänderung des Gases in einer Verdichterstufe	20
2.1	die Zustandsänderung des Gases bei Unterschallanströmung des Laufgitters.	
2.2	Die Zustandsänderung des Gases bei Überschallanströmung des Laufgitters.	27
2.3	Die Zustandsänderung des Gases in einem mehrstufigen Verdichter.	39
3.	Das Stufenelement.	41
3.1	Die Geschwindigkeiten des Gases im Stufenelement.	41
3.2	Die Energieübertragung im Stufenelement.	42
3.3	Die Stabilität der Strömung im Stufenelement.	43
3.4	Der Wirkungsgrad eines Stufenelementes.	45
3.5	Die Belastung des Stufenelementes:	47
3.6	Temperatur- und Druckverlauf im Absolut- und Relativsystem eines Stufenelementes.	49
3.7	Der statische und kinematische Reaktionsgrad.	53
4.	Die Verluste in der Stufe.	55
4.1	Der Profilverlust.	55
4.2	Der Randverlust.	56
4.3	Der Spaltverlust	59
5.	Die Kinematik im Verdichter.	63
5.1	Die Kinematik in der Stufe eines Axialverdichters.	63
5.2	Näherungsverfahren zur Erfassung der dreidimensionalen Strömungsvorgänge in Axialverdichterstufen nach /33/.	74
5.3	Der Kontinuitätsradius.	91
5.4	Der Einfluss der Zähigkeit des strömenden Gases auf den Axialgeschwindigkeitsverlauf in einer Verdichterstufe.	93
5.5	Der Wirkungsgrad einer Verdichterstufe.	100
5.5.1	Der relative Stufenverlust.	102
5.5.2	Der absolute Stufenverlust.	104
5.6	Zur Wahl der Stufenkinematik.	114
5.6.1	Allgemeine Grundsätze.	114
5.6.2	Die Kinematik für Stufen optimalen Wirkungsgrades.	117
5.6.3	Die Kinematik für Grenzleistungsstufen bei Unterschallanströmung der Laufgitter.	128
5.6.4	Die Kinematik für Grenzleistungsstufen bei Überschallanströmung der Laufgitter.	132
6.	Das Gitterprofil und das Profilgitter.	153
6.1	Allgemeines.	153
6.2	Der Gitterwirkungsgrad und die Wahl des Auslegungspunktes.	156

6.3	Das Gitterprofil.	157
6.3.1	Die kinematischen Strömungsbedingungen.	157
6.3.2	Die induzierten Geschwindigkeiten am Einzelprofil und die Profilkontur.	158
6.3.3	Die induzierten Geschwindigkeiten am Gitterprofil.	172
6.3.4	Die Umrechnung des Geschwindigkeitsvektorendiagramms. eines Stufenelementes von der kompressiblen in die inkompressible Ebene.	184
6.3.5	Ermittlung der Gitterparameter und der Profilkordinaten.	186
6.3.6	Geschwindigkeiten und Druckverlauf auf der Profilkontur und die maximale Profildicke.	191
6.3.7	Die Kräfte am Profil und deren Wirkungen.	197
6.4	Verluste im ebenen Profilgitter.	203
6.4.1	Die Einflüsse auf die Profilverluste beim Verzögerungsgitter	205
6.4.2	Das Verhalten die Profilgitter bei Abweichung von der aerodynamisch stoßfreien Anströmung.	207
6.4.3	Verluste und Grenzen im Vorleitgitter.	208
6.5	Schwerpunkte, Flächen, Trägheitsmomente und Drillmomente der Profile.	211
6.6	Die Gestaltung des Laufgitters unter Berücksichtigung Des Ausgleiches der an den Profilen durch Luft- und Fliehkräfte hervorgerufenen Momente.	217
6.7	Hinweise zur Ermittlung der Profilverformen für die Laufgitter mit Überschallanströmung.	220
7.	Das Betriebsverhalten der Axialverdichter.	224
7.1	Der Einfluss des Ansaugzustandes des zu verdichtenden Gases auf die Arbeitsweise des Axialverdichters.	224
7.2	Die Ermittlung des Verdichter kennfeldes.	225
7.2.1	Eine einfache Kennfeldberechnungsmethode für ein- und mehrstufige Axialverdichter.	226
7.2.2	Zusammenfassung von Stufengruppenkennfeldern zum Verdichter kennfeld.	236
7.2.3	Die Kennfeldberechnung unter Berücksichtigung der Leitgitterberechnung und der Gasabbläsung.	238
7.2.3.1	Der zulässige Gitterstoß.	238
7.2.3.2	Der Gitterverlust.	242
7.2.3.3	Die eigentliche Kennfeldrechnung.	244

8.	Einige Gesichtspunkte zur Konstruktion des Verdichters.	248
8.1	Die Bestimmung des Abblasquerschnittes im Verdichtergehäuse bei Bandabblasing.	248
8.2	Druckmittelpunkt und Drehmoment der Leitgitter bei Verstellung	252
8.3	Der Axialschubausgleich des Verdichterrotors.	253
9.	Schwingungsprobleme bei Axialverdichtern.	259
9.1	Lauf- und Leitschaufelschwingungen.	259
9.1.1	Biegeschwingungen.	259
9.1.2	Torsionsschwingungen.	266
9.1.3	Die Probleme der Einspannelastizität der Schaufeln.	269
9.2	Kritische Drehzahlen des Verdichterrotors.	270
9.3	Gasschwingungen des im Verdichter befindlichen Gasvolumens.	276
10	Einige Erfahrungen bei der Entwicklung von Axialverdichtern.	286
10.1	Theoretische Grundlagen und ihre Weiterentwicklung.	287
10.2	Die wichtigsten an den einzelnen Verdichtertypen Gewonnenen Versuchsergebnisse.	291

Literaturverzeichnis  
Sachwortverzeichnis  
Form- und Rechenblätter  
Anlagen





## Bezeichnungen.

a	(m/s)	Schallgeschwindigkeit	$\beta$	(-)	Korrekturfaktor der Drallströmung
N	(N)	Auftriebskraft	$\beta$	$(^0)$	Winkel der Relativgeschwindigkeit gemessen zur Gitterfront
A	(-)	Konstante			
B	(-)	Konstante	$\gamma(x)$	(-)	auf die Längeneinheit bezogene Zirkulationsverteilung
c	(m/s)	Absolutgeschwindigkeit	$\Gamma$	$(m^2/s)$	Zirkulation
$c_p$	$(J/kg^0K)$	spez. Wärme bei konstantem Druck	$\delta$	(mm)	Grenzschichtdicke
$c_v$	$(J/kg^0K)$	spez. Wärme bei konstantem Volumen	$\delta^*$	(mm)	Verdrängungsdicke
V	$(m^3)$	Volumen	$\delta$	$(^0)$	Minderablenkung
$c_w$	(-)	Widerstandsbeiwert	$\delta$	$(^0)$	Keilwinkel beim schrägen Verdichtungsstoß
$c_\Gamma$	(-)	Zirkulationsbeiwert	$\Delta$	(-)	Differenz zweier Größen
C	(-)	Konstante	$\pi$	(-)	Druckverhältnis
d	(m)	Durchmesser	$\varepsilon$	(-)	Gleitzahl
e	(-)	Euler-Zahl	$\zeta$	(-)	Drehzahlkennzahl
E	(-)	Konstante	$\eta$	(-)	Wirkungsgrad
f	(-)	thermodynamischer Verlustfaktor	$\eta$	(mm)	Durchbiegung
F	$(m^2)$	Fläche	$\vartheta$	(-)	Temperaturverhältnis
g	$(m/s^2)$	Erdbeschleunigung	$\Theta$	$(^0)$	Profilwölbungswinkel
h	(J/kg)	Energieumsetzung	$\Theta$	$(^0)$	Stoßfrontlage des schrägen Verdichtungsstoßes
h	(m)	Schaufelhöhe	$\kappa$	$(^0)$	Profil tangentialenwinkel
i	$(^0)$	Stoßwinkel	$\kappa$	(-)	Isentropenexponent
I(F)	(-)	Imaginärteil einer Funktion	$\kappa$	(-)	Mischungswegkonstante
k	(-)	Koeffizient	$\lambda$	(-)	Rohrreibungszahl
K	(-)	Konstante	$\nu$	(-)	Radienverhältnis
l	(mm)	Profilsehnenlänge	$\nu$	$(s^{-1})$	Frequenz
l	(mm)	Länge	$\nu'$	$(m^2/s)$	kinematische Zähigkeit
$\dot{m}$	(kg/s)	Masseneinheit	$\xi$	(-)	Durchsatzkennzahl
M	(-)	Machzahl	$\xi$	(-)	Druckverlustkennzahl
n	(-)	Exponent	$\rho$	$(kg/m^3)$	Dichte
p	$(N/m^2)$	Druck	$\rho_k$	(-)	kinematischer Reaktionsgrad
P	(N)	Kraft	$\sigma$	(-)	Stossverlustbeiwert
q	(-)	Drallverteilungsexponent	$\tau$	$(N/m^2)$	Schubspannung
q	$(N/m^2)$	Staudruck	$\varphi$	(-)	Lieferzahl
q(x)	(-)	auf die Längeneinheit bezogene Quell-Senkenverteilung	$\varphi$	$(^0)$	Phasenwinkel
r	(m)	Radius	$\Phi$	$(^0)$	Steigungswinkel der theoretischen Stufenkennlinie
R	$(J/kg^0C)$	Gaskonstante	$\psi$	(-)	Druckzahl
R(F)	(-)	Realteil einer Funktion	$\omega$	$(s^{-1})$	Winkelgeschwindigkeit
s	(mm)	Spaltweite	$\Omega$	(-)	Minderleistungsfaktor
t	(mm)	Teilung des Schaufelgitters			
t	(s)	Zeit			
T	$(^0K)$	Temperatur			

## Bezeichnungen

$u_i$ (m/s)	induzierte Geschwindigkeit	$\alpha$ (-)	Korrekturfaktor
$u$ (m/s)	Umfangsgeschwindigkeit	$\alpha$ ( $^\circ$ )	Winkel der Absolutgeschwindigkeit gemessen zur Gitterfront
$U$ (m/s)	Umfang	$v$ (m/s)	induzierte Geschwindigkeit
$V$ (m <sup>3</sup> )	Volumen	$v_s$ (m/s)	Schubspannungsgeschwindigkeit
$v$ (m/s)	Geschwindigkeit	$W$ (N)	Widerstand
$w$ (m/s)	relative Geschwindigkeit	$y$ (-)	Koordinate
$x$ (-)	Koordinate	$\delta/l$ (-)	relative Profilwölbung
$c_r / \left( \frac{t}{l} \right)$ (-)	Gitterbelastungszahl	$d/l$ (-)	maximale relative Profildicke
$t/l$ (-)	Teilungsverhältnis	$x_f / l$ (-)	Wölbungsrücklage
$x_d / l$ (-)	Profildickenrücklage	$v_i = \frac{r_i}{r_a}$ (-)	Nabenverhältnis
$r_N / l$ (-)	bezogener Nasenradius	$1 - \eta_{St}$ (-)	absoluter Stufenverlust
$\frac{1 - \eta_{St}}{\varepsilon}$ (-)	relativer Stufenverlust		

### Indices

0	bezogen auf den Auslegungszustand	1	vor dem Laufgitter
2	hinter dem Laufgitter	a	auf den Außenradius bezogen
ax	Komponente in axialer Richtung	c	bezogen auf die Absolutgeschwindigkeit
E	bezogen auf das Einzelprofil	G	bezogen auf das Gitter
H	Hinterkantendicke	i	inkompressibel
i	bezogen auf den Innenradius	i	induziert
id	ideell	is	isentrop
kor	korrigiert	k	kompressibel
kr	kritisch	m	mittel
max	Maximalwert	min	Minimalwert
opt	Optimalwert	pol	polytrop
P	bezogen auf das Profil	q	bezogen auf die Quell-Senkenbelegung
r	radial	rel	relativ
R	Rotor	s	bezogen auf die Skelettlinie des Profils
st	bezogen auf die Stufe	st	Stoß
St	statisch	Sp	Spalt
th	theoretisch	u	Umfangskomponente
v	Verlust	V	Verdichter
V	bezogen auf die Profilverdichtung	w	bezogen auf die Relativgeschwindigkeit
$\gamma$	bezogen auf die Zirkulationsverteilung	$\infty$	bezogen auf die Stufenebene Unendlich

Manche Bezeichnungen sind mehrmals angegeben haben aber unterschiedliche Bedeutung. Diese Bedeutungen sind aber in den einzelnen Abschnitten klar zu erkennen.

## 1. Einführung in die Probleme und Grenzen der Axialverdichter.

Der vorliegenden Abschnitt soll einen zusammenfassenden Überblick über die wichtigsten Grenzen, Probleme und Hinweise für die Konzipierung von Axialverdichtern und deren Stufen geben, die latent in der Verdichtertheorie enthalten sind, ohne zunächst auf die Theorie einzugehen. Der Leser soll damit auf die Axialverdichterproblematik aufmerksam gemacht werden ohne sich die Zusammenhänge aus der Theorie zeitraubend zusammenstellen zu müssen.

Der Verdichter axialer Bauart hat die Aufgabe eine bestimmte kompressible Gasmasse mit den Druck  $p_0^*$  am Verdichtereintritt auf einen Druck  $p_2^*$  am Verdichteraustritt zu verdichten.

Dabei sind infolge von Grenzbedingungen überwiegend mehrere Verdichterstufen erforderlich. Jede Stufe besteht aus einem rotierenden Laufgitter und einem feststehenden Leitgitter deren Schaufeln aerodynamisch geformte Profile besitzen. Die zu Verdichtung des Gases notwendige Energie wird durch das Laufgitter an das Gas übertragen. Dies führt zu einer Zustandsänderung des Gases die sich in einer Druck- und Temperaturerhöhung sowie einer Volumenverringerng ausdrückt. Die Volumenverringerng führt zu einer Verringerung des Strömungsquerschnittes mit zunehmender Stufenzahl und somit zu einer Verengung des Verdichterströmungskanales. Das Bestreben einen Axialverdichter mit kleinstmöglichen Abmessungen und bestmögliche Wirkungsgrad zu erhalte führt zu einer Aufteilung der Verdichterstufen in die folgenden drei Gruppen:

1. Grenzleistungsstufen
2. Übergangsstufen
3. Stufen besten Wirkungsgrades.

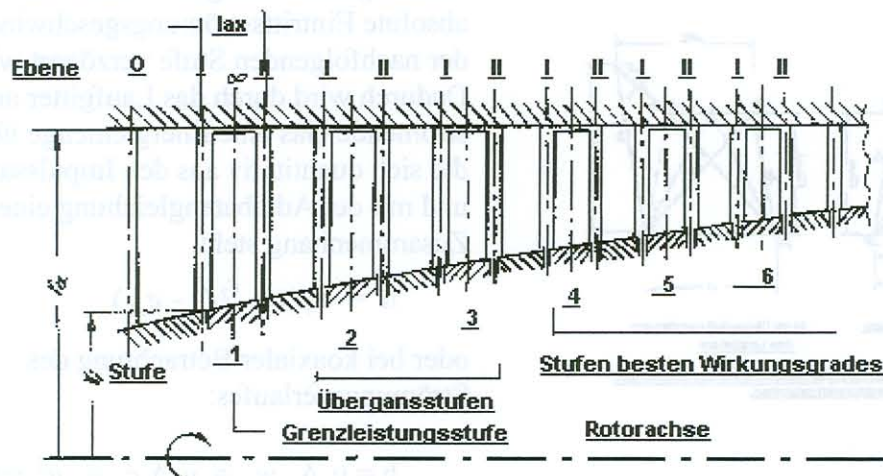


Abb.: 1.1 Schematische Darstellung der Stufen eines Axialverdichters.

Grenzleistungsstufen erhalten ein kinematisches Strömungsschema. Das die physikalisch möglichen Kennwerte einer Stufe anstrebt. Diese Stufen beeinflussen alle nachfolgenden Stufen in ihrer Leistungsfähigkeit.

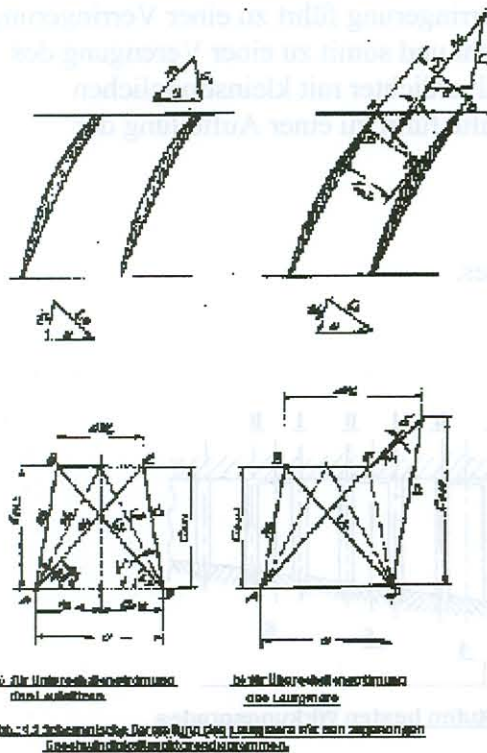
Stufen besten Wirkungsgrades erhalten ein kinematisches Strömungsschema bei denen der beste Stufenwirkungsgrad erwartet werden kann und die Korrekturwerte für die Axialgeschwindigkeitsverteilung durch die Beeinflussung der vor und hinter der betrachteten Stufe liegenden Stufen einen bestimmten Endwert annehmen. Dies ist meist nach der dritten oder vierten Verdichterstufe der Fall.

Übergangsstufen stellen hinsichtlich der kinematischen Strömungsschemata die Verbindung zwischen Grenzleistungsstufen und Stufen besten Wirkungsgrades dar. Sie können zunächst wie Stufen besten Wirkungsgrades konzipiert werden und dann durch Variation der Drallverteilung mittels eines Drallverteilungsexponenten  $q$  den anderen Stufen angepaßt werden.

Die Verdichtung des Gases in einer Verdichterstufe erfolgt durch eine Vergrößerung des statischen Druckes infolge Strömungsgeschwindigkeitsverzögerung im Laufgitter durch die Wirkungsprinzipien

- der Diffusorströmung
- des Systems gasdynamischer Verdichtungsstöße

bzw. beider Wirkungsprinzipien gemeinsam in einem Laufgitter mit strömungstechnisch geeigneten Gitterprofilen. Die Abb.: 1.2 zeigt schematisch die Laufgitterbeschaufelung auf einem koaxialen Zylinderschnitt einer Stufe mit den zugehörigen Bezeichnungen sowohl im absoluten als auch im relativen Strömungssystem.



Das Absolutsystem gibt jene Werte an, die durch ein feststehendes Messgerät und das Relativsystem jene Werte die durch ein mit dem Laufgitter rotierendes Messgerät erfaßt werden können. Die Abb.: 1.2 zeigt somit, dass im Laufgitter eine Erhöhung des statischen Druckes des Gases durch Verzögerung der Relativgeschwindigkeiten und weiterhin eine Vergrößerung der Absolutgeschwindigkeiten des strömenden Gases erfolgt die in einem dem Laufgitter nachfolgenden Leitgitter wieder auf die absolute Eintrittsströmungsgeschwindigkeit der nachfolgenden Stufe verzögert wird. Dadurch wird durch das Laufgitter an das strömende Gas eine Energiemenge übertragen die sich quantitativ aus den Impulssatz ergibt und mit der Adiabatengleichung eines Gases in Zusammenhang steht.

$$h = u_1 \left( c_{u2} \frac{r_2}{r_1} - c_{u1} \right)$$

oder bei koaxialer Betrachtung des Strömungsverlaufes:

$$h = u \Delta w_u = u \Delta c_u = u^2 \psi / 2$$

Im Axialverdichterbau rechnet man mit dimensionslosen Kennzahlen die dadurch entstehen, wenn man die Größen der Geschwindigkeitsdiagramme durch die zugehörige Umfangsgeschwindigkeit dividiert. Die wichtigsten sind:

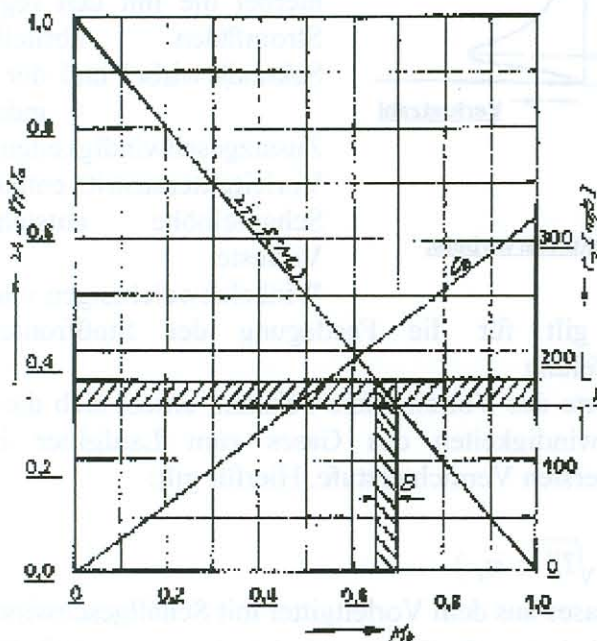
- Die Druckzahl  $\psi = 2 \Delta w_u / u$
- Die Lieferzahl  $\phi = c_{ax} / u$
- Der kinematische Reaktionsgrad  $\rho = w_{\infty} / u$

Der kinematische Reaktionsgrad unterscheidet sich vom statischen Reaktionsgrad dadurch, dass die in der Verdichterstufe auftretenden Verluste nicht berücksichtigt werden.

Eine Axialverdichterstufe besteht somit aus einem Laufgitter und einem nachgeschalteten Leitgitter und für die erste Verdichterstufe, wenn nicht ausdrücklich eine axiale Zuströmung des zu verdichtenden Gases gefordert wird, ein als Beschleunigungsgitter ausgebildetes Vorleitgitter. Die Abb.: 1.1 zeigt schematisch die Darstellung einer Verdichterstufe mit Vorleitgitter am Verdichtereintritt.

Unter Voraussetzung eines kleinstmöglichen Stufenaußenradius  $r_a$  lässt sich für die Strömungsebene 0 vor dem Vorleitgitter oder für die Strömungsebene I vor dem Laufgitter bei Stufen ohne Vorleitgitter über eine Durchsatzkennzahl  $K=m/r_a^2 \pi$  ein Zusammenhang zwischen der Zuströmmachzahl  $Mo$  des zu verdichtenden Gases und dem Radienverhältnis der Stufe  $v_i=r_i/r_a$  darstellen. Die Abb.: 1,3 zeigt diesen Zusammenhang.

Bei Abweichungen von diesen Werten kann die Bedingung für einen kleinstmöglichen



- A = Toleranzfeld der derzeitigen technologischen Grenze für die Schaufelbefestigung der Laufgitter.
- B = Toleranzfeld der maximalen Zuströmmachzahl  $Mo$  infolge der Grenze A

Abb.: 1.3 Zusammenhang zwischen der Machzahl  $Mo$  für die axiale Zuströmung der Luft und dem Radienverhältnis  $v_i$  unter der Voraussetzung des Kleinwertes für den Radius  $r_a$  bei IMA-Normatmosphäre.

Außenradius der Verdichterstufe nicht eingehalten werden. Bei Axialverdichterstufen mit Anwendung der Überschallanströmung der Laufgitter kann diese Bedingung weitestgehend eingehalten werden.

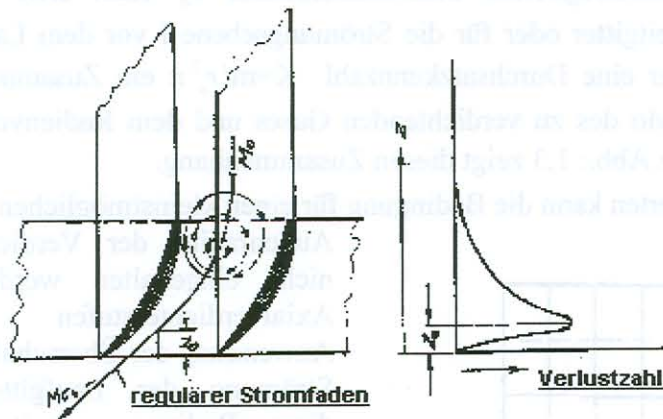
Bei Stufen mit reiner Unterschallanströmung der Laufgitter sind dagegen die vermeintlich zu realisierenden Grenzwerte der Anströmmachzahlen am Innen- und Außenradius der Stufe von Bedeutung. Die zu erwartenden Anströmmachzahlen der Laufgitter hängen hier in hohem Maße von dem gewählten kinematischen Schema in der Stufe ab. Darauf wird noch eingegangen.

Entsprechend der Geschwindigkeitsvektordiagramme der Abb.: 1.2 wird das strömende Gas von der Zulaufgeschwindigkeit  $c_{ax1} = c_0$  auf die Geschwindigkeit  $c_1$  am

Leitgitteraustritt beschleunigt. Dabei wird dem strömenden Gas ein Drall ( $\alpha_1 < 90^\circ$ ) oder ein Vordrall ( $\alpha_1 > 90^\circ$ ) erteilt. Bei drallfreier Strömung ( $\alpha_1 = 90^\circ$ ) kann das Vorleitgitter entfallen. Die Grenzleistung des Vorleitgitters liegt bei einer Strömungsgeschwindigkeit des Gases am Austritt des Vorleitgitters die der Schallgeschwindigkeit ( $M_{c1} = 1$ ) entspricht. Ohne Berücksichtigung der beim Durchströmen des Gases durch das Vorleitgitter auftretenden Verluste sind am Vorleitgitteraustritt folgende Strömungsaustrittswinkel zu erwarten:

$Mo$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\alpha_1$ (grad)	38,9	48,27	57,31	66,0	74,8

Als Verluste sind die Profilverluste durch den Grenzschichteneinfluss an der Profilloberfläche und die Verluste durch den Sekundärwirbeleinfluss im Strömungskanal des Vorleitgitters zu berücksichtigen. Der Sekundärwirbel tritt im dreidimensionalen Strömungskanal paarweise auf und hat seine Ursache innerhalb des Strömungskanals durch einen Ausgleich des statischen Druckes zwischen der Saug- und Druckseite der Gitterprofile. Die schematische Darstellung eines Sekundärwirbels zeigt die Abb.: 1.4.



$Z_0$  = Zentrum des Sekundärwirbels

Abb.: 1.4 Schematische Darstellung des Sekundärwirbels.

Das Vorleitgitter mit den zugehörigen Grenzwerten bietet sich zur Erhöhung der Anströmmachzahl für ein Laufgitter mit Überschallanströmung an. Erschwerend wirken sich hierbei die mit den regulären Stromfäden abfließenden Sekundärwirbel und der durch induzierte Zusatzgeschwindigkeiten am Vorleitgitteraustritt entlang der Schaufelhöhe entstehenden Verluste und Winkelabweichungen von der

Regulären Strömungsrichtung. Dies gilt für die Festlegung der Stoßfronten im Überschallbereich der Laufgitterbeschaufelung

Sind die strömungstechnischen Grenzwerte des Vorleitgitters bekannt, erhebt sich die Frage nach den erreichbaren Anströmgeschwindigkeiten des Gases zum Laufgitter in der Strömungsebene I (siehe Abb.: 1.1) der ersten Verdichterstufe. Hierfür gilt:

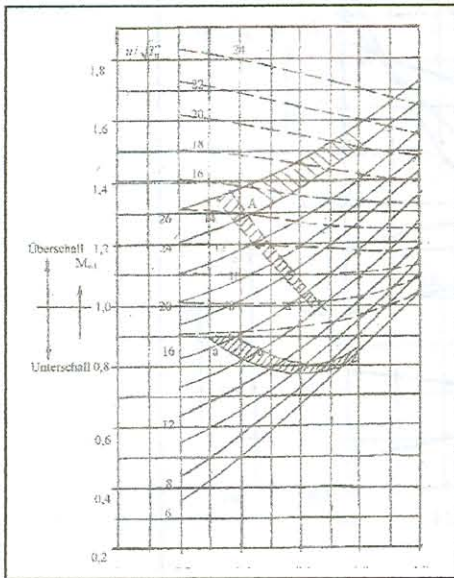
$$M_{w1} = f( M_0 ; u / \sqrt{T_0^*} ; \alpha_1 )$$

Bei einer Anströmgeschwindigkeit des Gases aus dem Vorleitgitter mit Schallgeschwindigkeit ist die Strömungsrichtung  $\alpha_1 > 90^\circ$  und bei einer Stufe ohne Vorleitgitter  $\alpha_1 = 90^\circ$ . Optisch sichtbar ist eine Stufe mit Vorleitgitter und Überschallanströmung des Laufgitters im Gegensatz zu einer Stufe mit Unterschallanströmung gekennzeichnet durch eine Anströmrichtung des Gases entgegen aus dem Vorleitgitter entgegen der Drehrichtung des Laufgitters (siehe auch Abb.: 1,2).

Die einzelnen erreichbaren Werte für die Anströmmachzahlen im Relativsystem für Stufen mit und ohne Vorleitgitter mit den technologisch bedingten Toleranzgrenzen zeigt die Abb.: 1.5.

Danach können für Stufen mit Vorleitgitter über den ganzen Radienbereich einer Stufe Überschallgeschwindigkeiten im Relativsystem bis zu etwa  $M_{w1} \approx 1,7$  erwartet werden. Für Stufen ohne Vorleitgitter sind Anströmmachzahlen zum Laufgitter am Stufenaußenradius von etwa  $M_{w1} = 1,4$  bis 1,45 und am Innenradius von etwa  $M_{w1} = 0,78$  bis 0,81 erreichbar.

An einem bestimmten Stufenradius erhält man die Anströmmachzahl  $M_{w1} = 1,0$ . Bei diesen und den kleineren Radienverhältnissen ist eine Energieübertragung durch das Laufgitter an das zu verdichtende Gas durch ein System gasdynamischer Verdichtungsstöße nicht mehr möglich.



B = Technologischer Toleranzbereich hinsichtlich der Schaufelbefestigung.

$u_a / \sqrt{T_0^{**}} = 24$  bis 26 Toleranzbereich hinsichtlich der

Festigkeitswerte für das Schaufelmaterial.

Die Flächen a und b zeigen den Toleranzbereich der am Innenradius zu erwartenden Anströmmachzahlen des Laufgitters

Abb.: 1.5 Erreichbare Anströmmachzahlen am Laufgittereintritt.

Dabei ist eine über den Radius linear veränderliche Energieübertragung an das Gas

$$h_{th} = h_{tha} - (h_{tha} - h_{thi})(r_a - r) / (r_a - r_i)$$

im Laufgitter vorteilhaft.

Maßgeblich für die Energieübertragung vom Laufgitter an das zu verdichtende Gas am Innenradius der Stufe ist die dortige Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters. Nach dem Stabilitätskriterium nach Hamilton für die Energieübertragung an das Gas bei verlustloser Strömung ist diese stabil, solange die dimensionslose Druckzahl  $\psi_{th} < 2,0$  eingehalten wird. Anderenfalls ist am Nabenradius der Stufe ein Abreißen der Strömung von der Profilloberfläche des Laufgitters und somit ein Nabentotwassergebiet zu erwarten. Für die erste Stufe eines Verdichters mit Unterschallanströmung des Laufgitters ist damit die mögliche Energieübertragung im Laufgitter an das Gas bei konstanten Wert über den Stufenradius in gewissen Grenzen bekannt. Unter Einhaltung der Stabilitätsgrenze am Innenradius der Stufe kann bei Unterschallanströmung und muß bei Überschallanströmung im Relativsystem die Energieübertragung an das Gas über den Stufenradius veränderlich gemacht werden.

Die Gesamtenergieübertragung an das Gas setzt sich somit aus der durch die gasdynamische Verdichtungsstoßkombination bei Überschallanströmung des Laufgitters und der durch die Diffusorströmung bei Unterschallanströmung erhaltenen zusammen.

Die Zustandswerte des Gases nach dem System der Verdichtungsstöße lässt sich leicht in Abhängigkeit des Wertes  $u/\sqrt{T_0^{**}}$  darstellen und somit den einzelnen Radien einer Verdichterstufe zuordnen. Ein Beispiel dafür zeigt die Abb.: 1.6. Eine Zuordnung einzelner Stufenkennwerte über das Radienverhältnis  $v = r/r_a$  einer Verdichterstufe, also über die Schaufelhöhe einer Stufe, zeigt als Beispiel die Abb.: 1.7. Dabei wurde am Stufenaußenradius die Energieübertragung durch die Diffusorströmung „Null“ gesetzt. Die Abb.: 1.7 zeigt aber auch, dass sich für  $r > r_i$  auch die Reserve gegenüber dem Stabilitätskriterium nach dem Prinzip von Hamilton gegenüber dem Innenradius noch vergrößert. Die Grenzkriterien nach den Abbildungen 1.3 und 1.5 gelten nur für Axialverdichterstufen mit Überschallanströmungen der Laufgitter im Relativsystem.. Diese Überschallanströmung tritt nur im Strömungskanal ABCD des Laufgitters nach Abb.: 1.2 b auf. In allen anderen Bereichen der Stufe liegt die Geschwindigkeit des Gases im Unterschallbereich. Dies berechtigt die dreidimensionalen Strömungsvorgänge über den Radius einer Verdichterstufe für das Absolutsystem in den Stufenebenen I und II nach Abb.: 1.1 zu betrachten.

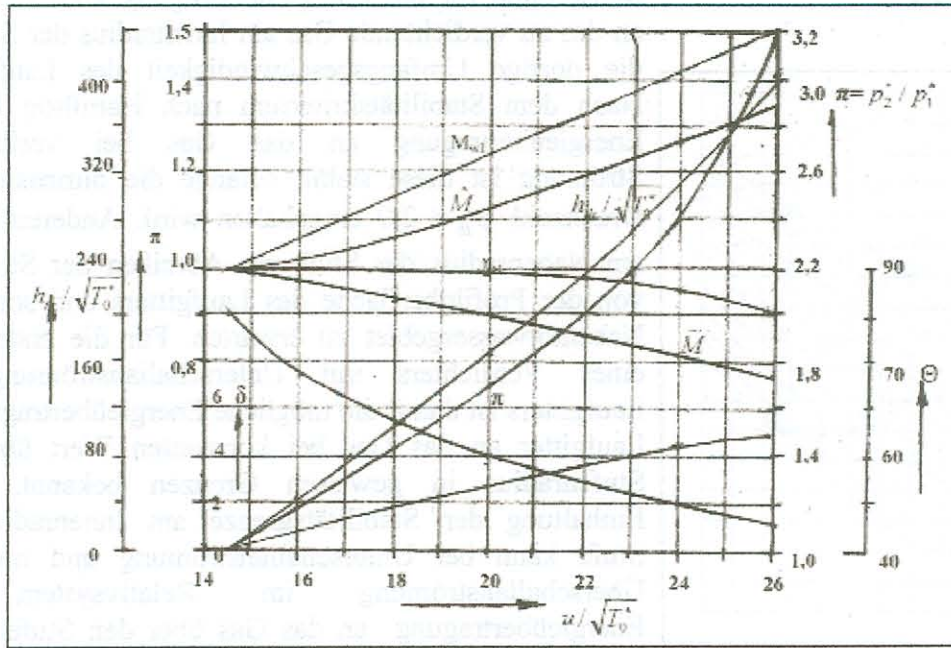


Abb.: 1,6 Einige durch die Verdichtungskombination in der Stufe erhaltene Werte in Abhängigkeit der bezogenen Umfangsgeschwindigkeiten des Laufgitters.

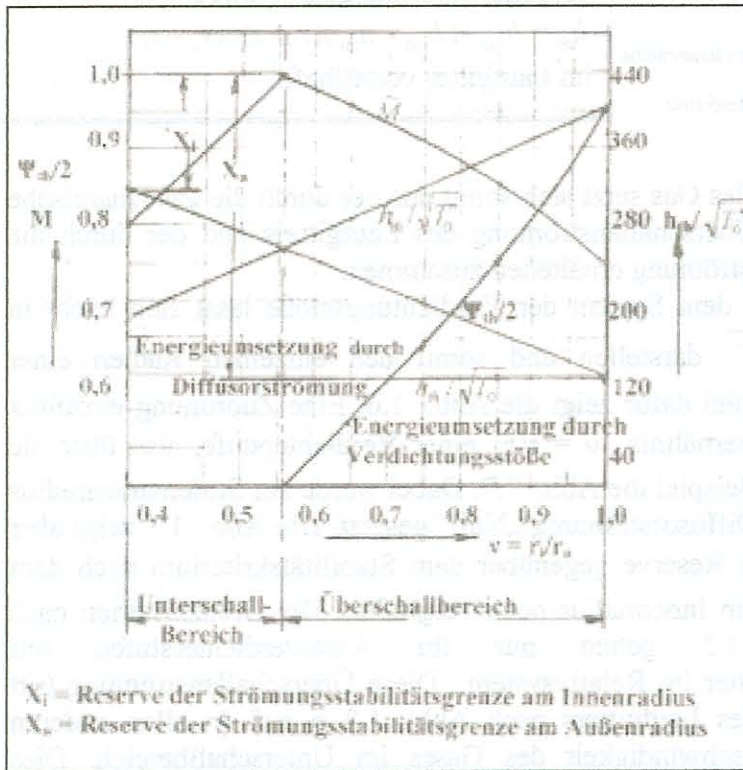


Abb.: 1,7 Charakteristische Werte einer Verdichterstufe mit Überschallanströmung.

Die erhaltene Differentialgleichung lässt sich jedoch nur mit einer Reihe von Vereinfachungen lösen. Jedes Massenteilchen des zu verdichtenden Gases muss im Strömungskanal des Verdichters mit den dort wirkenden Kräften im Gleichgewicht stehen, Mit Hilfe der Gleichungen von Bernoulli und Euler lässt sich für den Energieumsatz in der Stufe als Funktion der Schaufellänge der vereinfachte Ausdruck

$$dh_{th} = c_{ax} dc_{ax} + c_u dc_u + (c_u^2 / r) dr$$

aufstellen. Bei der Lösung dieser Gleichung können die allgemeine Ansätze



$$c_u = c_{u\infty} \mp (\Delta c_u)2 \quad \text{und} \quad c_{u\infty} = c_{u\infty a} v^q$$

mit  $v = r/r_a$  gemacht werden. Dabei gilt für das Vorzeichen:

- vor dem Laufgitter (Strömungsebene I)
- + hinter dem Laufgitter (Strömungsebene II)

und für den Drallverteilungsexponenten  $q$  bei Stufen mit konstanter Energieübertragung entlang der Schaufelhöhe:

- $q = +1$  konstante kinematische Reaktion
- $q = -1$  Potentialwirbel
- $q = 0$  konstante Drallverteilung

Bei Stufen mit veränderlicher Energieübertragung entlang der Schaufelhöhe verändert sich auch der Drallverteilungsexponent  $q$  mit den Stufenradius.

Eine linear veränderliche Energieübertragung an das Gas entlang der Schaufelhöhe kann mit den Faktor

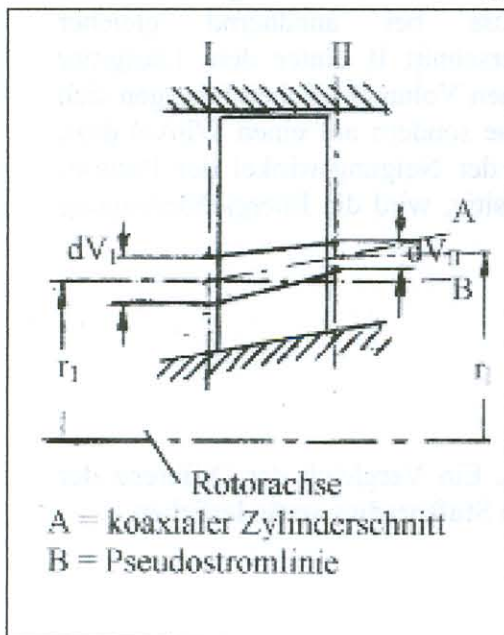
$$K = \left\{ 1 - (\Delta c_u / \Delta c_{ua}) v_i \right\} / (1 - v_i)$$

durch  $\Delta c_u = (\Delta c_{ua} / v) [1 - K(1 - v)]$

berücksichtigt werden. Dabei gilt:

- $K \neq 0$  für über die Schaufelhöhe linear veränderliche Energieübertragung.
- $K = 0$  für über die Schaufelhöhe konstante Energieübertragung.

Die angegebenen Gleichungen gelten nur für einen Strömungsweg der Gasteilchen auf coaxialen Zylinderschnitten einer Stufe. Durch die Kompressibilität des zu verdichtenden Gases ist dessen Volumen in der Strömungsebene I der Stufe größer als in der Strömungsebene II. Deshalb kann angenommen werden, dass sich die Massenteilchen des zu verdichtenden Gases im Strömungskanal auf Pseudo-Stromlinien bewegen. Schematisch zeigt dies die Abb.: 1.8.



Näherungsweise kann dies durch den Ansatz

$$\Delta c_u = \Delta c_{ua} v^\varepsilon \left\{ 1 - K(1 - v) \right\}$$

berücksichtigt werden. Dabei gilt:

- $\varepsilon = -1$  für Rechnungen auf coaxialen Zylinderschnitten
- $\varepsilon \neq -1$  für Rechnungen auf Pseudo-Stromlinien.

Mit den angegebenen Ansätzen kann die Näherungsbeziehung für die Axialgeschwindigkeitsverteilung entlang der Schaufelhöhe in den Strömungsebenen I und II unter Verwendung der dimensionslosen Kennwerte angegeben werden.

Abb.: 1.8 Bezeichnungen an einem Laufgitter bei einem durch die Kompressibilität des Gases veränderlichen Strömungskanal.

$$(c_{ax}/u_a)^2 = \varphi_a^2 + \alpha A \pm \beta B - C$$

Dabei gilt;

$$A = f(\rho_{ka}; \psi_{tha}; K; q; v; \varepsilon)$$

$$B = f(\rho_{ka}; \psi_{tha}; K; q, v; \varepsilon)$$

$$C = f\{(T_{Ia}^* - T_1^*) u_a\}$$

$\alpha$  und  $\beta$  sind Korrekturfaktoren nach Schröder welche die induzierten Geschwindigkeiten durch die in den Strömungskanälen der Lauf- und Leitgitter auftretenden Wirbelfelder berücksichtigen. Als Bezugswerte obiger Gleichung wurden die auf den Außenradius der Stufe bezogenen Kennwerte gewählt. Als Bezugswerte können aber auch auf andere geeignete Radien der Stufe bezogenen dimensionslosen Kennwerte gewählt werden.

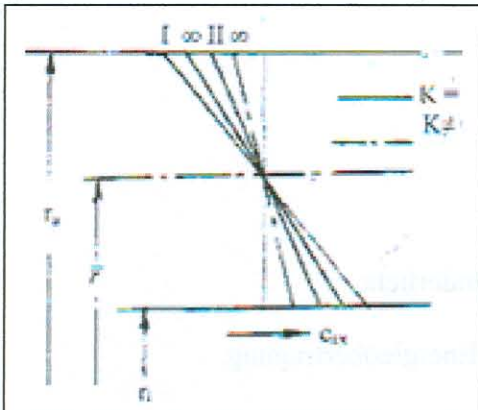


Abb.:1.9 **Schematische Darstellung des Axialgeschwindigkeitsverlaufes in Abhängigkeit vom Stufenradius in den Stufenebenen I, II und Unendlich.**

Den zu erwartenden Axialgeschwindigkeitsverlauf über den Stufenradius in den Strömungsebenen I, II und  $\infty$  zeigt schematisch die Abb.: 1.9.

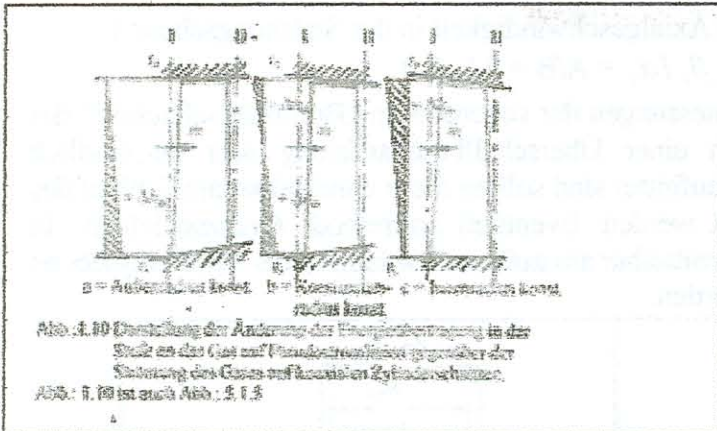
Die Verläufe der Axialgeschwindigkeitsverteilungen in den einzelnen Strömungsebenen schneiden sich bei dem Radius  $\bar{r}$ , wenn beim Durchströmen des Gases von der Ebene I zur Ebene II auf diesen Radius weder eine Geschwindigkeitsbeschleunigung oder eine Geschwindigkeitsverzögerung erfolgt. Dieser Radius wird auch Kontinuitätsradius genannt bei dem die Kontinuitätsbedingungen beim Durchströmen des Gases durch den Verdichterströmungskanal eingehalten werden muss.

Entsprechend der Volumenänderung des Gases durch die Energiezufuhr im Laufgitter muss bei annähernd gleicher Durchflussgeschwindigkeit des Gases der Strömungsquerschnitt II hinter dem Laufgitter kleiner als in der Ebene I vor dem Laufgitter. Die einzelnen Volumenteilchen bewegen sich somit nicht auf koaxialen Zylinderschnitten zur Rotorachse sondern auf einen Winkel dazu geneigt auf Pseudo- Stromlinien (siehe Abb.: 1.8). Ist der Neigungswinkel der Pseudo-Stromlinien gegenüber dem koaxialen Zylinderschnitt positiv, wird die Energieübertragung im Laufgitter an das Gas um den Wert

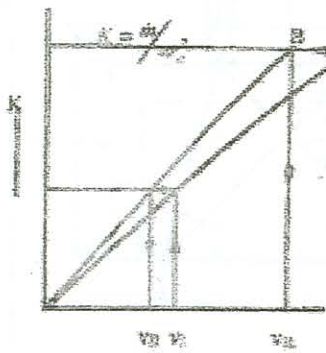
$$h_{th} = u_1^2 (1 - \rho_k) \left\{ (r_{II} / r_I)^{q+\varepsilon} - 1 \right\}$$

vergrößert und umgekehrt (siehe hierzu auch Abb.: 1.10). Ein Vergleich der Differenz der Geschwindigkeitsumfangskomponenten ergibt den über den Stufenradius veränderlichen Wert des Exponenten  $\varepsilon$ .

$$\varepsilon = \ln \left\{ r_{II} / r_I (1 - \Delta h_{in} / h_{in}) \right\} / \ln(r_{II} / r_I)$$



Der Zusammenhang zwischen den Radien einer Pseudo-Stromlinie lässt sich näherungsweise mit einer Durchsatzkontrolle in den Strömungsebenen I und II einer mit allen Verlusten und  $\varepsilon = -1$  durchgerechneten Verdichterstufe eines hochbelasteten Verdichters ermitteln (siehe Abb.: 1.1). Bei den ersten und zweiten Stufe können die  $\Delta h_{in}$ -Werte bis zu 10% der



nominalen Energieumsetzungen annehmen. Hinsichtlich des Kriteriums der Strömungsstabilität ist dies zu beachten.

Bei der Ermittlung des Axialgeschwindigkeitsverlaufes über den Radius der Stufen wurde nur das gebundene Wirbelgebiet in der Gitterebene der Stufe berücksichtigt. Dieses gebundene Wirbelfeld bedingt im ebenen Strömungskanal Wirbelfäden oder freie Wirbel von der gleichen Stärke wie beim gebundenen Wirbelfeld und Schwimmen mit der Parallelströmung nach hinten weg

(siehe hierzu die Abb.: 1.12). Es ist das Verdienst von

Schröder die durch das gebundene Wirbelfeld und dem freien Wirbelfeld im dreidimensionalen Raum induzierten Geschwindigkeiten und daraus die Korrekturfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  für den Axialgeschwindigkeitsverlauf des Gases über den Radius der Verdichterstufe ermittelt zu haben. Der Korrekturfaktor  $\alpha$  berücksichtigt den Einfluss der Wirbelverteilung nach Abb.: 1.12 b auf die Axialgeschwindigkeitsverteilung in der Stufenebene  $\infty$ . Der Korrekturfaktor  $\beta$  berücksichtigt den Einfluss der Wirbelverteilung auf den Axialgeschwindigkeitsverlauf in den Strömungsebenen I und II einer betrachteten Stufe. Die Korrekturfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  beinhalten auch die Einflüsse der Wirbelfäden der vor und nachfolgenden Stufen einer betrachteten Stufe und sind somit auch eine Funktion der Stufenabstände (siehe auch Abb.: 1.1).

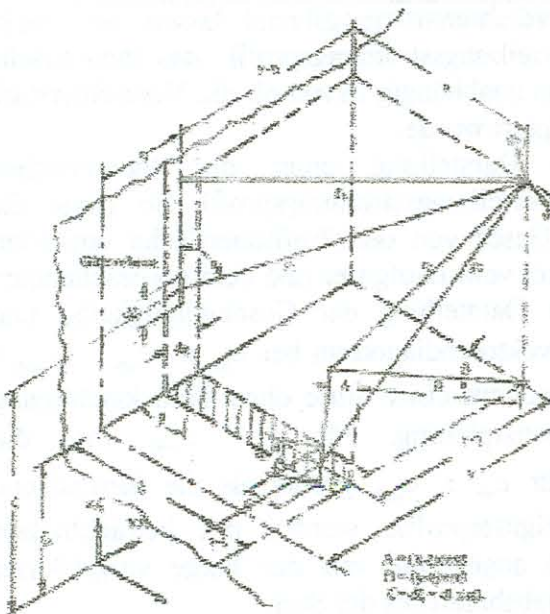
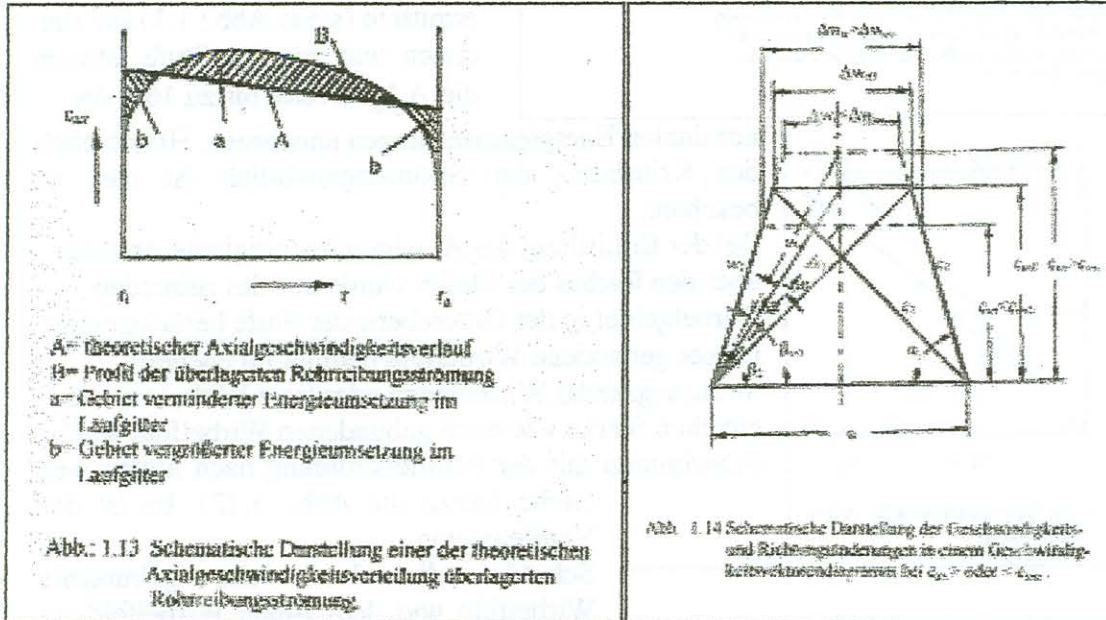


Abb. 1.12 Schematische Darstellung der induzierten Geschwindigkeiten als durch das Fließen des gebundenen Wirbels an der Eintrittsstufe und der durch den freien Wirbel im nachfolgenden Bereich des Verdichters.

Für Axialverdichterstufen mit Überschallanströmung des Laufgitters ohne Vorleitgitter und konstanter Axialgeschwindigkeit über den Stufenradius in der Stufenebene I muss das Verhältnis der Korrekturfaktoren für die Axialgeschwindigkeit in der Strömungsebene I

$$\beta_1 / \alpha_1 = A/B = f(l_{ax}/h)$$

sein. Daraus ergeben sich auch die Abmessungen der sogenannten „Breitbandschaufeln“ des Laufgitters. Da die Stoßfrontlagen in einer Überschallbeschauflung sehr empfindlich gegenüber einer Falschanströmung im Laufgitter sind sollten diese unmittelbar am Einlauf des Verdichterströmungskanals angeordnet werden. Eventuell auftretende Grenzschichten in einer Verdichtereintrittshaube sollten unmittelbar am äußeren Umfang in der Strömungsebene I am Laufgittereintritt vorbei geführt werden.

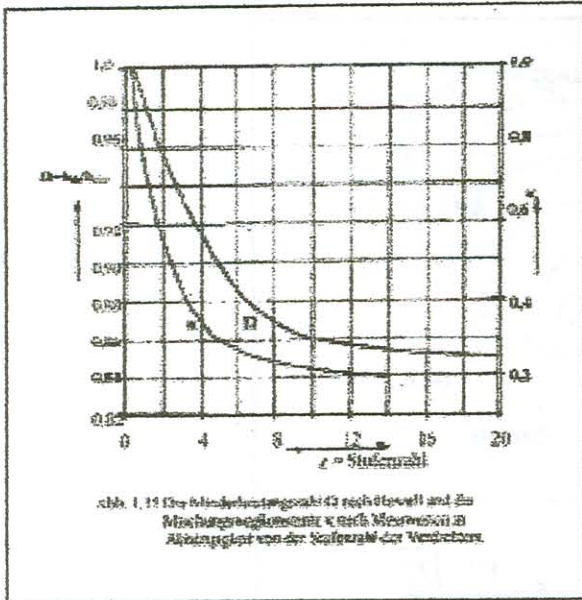


Grenzschichten am äußeren und inneren Verdichterströmungskanal lassen sich nicht vermeiden und überlagern ein sogenanntes Rohrreibungsströmungsprofil das theoretische Axialgeschwindigkeitsprofil über den Stufenradius unabhängig davon ob die Verdichterstufe mit oder ohne eine derartige Zusatzfunktion konzipiert wurde.

Die Abb.: 1.13 zeigt eine schematische Darstellung einer der theoretischen Axialgeschwindigkeitsverteilung überlagertes Rohrreibungsströmungsprofil. So lange die Schaufelprofile ohne Abreißerscheinungen des Gases von der Profilloberfläche umströmt werden, sind in erster Näherung die Abströmwinkel vom Laufgitter und dem vorgeschalteten Leitgitter konstant. Die Abb.: 1.14 zeigt eine Darstellung der Geschwindigkeits- und Richtungsänderungen in einem Geschwindigkeitsvektordiagramm bei  $c_{ax} \neq c_{ax0}$  ( $c_{ax0}$  = Auslegungszustand) in einem coaxialen Zylinderschnitt einer Stufe ohne Berücksichtigung des Rohrreibungsströmungsprofils bei der Konzipierung. Für  $c_{ax} > c_{ax0}$  wird die Energieumsetzung im Laufgitter kleiner und für  $c_{ax} < c_{ax0}$  größer als die theoretische Energieumsetzung im Laufgitter. Die Schaufelgitterprofile werden mit beträchtlichen Richtungsänderungen  $\Delta\alpha$  (siehe Abb.: 1.14) angeströmt mit der Folge vergrößerter Profilverluste und einer Beeinträchtigung des Betriebsbereiches der Stufe.

In England hat Howell anfangs der 50-er Jahre die verminderte Energieübertragung durch eine über die Schaufelhöhe konstant gehaltene Minderleistungszahl  $\Omega$  ausgeglichen.

Die Abb.: 1.15 zeigt die Minderleistungszahl nach Howell.

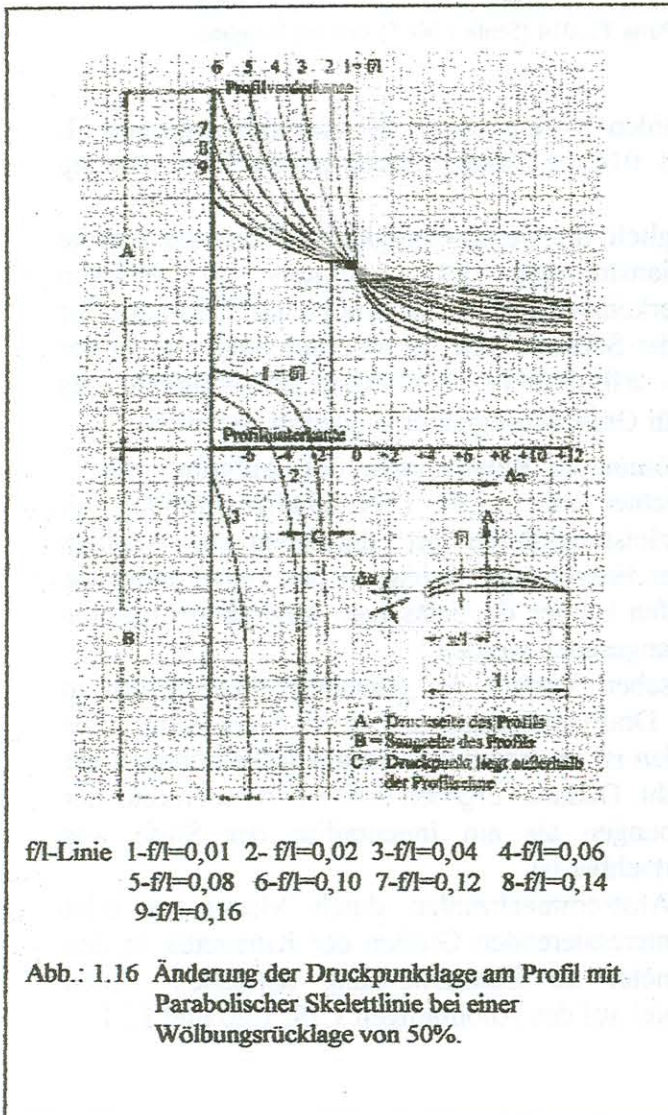


Ein besserer und auch schon lange bekannter Weg ist die Überlagerung des Rohrreibungsströmungsprofils

$$\frac{C_{ax}}{C_{axth}} = 1 + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\lambda/8} \{1 - \ln[(1-\nu)/2(\nu-\nu_i)]\}$$

dem theoretischen Axialgeschwindigkeitsverlauf über den Stufenradius. Dabei ist  $\lambda$  der Widerstandsbeiwert und  $\kappa$  die Mischungswegkonstante.

Dieses Verfahren gestattet eine bessere Einhaltung der aerodynamisch stoßfreien Anströmung der Profiltgitter gegenüber dem Verfahren von Howell. Ein Vergleich der Mischungswegkonstanten nach Messungen an



mehrstufigen Axialverdichtern mit der Minderleistungszahl nach Howell zeigt die Abb.: 1.15. Bemerkenswert ist der ähnliche Kurvenverlauf.

Die Abb.: 1.16 zeigt die Änderung der Druckpunktlage der Auftriebskraft am Strömungsprofil bezogen auf die Profilschne eine parabolisch gewölbten Skelettlinie mit einer Wölbungsrücklage von 50% der Profilschne. Kritisch für die Verdichterstufe ist dabei, dass bei negativen Anstellwinkeln  $\Delta\alpha$  (siehe auch Abb.: 1.14) je nach der Skelettlinienwölbung  $f/l$  die Druckpunktlage der Auftriebskraft über die Vorderkante des Profils hinausläuft und damit nicht mehr im benötigten Arbeitsbereich arbeitsfähig ist.

Diesen Effekt kann man zur Vergrößerung des stabilen Arbeitsbereiches eines Verdichters nutzen, wenn man der theoretischen Axialgeschwindigkeitsverteilung in den Axialverdichterstufen die Rohrreibungsströmung überlagert. Dieser Effekt ist in der Praxis deutlich durch Messungen bei der Ermittlung der Kennfelder der ersten Stufengruppen der Verdichter Pirna TL 014 und Pirna TL 016 nachgewiesen. Die Abb.: 1.17 zeigt

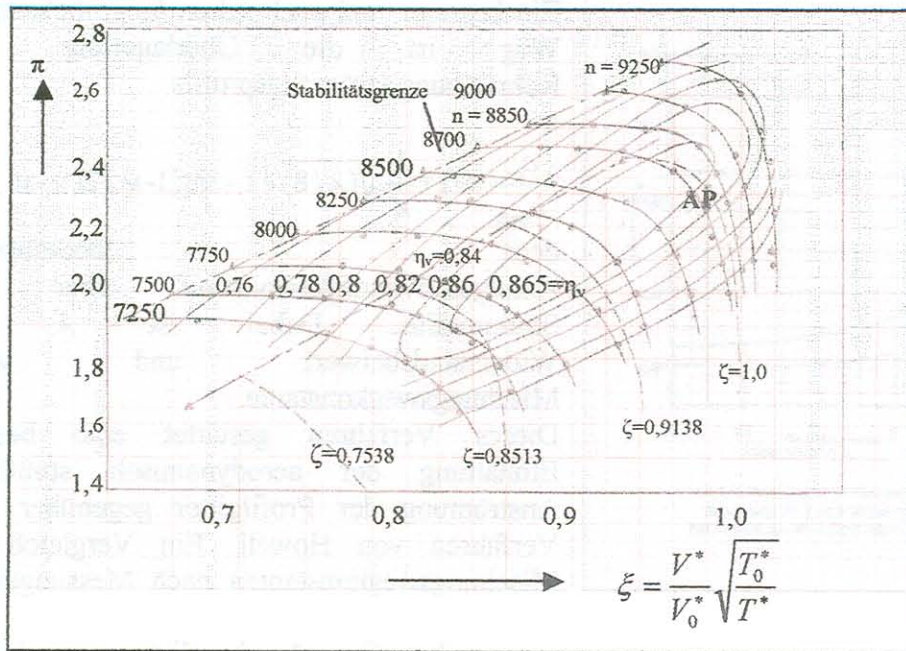


Abb.: 1,17 Das experimentell ermittelte Kennfeld des Verdichterprüflings Pirna TL 016 Stufe 1 bis 4). Die Drehzahlkurven des Verdichterprüflings Pirna TL 014 (Stufe 1 bis 5) sind als Vergleich eingezeichnet.

die Gegenüberstellung der Kennfelder der beiden Stufengruppen. Bei der Stufengruppe TL 016 wurde im Gegensatz zur Stufengruppe TL 014 die Zusatzfunktion bei der Konzipierung der einzelnen Stufen berücksichtigt.

Nach den bisherigen Ausführungen ist es möglich, die Geschwindigkeitsvektordiagramme für Axialverdichterstufen mit Unterschallanströmung des Laufgitters im relativen Strömungssystem zu ermitteln. Dabei ist bemerkenswert, dass alle Größen und Parameter für die Axialgeschwindigkeitsverteilung entlang der Schaufelhöhe veränderlich sind. Der in der Stufe zu verdichtende Gasdurchsatz, die erforderliche Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters und das Radienverhältnis  $v$ , sind für Grenzbedingungen eindeutig bestimmt.

Dies trifft nicht für Stufen mit Überschallanströmung im Relativsystem des Laufgitters zu.

Die ersten Stufen mehrstufiger Axialverdichter mit reiner Unterschallanströmung im Relativsystem werden vorwiegend als Grenzleistungsstufen mit, abgesehen von wenigen Ausnahmen, über den Stufenradius konstanter Energieübertragung an das zu verdichtende Gas konzipiert. Als Grenzwerte derartiger Stufen können die zulässigen Anströmmachzahlen im Relativsystem am Außen- und Innenradius angesehen werden.

Die Abb.: 1.18 zeigt als Beispiel den typischen Verlauf der genannten Machzahlen in Abhängigkeit von den strömungstechnischen Drallverteilungsexponenten  $q$  der Stufe. Aus strömungstechnische und aus Festigkeitsgründen ist im Relativsystem am Außenradius einer Stufe eine größere Anströmmachzahl erwünscht. Dadurch ergeben sich am Außenradius der Stufe kleinere Profildicken und Profilmöhlungen als am Innenradius der Stufe was hinsichtlich der Schaufelfestigkeit besser beherrschbar ist.

Wenn die Grenzwerte der realisierbaren Anströmmachzahlen durch Messungen oder Rechnungen bekannt sind, lassen sich alle interessierenden Größen der Kinematik in den Stufen und deren charakteristischen Parameter im Zusammenhang darstellen. Einen derartigen Zusammenhang finden wir als Beispiel auf den Abbildungen 1.19, 1.20 und 1.21.

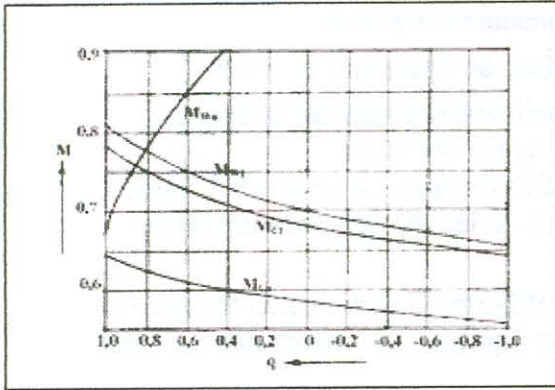


Abb.: 1.18 Typischer Verlauf der Machzahlen am Außen- und Innenradius einer Axialver-

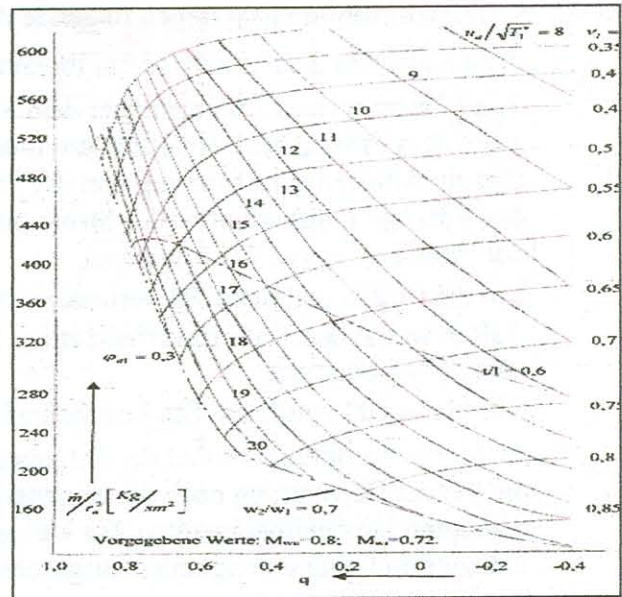


Abb.: 1.19 Massendurchsatz für Grenzleistungsstufen bei INA-Normalatmosphäre.

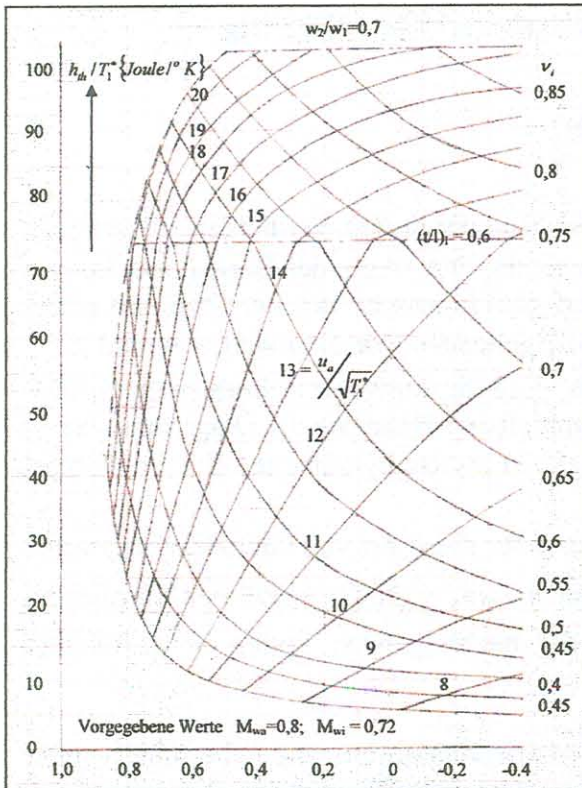


Abb.: 1.20 Zulässige Energieumsetzung in Grenzleistungsstufen

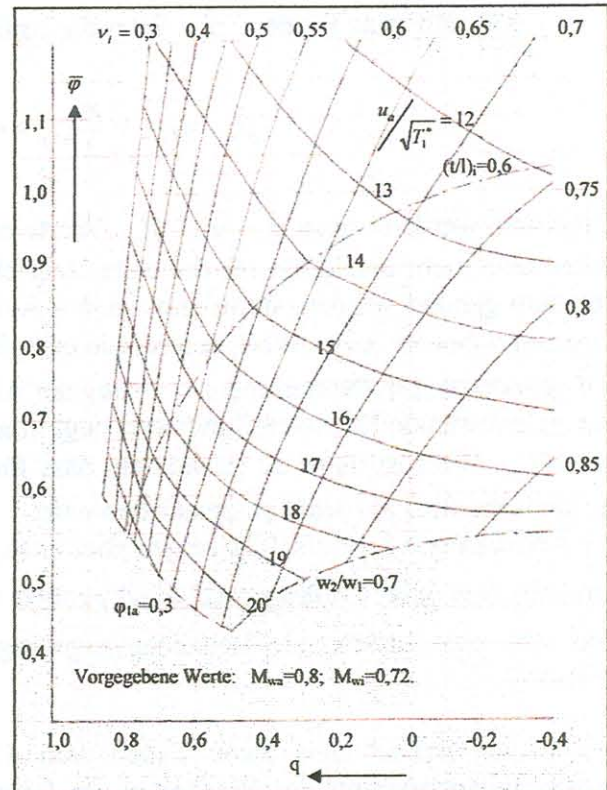


Abb.: 1.21 Lieferzahlen am Continuitätsradius in Grenzleistungsstufen.

Die Abb.: 1.19 vermittelt den Gasdurchsatz durch die Stufe, die Abb.: 1.20 die zulässige Energieumsetzung im Laufgitter und die Abb.: 1.21 die Lieferzahl am Continuitätsrad der Stufe in Abhängigkeit vom Drallverteilungsexponenten und der bezogenen Umfangsgeschwindigkeit am Außenradius der Stufe.

Als weiteren Parameter enthalten die Abbildungen 1.19 bis 1.21 das Nebenverhältnis  $v_i = r_i / r_a$ . Diesen Abbildungen liegen folgende Annahmen zugrunde:

- Kinematischer Reaktionsgrad am Innenradius der Stufe von  $\rho_k = 0,5$ .
- Eine Reserve von 15% gegenüber dem Stabilitätskriterium der Strömung nach dem Prinzip nach Hamilton am Innenradius der Stufe.
- Um ein Ablösen der Strömung von der Profilloberfläche zu vermeiden wurde das Verzögerungsverhältnis der Strömung im Relativsystem am Innenradius der Stufe mit  $w_2 / w_1 = 0,7$  begrenzt.
- Um die Profil- und Sekundärverluste im Profilhitter in vertretbaren Grenzen zu halten wurde das Teilungsverhältnis des Profilhitters am Innenradius der Stufe mit  $t/l = 0,6$  begrenzt.
- Die Lieferzahl wurde am Stufenaußenradius mit  $\varphi_a = 0,3$  begrenzt um dort zu kleine Staffelungswinkel der Gitterprofile zu vermeiden womit gleichzeitig die bei der Berechnung nach der Singularitätenmethode durch den Imaginäranteil bedingten Unregelmäßigkeiten bei kleinen Staffelungswinkeln der am Profil induzierten Geschwindigkeiten ausgeschlossen werden.
- Die vorgegebenen Anströmmachzahlen sind  $M_{wi} = 0,72$  und  $M_{wa} = 0,8$ .
- Den Berechnungen der Stufenkennwerte dieser Art von Grenzleistungsstufen liegen die Korrekturwerte der Drallströmung  $\alpha$  und  $\beta$  nach Schröder für eine unendliche Stufenzahl mehrstufiger Verdichter zugrunde. Das bedeutet  $\alpha_\infty = 1$  und als Ersatz für den  $\beta_\infty$ - Wert die einfache aber sehr gute Näherung:

$$\beta_\infty = 1 / \left[ 1 + \frac{\pi}{4} (r_a - r_i) \right]^2$$

Allgemein werden diese  $\alpha_\infty$ - und  $\beta_\infty$ - Werte etwa nach der dritten Verdichterstufe erreicht, gelten also nicht unbedingt für die erste Verdichterstufe. Die Werte der Diagramme können trotzdem genutzt werden, wenn man an den Außen- und Innenschnitten der Stufe mit einem vorgeschriebenen  $h/l_{ax}$ - Wert, den für die erste Stufe geltenden Korrekturwerten  $\alpha$  und  $\beta$  und geänderten Drallverteilungen  $q$  analog der Abb.: 1.18 die Anströmmachzahlen überprüft. Der zu erwartende Drallverteilungswert liegt in unmittelbarer Nähe wie der Diagrammwert. Der  $h/l_{ax}$ - Wert ist dabei so zu wählen, dass für alle Einsatzmöglichkeiten des Verdichters die kritische Re-Zahl nicht unterschritten wird.

Die Abbildungen 1.19 bis 1.21 zeigen aber auch, dass für diese Art von Grenzleistungsstufen durchaus bezogene Umfangsgeschwindigkeiten von  $u_a / \sqrt{T_0^*} = 21$  ( $u_a = 355$  m/s) erreichbar sind was eine bedeutende Leistungssteigerung der nachfolgenden Stufen im Verdichter bedeutet.

Die bisher betrachteten zwei Typen von Grenzleistungsstufen mit Überschall- oder Unterschallanströmung der Profilhitter im Relativsystem betreffen jeweils die erste Stufe eines mehrstufigen Axialverdichters und bestimmen die Leistungsfähigkeit des ganzen Verdichters. Für diese Stufen ist nun die Frage der Stufenkinematik und der Stufenkennwerte mit einem optimalen Stufenwirkungsgrad relevant.

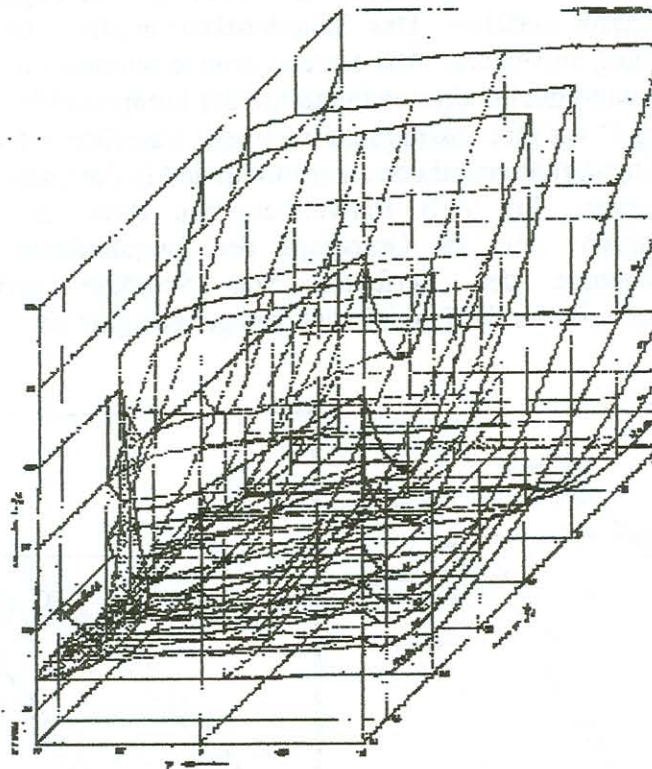


Den optimalen Stufenwirkungsgrad erhält man , wenn der absolute Stufenverlust entsprechend dem Ausdruck

$$1 - \eta_{st} = \frac{\int \varepsilon \{ 2 \varphi_{\infty}^2 + [ \rho_k^2 + (1 - \rho_k^2) ] \} (r/\bar{r})^2 d(r/\bar{r})}{\int \varphi_{\infty} (r/\bar{r})^2 d(r/\bar{r})}$$

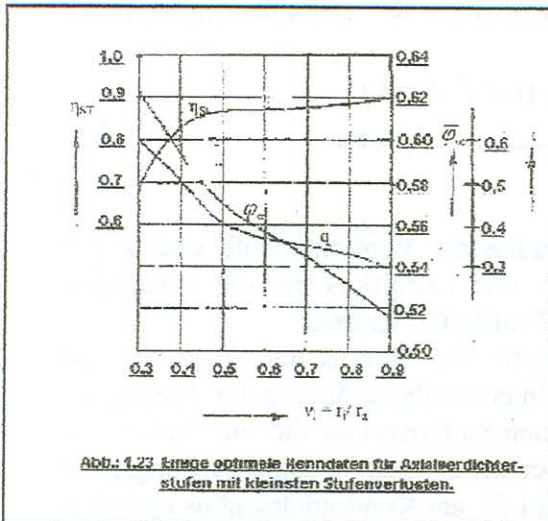
ein Minimum wird. Dabei ist  $\bar{r}$  der Kontinuitätsradius der Verdichterstufe und  $\varepsilon$  der Mittelwert des Gleitwinkels der Profile des Lauf- und Leitgitters der die zulässigen Auftriebsbeiwerte und die auftretenden Verluste der Profilhügel enthält.

Führt man die Veränderlichkeit der einzelnen Werte vom Radius der Stufe ein und berücksichtigt die bei der Grenzleistungsstufe mit Unterschallanströmung der Profilhügel angegebenen Randwerte, erhält man für den absoluten Stufenverlust die auf Abb.: 1.22 dargestellten Zusammenhänge. Der absolute Stufenverlust ist somit in seiner Abhängigkeit auf den Drallverteilungsexponenten, auf die Lieferzahl  $\bar{\varphi}$  am Kontinuitätsradius und den Radienverhältnis  $\nu_i = r_i/r_a$  der Stufe reduziert worden .



**Abb. 1.22** Absoluter Stufenverlust in Abhängigkeit vom Drallverteilungsexponenten der Lieferzahl am Kontinuitätsradius und dem Radienverhältnis der Stufe.

Eine Auswertung der Abb.: 1.22 auf die optimalen Kennwerte der Stufenkinematik zeigt die Abb.: 1.23. Die dort angegebenen Stufenwirkungsgrade sind als höchste Richtwerte anzusehen und die Lieferzahl  $\bar{\varphi} = c_{ax}/\bar{u}$  gilt am Kontinuitätsradius der Stufe. Unter Verwendung dieser Optimalwerte für Axialverdichterstufen lassen sich auch die kinematischen Zusammenhänge und die zulässigen Grenzwerte wie bei den Grenzleistungsstufen mit der Anströmmachzahl als Parameter angeben.



Die Geschwindigkeitsvektordiagramme, entsprechend der gewünschten Kinematik in den Verdichterstufen, müssen durch eine entsprechende Formgebung der Gitterprofile der Lauf- und Leitgitter realisiert werden. Ältere Verfahren stützen sich dabei auf eine Vielzahl von Versuchswerten die jeweils nur für eine bestimmte Profilsystematik Gültigkeit besitzen. Diese Verfahren sind wegen einer fehlenden theoretischen Basis hinsichtlich der Profilform und der Skelettlinienwölbung nur wenig ausbaufähig. In der Praxis wendet man häufig Gitterberechnungsverfahren an die

auf der Singularitätenmethode aufgebaut sind wobei die Einengungen an eine bestimmte Profilsystematik entfallen. Das Singularitätenverfahren ist nur auf eine inkompressible Strömung anwendbar. Aus diesem Grunde müssen zur Ermittlung der Gitterprofile die Geschwindigkeitsvektordiagramme der kompressiblen Strömung mit der „Prandtl-schen Regel“ auf eine inkompressible Ebene transformiert werden um die Gitterprofile mit der Singularitätenmethode zu ermitteln und in die kompressible Ebene transformieren zu können. Im VEB Entwicklungsbau Pirna ist ein einfaches Gitterberechnungsverfahren auf der Grundlage der Singularitätenmethode unter Verwendung der Vorzüge der Verfahren von Schröder und Schlichting zusammengestellt worden das für die Praxis besonders gut geeignet ist.

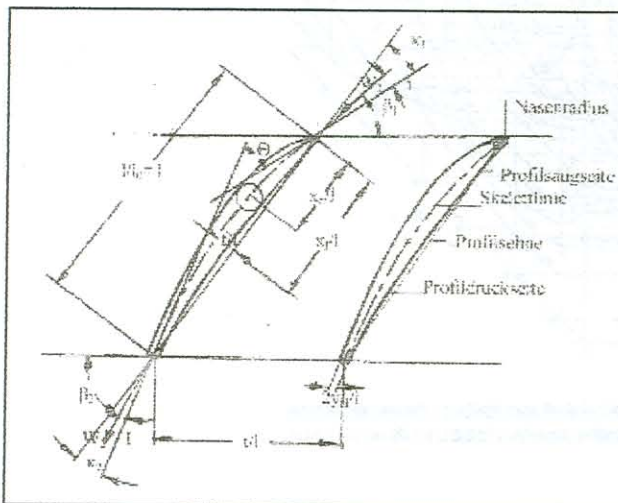


Abb. 1.24 Bezeichnungen am Gitterprofil für Unterschallströmung.

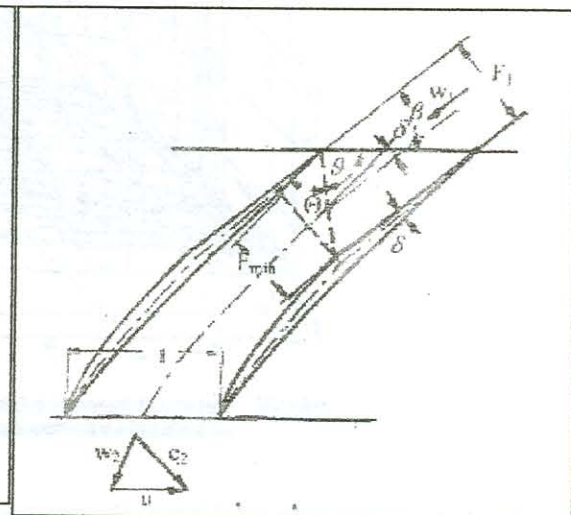


Abb. 1.25 Bezeichnung am Gitterprofil für Überschallströmung

Die Abbildungen 1.24 und 1.25 zeigen schematisch die Gitterprofile mit den entsprechenden Bezeichnungen sowohl für Unterschall- als auch für Überschallanströmung der Profile.

Bei den Gitterprofilen mit Überschallanströmung gelten im Überschallbereich des Strömungskanals andere physikalische Gesetze als im Unterschallbereich des Laufgitters. Bei diesen Gitterprofilen wird analog zu den Abbildungen 1.2b und 1.7 dem normalen Unterschallbereich ein System von Verdichtungsstößen mit den entsprechenden Stoßfronten vorgeschaltet. Dadurch ergeben sich im Eintrittsbereich des Unterschallprofileiles gegenüber den reinen Unterschallprofilen bei der Profilkonturermittlung andere Randbedingungen die sich über den Radius der Stufe ändern.

Die einfachste Form des Strömungskanals im Laufgitter mit Überschallanströmung ist eine Kombination eines schrägen Verdichtungsstoßes mit einem geraden Verdichtungsstoß. Die Stoßfrontlagen entsprechen schematisch denen der Abb.: 1.25. Die Geometrie der Stoßfrontlagen ist eindeutig bestimmt durch:

- Das von der Anströmmachzahl  $M_{W1}$  abhängige Querschnittsverhältnis  $F_1/F_{\min} \cdot F_{\min}$  ist jener Querschnitt, in dem beim Anfahren des Schaufelgitters erstmalig die Schallgeschwindigkeit auftritt. (Siehe Abb.: 1.26)
- Den sich aus der Theorie des schrägen Verdichtungsstoßes ergebende Zusammenhang zwischen der Anströmmachzahl  $M_{W1}$ , dem Stoßfrontenwinkel  $\Theta$  und dem Keilwinkel  $\delta$  (siehe Abb.: 1.27).

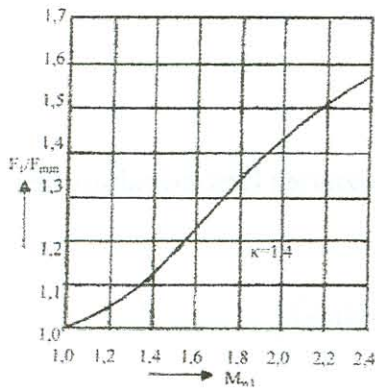


Abb.: 1.26 Das Flächenverhältnis für Gitterprofile mit Überschallanströmung

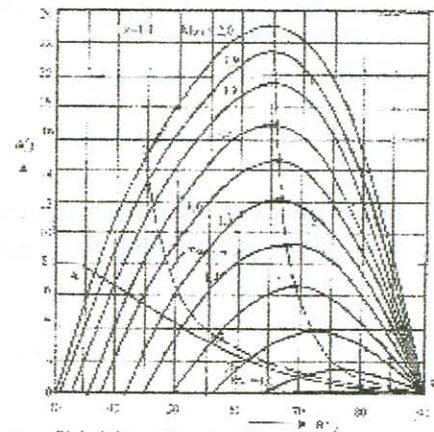


Abb. 1.27 Der Zusammenhang zwischen der Anströmmachzahl der Stoßfrontlage und den Keilwinkel beim schrägen Verdichtungsstoß.

Strömungsprofile für reine Unterschallanströmung werden vorwiegend nach der Singularitätenmethode entwickelt.

Der Zusammenhang zu den Geschwindigkeitsvektordiagrammen ABCD nach den Abbildungen 1.2a und 1.2b ist durch den Satz von Kutta und Joukowski gegeben.

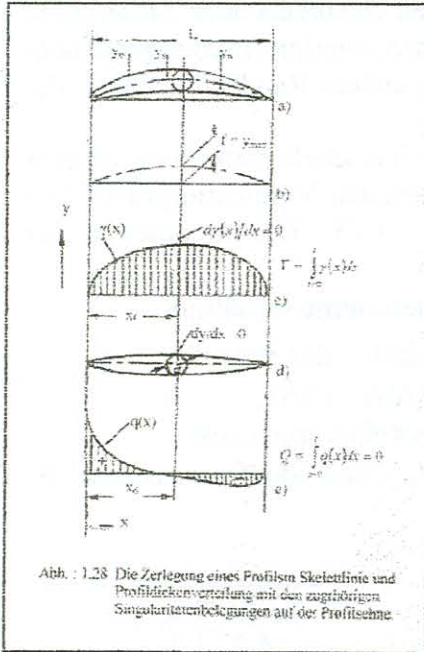
Für die Auftriebskraft an einem Profil gilt:

$$A = \rho W_{\infty} \Gamma$$

Mit der Zirkulation :

$$\Gamma = \oint w_s ds = \Delta w_u t = \int \gamma(x) dx$$

dabei kennzeichnet der Index s die Profilloberfläche und t die Teilung des Profilgitters. Das Gitterprofil mit Unterschallanströmung lässt sich somit in den Skelettlinienverlauf und einen Profildickenverlauf aufteilen. Eine solche Aufteilung zeigt die Abb.: 1.28.



Mit Hilfe der Singularitätenmethode lässt sich zeigen, dass eine elliptischen Zirkulationsverteilung entlang der Profilskelettlinie eine parabolisch gewölbte Skelettlinie der Profile ergibt. Als Näherung wird überwiegend statt der Skelettlinie die Sehnenlänge der Profile für die Zirkulationsbelegung verwendet, wobei zu den bezogenen Skelettlinienwölbungen von  $f/l < 15\%$  genügend genaue Ergebnisse erwartet werden können. Das hat den Vorteil, dass sich eine einfache Profilsystematik ergibt und die durch die Singularitäten induzierten Geschwindigkeiten nur an der Eintrittskante und an der Austrittskante des Gitterprofils ermittelt werden muss. Da die Kontur eines Profils, mit Ausnahme wenige technologischer Besonderheiten, eine gescene Kontur ergeben muss, ergibt sich für die Quell und Senkenbelegung die Schließbedingung:

$$Q = \int_0^1 q(x) dx = 0$$

Zur Ermittlung der am Gitterprofil von den Singularitäten induzierten Geschwindigkeiten wird die Glauert-sche Reihe für die Zirkulationsverteilung:

$$\gamma(x) = w_\infty \left[ A_0 c \tan \varphi / 2 + \sum_1^n A_n \sin(n\varphi) \right]$$

und für die Quell-Senkenbelegung:

$$q(x) = w_\infty \left[ B_0 c \tan \varphi / 2 + \sum_0^n B_n \sin(n\varphi) \right]$$

angesetzt.

Entsprechend der Abb.: 1.28 können die Konstanten  $A_0$  bis  $A_n$  aus den frei wählbaren Parametern ermittelt werden. Für die Wölbungsrücklage  $x_p/l=0,5$  ergeben sich gleiche Skelettlinienein- und -austrittswinkel ( $\kappa_1=\kappa_2$ ).

Für Profile mit reiner Unterschallströmung nach dem Schema der Abb.: 1.24 sind, hinsichtlich der Form entsprechend der Abb.: 1.28, die maximale Profildicke und die Dickenrücklage sowie die Hinterkantendicke frei wählbar. Der Nasenradius hängt in der Form  $B_n^2 = f(r_n/l)$  mit der Konstanten  $B_0$  zusammen.

Für Gitterprofile nach Abb.: 1.24 mit reiner Unterschallanströmung lassen sich feststehende Profilmfamilien aufbauen, die je nach den Anströmverhältnissen einsetzbar sind.

Das Singularitätenverfahren für Profiligitter mit reiner Unterschallanströmung nach Abb.: 1.24 macht explizite Aussagen über:

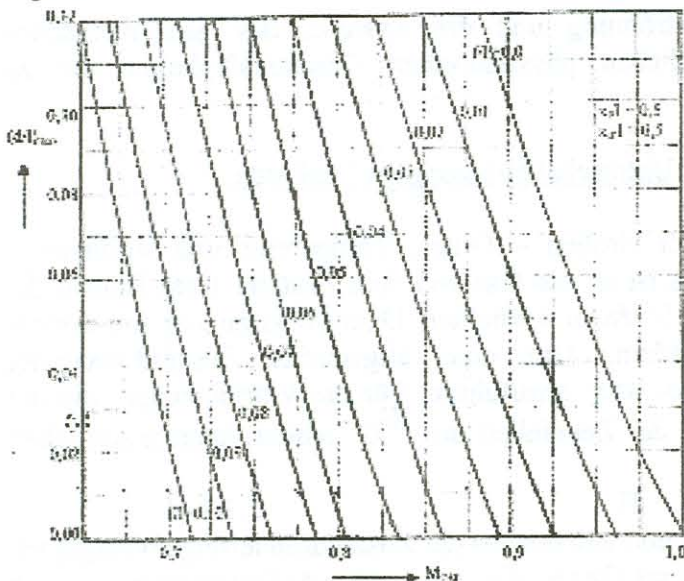
- Die Auftriebskraft bzw. den Auftriebsbeiwert in Zusammenhang mit den Satz von Kutta und Joukowski.
- Den Momentenbeiwert der Gitterprofile.
- Die Änderung der Druckpunktlage der Auftriebskraft in Abhängigkeit vom Anstellwinkel des Profils (siehe Abb.: 1.16).
- Die Profilfläche.
- Die Profilschwerpunktlage.
- Die Flächenwiderstandsmomente um die flache und hohe Kante.
- Den Drillwiderstand.

Für die allgemeine Praxis sind folgende Profilparameter empfehlenswert:

Anströmmachzahl $M_{w1}$	$x_f/l$	$x_d/l$
bis $M_{w1} \approx 0,75$	50%	40 bis 50%
bis $M_{w1} \approx 0,85$	50%	50 bis 60%
$M_{w1} > 0,85$	< 50%	60%

Die anzuwendende maximale Profildicke  $d/l$  ist abhängig von der Anströmmachzahl  $M_\infty$  und von der Profیلwölbung  $f/l$  der jeweiligen Profilsystematik. Die kritische Anströmmachzahl  $M_{okr}$  ist dabei jene, bei der auf der Profilkontur gerade die Schallgeschwindigkeit auftritt. Einen Anhalt für die zulässigen maximalen Profildicken bei einer Profilsystematik mit  $x_d/l = 0,5$  und  $x_f/l = 0,5$  unter Vernachlässigung des Grenzschichteinflusses auf der Profilverform vermittelt die Abb.: 1.29.

Feststehende Profilmfamilien für den Unterschallbereich der Profile mit Überschallanströmung sind unter Beachtung der Anschlussbedingungen an den davor liegenden Überschallteil nicht möglich.



Feststehende Profilmfamilien für den Unterschallbereich der Profile mit Überschallanströmung sind unter Beachtung der Anschlussbedingungen an den davor liegenden Überschallteil nicht möglich.

Abb.: 1.29 Maximale relative Profildicke  $d/l$  in Abhängigkeit von der kritischen Anströmmachzahl  $M_{kr}$  mit der Skelettlinienwölbung  $f/l$  als Parameter bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung.

Wie bereits angegeben liegt der Grund unter Wahrung der Gesetzmäßigkeiten der Verdichterstoßkombination beim Aufbau der Stoßfronten im Überschallbereich des Laufgitters. Hier ändern sich die Anschlussbedingungen für den Unterschallbereich des Profils über den Radius der Stufe laufend. Als Anschlussbedingungen und Randbedingungen sind zu nennen:

- Beginn der Sehnenlänge des Profils für den Unterschallbereich im Punkt E nach Abb.: 1.25 mit dem Eintrittswinkel  $\chi_1$  der Skelettlinienwölbung mit der Richtung  $\beta_1 - \delta/2$ .
- Im Einströmbereich des Unterschallteiles im Punkt E ist die Quellstärke  $Q = 2 \gamma_v w_\infty$  analog zu einer vorgegebenen Hinterkantendicke bei einem reinen Unterschallprofil.
- Im Punkt E (Abb.: 1.25) muss die Tangente der Dickenverteilung für den Unterschallteil  $dy/dx = \tan(\delta/2)$  sein.

Diese Forderungen bedingen einen sehr großen Rechenaufwand der ein Rechenprogramm für einen Computer rechtfertigt.

## 2. Die Zustandsänderung des Gases in einer Verdichterstufe.

Die Zustandsänderung eines Gases in einer Verdichterstufe wird durch eine Vergrößerung des statischen Druckes infolge einer Verzögerung der Strömungsgeschwindigkeit des Gases im Laufgitter hervorgerufen.

Bei reiner Unterschallströmung in der Verdichterstufe wird dies durch einen vorgeschriebenen Verlauf der Änderung der Strömungsrichtung des Gases beim Durchströmen des Laufgitters erreicht. Es handelt sich somit um eine Diffusorströmung.

Bei einer Überschallanströmung eines Laufgitters wird dagegen die Strömungsgeschwindigkeitsverzögerung durch ein System von Verdichtungsstößen bewirkt wobei gleichzeitig eine Umfangskomponente der Geschwindigkeit des Gases im Laufgitter erzeugt wird.

Die Wirkungsprinzipien der Diffusorströmung und des Systems des gasdynamischen Verdichtungsstoßes folgen unterschiedlichen physikalischen Gesetzmäßigkeiten die zu beachten sind.

### 2.1 Die Zustandsänderung des Gases bei Unterschallströmung im Laufgitter.

Der Zustand eines Gases ist durch drei Größen – Druck, Temperatur und Volumen – bestimmt. Die Aufgabe eines Verdichters ist es, ein Gas von dem Zustand 1 am Eintritt der Stufe auf den Zustand 2 am Austritt der Stufe zu verdichten. Damit müssen sich mindestens zwei Zustandsgrößen des Gases ändern. Um eine allgemeine Zustandsänderung herbeizuführen, ist eine Wärmemenge zu- bzw. abzuführen. Für die Wärmemenge, die die Masse von 1 Kilogramm eines Gases in der Zeiteinheit um  $1^\circ\text{C}$  erhöht, kann geschrieben werden:

$$dQ = c dT \quad 2.1.1$$

wobei  $c$  die spezifische Wärme des Gases und von der Art der Zustandsänderung abhängig ist. Betrachtet man die Zustandsänderung eines Gases, die von einem Anfangszustand 1 nach einen Endzustand 2 verläuft in einem  $p$ - $v$ -Diagramm (siehe Abb.: 2.1.1) /1/, so kann man eine beliebige Zustandsänderung in eine Aufeinanderfolge von unendlich kleinen Zustandsänderungen bei konstantem Druck und konstantem Volumen zerlegen.

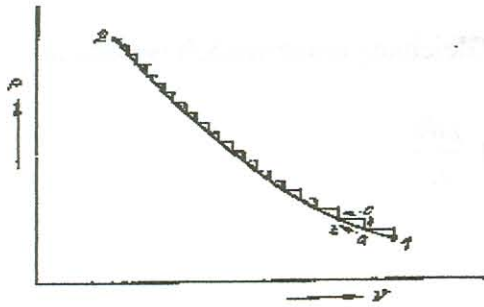


Abb.: 2.1.1 Zustandsänderung des Gases

Wenn man sich ein unendlich kleines Stück der Zustandsänderung  $a \rightarrow b$  herausgreift, so gelangt der Zustand des Gases von a zuerst über  $a \rightarrow c$  (Isopleth) und dann mit der Zustandsänderung  $c \rightarrow b$  bei konstantem Druck (Isobare) nach den Punkt b. Die zuzuführende Wärmemenge setzt sich dann aus den Anteilen der beiden kleinen Zustandsänderungen zusammen.

$$dQ_a^c = dQ_a^c + dQ_c^b$$

Für die einzelnen Anteile gilt:

$$dQ_a^c = c_v dT_v \quad \text{und} \quad dQ_c^b = c_p dT_p$$

Dabei ist:

$c_p$  = die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Druck

$c_v$  = die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Volumen

Schreiben wir die allgemeine Gasgleichung

$$p v = R T$$

In die Differentialform, so erhält man für das Temperaturdifferential:

$$dT = v dp/R + p dv/R$$

Die Gaskonstante R ist von des Art des Gases abhängig und stellt die in  $J/kg^0K$ , die von 1 Kg des betreffenden Gases bei Erwärmung um  $1^0K$  bei konstantem Druck verrichtet wird, dar. Wendet man diese Beziehung auf die Zustandsänderung an, erhält man bei einer Änderung mit konstantem Volumen:

$$dT_v = v dp/R$$

und somit:

$$dQ_a^c = c_v v dp/R.$$

Im Punkt c der Abb.: 2.1.1 hat das betrachtete Gas den Zustand  $v_T (p + dp)$  und  $T_p (T + dT)$ . Hier muß die Zustandsgleichung

$$(p + dp) v = R T_p$$

gelten. In Differentialform geschrieben ergibt sich:

$$(p + dp) v = R T_p$$

Da sich der Druck bei der Zustandsänderung von c nach b nicht ändert gilt auch:

$$R dT_p = p dv$$

Daraus erhält man

$$dT_p = p dv /R$$

oder für die Wärmemenge bei der Zustandsänderung von c nach b:

$$dQ_c^b = c_p p dv/R$$

Für die Gesamtwärmezufuhr der unendlich kleinen Zustandsänderung  $a \rightarrow b$  des Gases kann geschrieben werden:

$$dQ_a^b = c_v v dp/R + c_p p dv/R$$

Durch Hinzufügen der Glieder  $\pm c_v \frac{pdv}{R}$  kann die Gleichung umgewandelt werden in:

$$\begin{aligned} dQ &= \frac{c_v}{R} (vdp + pdv) + (c_p - c_v) \frac{pdv}{R} \\ &= \frac{c_v}{R} d(pv) + (c_p - c_v) \frac{pdv}{R} \end{aligned}$$

oder mit  $c_p - c_v = R$  und  $dT = \frac{d(pv)}{R}$

$$dQ = c_v dT + pdv \quad 2.1.2$$

Diese Gleichung gibt die mathematische Form des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik an. Dieser besagt, dass die zu- oder abgeführte Wärmemenge sich in einer Veränderung der inneren Energie des Gases, ausgedrückt durch das Glied  $dU = c_v dT$ , und einer äußeren Arbeit, ausgedrückt durch das Glied  $dh = pdv$ , bemerkbar macht. Die in einem Körper in beliebiger Form zugeführte Energie muss in ihm aufgespeichert werden da sie nach den ersten Hauptsatz nicht verloren gehen kann. Die Wärmeleichung des ersten Hauptsatzes lässt sich noch in der Form

$$\begin{aligned} dQ &= c_v dT + pdv + vdp - vdp \\ &= c_v dT + d(pv) - vdp \end{aligned}$$

und mit der inneren Energie  $dU = c_v dT$

$dQ = d(U + pv) - vdp$  darstellen.

Für den Klammerausdruck wurde die Zustandsgröße „Enthalpie“ eingeführt. Diese setzt sich aus der inneren Energie des Gases und der Verdrängungsarbeit  $pv$  zusammen. Für die Zustandsänderung bei konstantem Druck, also  $dp=0$ , gilt für die Enthalpie:

$$di = d(U + pv) = c_p dT \quad \text{Für die Gleichung des ersten Hauptsatzes gilt}$$

somit:

$$dQ = c_p dT - v dp$$

Der Ausdruck  $vdp$  stellt die vom Gas geleistete technische Arbeit“ dar. Findet kein Wärmeaustausch des Gases mit der Umgebung statt, so ist die durch das Gas in einer beliebigen Maschine geleistete technische Arbeit gleich dem Unterschied der Enthalpie des Gases.

Über die Größe der technischen Arbeit kann auf Grund der Gl. 2.1.3 noch keine Aussage gemacht werden weil das Volumen und der Druck zwei voneinander abhängige Größen sind. Wie die beiden Zustandsgrößen funktionell zusammengehören hängt von dem Weg des Zustandsverlaufes ab. So kann zum Beispiel die Änderung des Zustandes eines Gases von den Zustand 1 nach den Zustand 2 entsprechend der Abb.: 2.1.1 auf der Linie 1-2 verlaufen oder irgend einen anderen Weg nehmen. Entsprechend der Definition des ersten Hauptsatzes

ist das Integral der technischen Arbeit  $\int_1^2 pdv$  äquivalent der Fläche unter den

Zustandsverlauf

1-2 der Abb.: 2.1.1. Man erkennt also, dass bei einer Zustandsänderung auf verschiedenen Wegen auch die Größe der technischen Arbeit verschieden ist. Dividiert man die Gleichung des ersten Hauptsatzes durch die Temperatur und integriert sie, so erhält man:

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T} - p_1 v_1 \int_1^2 \frac{vdp}{T} \quad 2.14$$



Oder mit Hilfe der allgemeinen Gasgleichung:

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = c_p \int_1^2 \frac{dT}{T} - p_1 v_1 \int_1^2 \frac{dp}{pT} \quad 2.1.4a$$

Die so entstandene Beziehung ist integrierbar und unabhängig vom Weg, auf dem die Zustandsänderung des Gases verlaufen kann, geworden. Clausius hat für diesen Ausdruck den Begriff „Entropie“ eingeführt. Die Entropie ist, wie auch die Enthalpie, die Energie, der Druck die Temperatur und das Volumen eine Zustandsgröße des Gases und wird mit  $s$  bezeichnet. Bei der Zustandsänderung des Gases von einem Zustand 1 nach einen Zustand 2 treten immer nur Entropiedifferenzen auf. Damit ist aber die Wahl des Bezugszustandes der Entropie  $s_0$  unwesentlich. Entsprechend der Gleichung 2.1.5 kann man die Gesamtentropieänderung bei einem Zustandsverlauf des Gases in zwei Entropieänderungen zerlegen. Entsprechend einer Zustandsänderung bei konstantem Druck gilt:

$$\Delta s_p = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} \quad 2.1.5$$

und bei konstanter Temperatur:

$$\Delta s_T = v_1 \frac{p_1}{T_1} \int_1^2 \frac{dp}{p} = v_1 \frac{p_1}{T_1} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

oder mit der Gasgleichung  $pv = RT$ :

$$\Delta s_T = R \ln \frac{p_2}{p_1} \quad 2.1.6$$

Die Gesamtentropieänderung ist dann:

$$s_1 - s_2 = \Delta s = \Delta s_p - \Delta s_T \quad 2.1.7$$

Mit Hilfe der Gleichungen 2.1.5 und 2.1.6 hat man die Möglichkeit den Zustandsverlauf eines Gases in einem Temperatur- Entropie- Diagramm darzustellen.

Für den praktischen Gebrauch wird nach Baer /2/ anstelle aller Kurven gleichen Druckes nur die durch  $s = 0$  gehende Grundkurve entsprechend der Beziehung 2.1.5 eingezeichnet (siehe Abb.: 2.1.1)

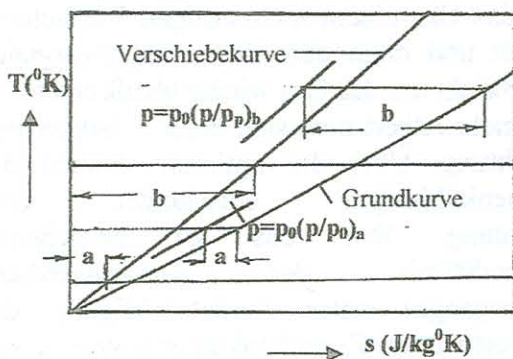


Abb.: 2.1.2 Zur Bestimmung des TS-Schaubildes

Verschiebt man die Grundkurve um den Betrag  $\Delta s_T$  parallel zur  $s$ -Achse nach links, so erhält man die Kurven für größere Drücke. Die Größe der Verschiebung wird durch die Verschiebelinie entsprechend der Gleichung 2.2.6 bestimmt.

Bei einem Entropie- Enthalpie- Diagramm tritt lediglich eine Verzerrung des Ordinatenmaßstabes, entsprechend den Werten der spez. Wärme des betreffenden Gases auf.

Zur Beantwortung der Frage welcher Weg für Die Verdichtung eines Gases am besten geeignet ist, betrachten wir wieder die Gleichung des Hauptsatzes:

$$\text{Wärmemenge} = \text{Enthalpie} - \text{technische Arbeit}$$

$$dQ = di - dh$$

Entsprechend dieser Beziehung kann man zwei Grenzfälle unterscheiden. Für den ersten Grenzfall setzt man  $dQ=0$ . Das bedeutet, dass die zur Verdichtung eines Gases von einem Zustand 1 auf einen Zustand 2 notwendig aufzuwendende Arbeit sich in eine Enthalpieerhöhung bemerkbar macht. Für  $dQ = 0$  ist aber auch die Enthalpiedifferenz des Gases bei der Zustandsänderung gleich Null. Der Zustandsverlauf des Gases kann im T-s-Schaubild durch eine Gerade zur Ordinate der Abb.: 2.1.3 dargestellt werden. Die Art der Zustandsänderung wird als „Isentrope“ bezeichnet.

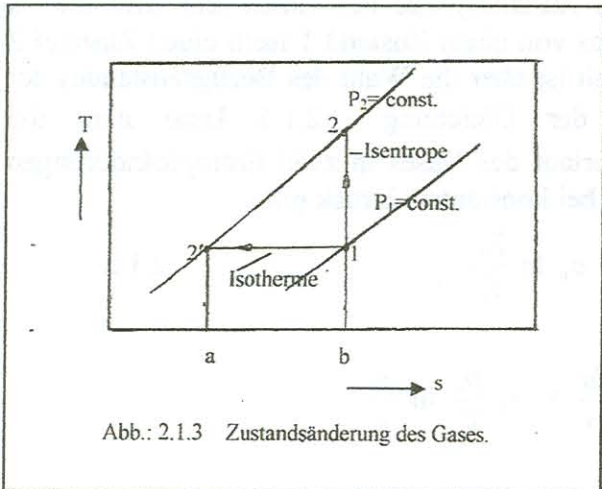


Abb.: 2.1.3 Zustandsänderung des Gases.

Für den zweiten Grenzfall der Zustandsänderung setzt man die Enthalpieänderung des Gases Null. Dabei bleibt aber auch die Temperatur des Gases konstant. Dieser Zustandsverlauf lässt sich damit als eine Gerade parallel zur Abszisse im T-s-Schaubild darstellen und wird als „Isotherme“ bezeichnet. Die für den Verdichtungsprozess dem Gas zuzuführende Arbeit drückt sich in eine abzuführende Wärmemenge, die der Fläche  $12'ab$  proportional ist, aus. Der Arbeitsaufwand zu Verdichtung eines Gases von den Druck  $p_1$  auf den Druck  $p_2$  der Fläche  $122'ab1$  und bei isothermer Verdichtung entsprechend der Fläche  $12'ab1$ . Bei isentroper Verdichtung ist somit ein Mehraufwand an Arbeit, entsprechend der Fläche  $122'1$  gegenüber der isothermen Verdichtung erforderlich. Wollte man in einer Axialverdichterstufe die isotherme Zustandsänderung erreichen, müsste man innerhalb der Stufe in der Zeiteinheit die gleiche Wärmemenge durch Kühlung dem Gas entziehen wie an notwendiger Arbeit zur Verdichtung erforderlich ist. Technisch ist dies aus baulichen Gründen in der Stufe nicht möglich. Der Verdichtungsprozess in einer Axialverdichterstufe erfolgt bei einer Zustandsänderung des Gases ohne Wärmezu- oder -abfuhr. Als ideale Zustandsänderung des Gases beim Verdichtungsprozess muss somit die „Isentrope“, d.h. die Zustandsänderung des Gases mit  $dQ=0$ , angesehen werden. Dem isothermen Verdichtungsprozess kann man sich nähern, wenn man nach einer zweckmäßigen Anzahl von Stufen das Gas einem mehrstufigen Verdichter entnimmt, in einem Zwischenkühler wieder abkühlt und dann den Verdichtungsprozess fortsetzt. Je öfter man den Verdichtungsprozess unterbricht um das Gas wieder abzukühlen,

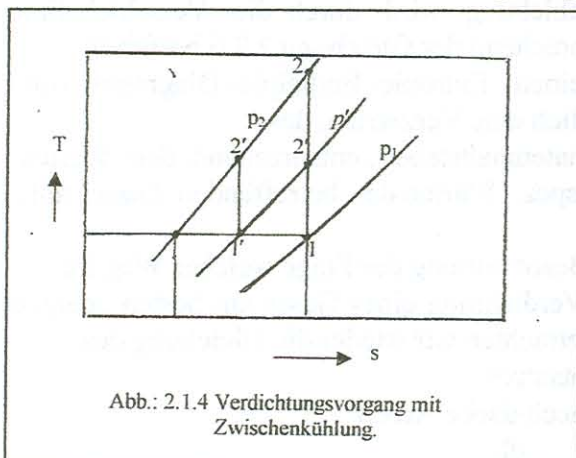


Abb.: 2.1.4 Verdichtungsprozess mit Zwischenkühlung.

umso mehr nähert man sich einer isothermen Verdichtung. Über die optimale Anzahl der Zwischenkühlungen entscheidet eine Betrachtung über das zu erreichende Druckverhältnis des Gesamtverdichtungsprozesses unter Berücksichtigung der Druckverluste im Zwischenkühler sowie dessen Bauaufwand. Die Abb.: 2.1.4 zeigt als Beispiel einen verlustlosen Verdichtungsprozess eines Gases im T-s-Schaubild. Wird das Gas nach der ersten isentropen Verdichtungsstufe  $12'$  in einem Zwischenkühler wieder auf die Anfangstemperatur ( $2'1'$ ) rückgekühlt und dann

weiter auf

den gewünschten Enddruck isentrop verdichtet ( $1' 2''$ ), so ist gegenüber der reinen isentropen Verdichtung des Gases von den Druck  $p_1$  auf den Druck  $p_2$  eine entsprechend der Fläche  $2' 1' 2'' 2 2'$  geringere Arbeit aufzuwenden. Das Prinzip der Zwischenkühlung findet häufig bei stationären Gasturbinenanlagen zur Verbesserung des thermodynamischen Prozesswirkungsgrades Anwendung.

Es wurde bereits angedeutet, dass die ideale Zustandsänderung eines Gases in einer Axialverdichterstufe die Isentrope ist, da abgesehen von der Wärmeabstrahlung, weder Wärme zu- noch abgeführt wird. Mit  $dQ=0$  erhält man nach der ersten Hauptsatz entsprechend der Beziehung 2.12

$$0 = c_v dT + p dv$$

oder mit Hilfe der allgemeinen Gasgleichung in Differentialform

$$R dT = p dv + v dp$$

und der Gleichung 2.1.2

$$0 = c_v dT + p dv$$

und der Beziehung  $R = c_p - c_v$

$$0 = c_v \frac{p dv + v dp}{R} + (c_p - c_v) \frac{p dv}{R}$$

$$0 = c_v v dp + c_p p dv$$

bzw.

$$0 = \frac{dp}{p} + \frac{c_p}{c_v} \frac{dv}{v}$$

Setzt man für das Verhältnis der spezifischen Wärmen

$$\frac{c_p}{c_v} = \kappa$$

so ergibt sich für eine isentrope Zustandsänderung eines Gases:

$$\int \frac{dp}{p} + \kappa \int \frac{dv}{v}$$

oder

$$p v^\kappa = \text{konstant.} \quad 2.1.8$$

Mit Hilfe der allgemeinen Gasgleichung kann die Abhängigkeit der Zustandsgrößen Druck, Temperatur und Volumen zwischen zwei Gaszuständen ermittelt werden.

$$p_1 v_1 v_1^{\kappa-1} = p_2 v_2 v_2^{\kappa-1}$$

$$R T_1 v_1^{\kappa-1} = R T_2 v_2^{\kappa-1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{v_1}{v_2} \right)^{(\kappa-1)} \quad 2.1.9$$

Oder mit der Gleichung 2.1.8:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \quad 2.1.10$$

Die zur isentropen Verdichtung eines Gases notwendige technische Arbeit ist nach der Beziehung 2.1.3 leicht zu ermitteln. Mit  $dQ=0$  wird:

$$h = \int di = c_{pm} \int dT = \int v dp$$

Soll die Zustandsänderung des Gases von einem Zustand 1 auf einen Zustand 2 erfolgen, so ergibt sich:

$$h = i_2 - i_1 = c_{pm} (T_2 - T_1) = \int_1^2 v dp$$

$c_{pm}$  ist die mittlere spezifische Wärme des Gases zwischen den Gaszuständen 1 und 2.

Das spezifische Volumen des Gases lässt sich nach den Gleichungen 2.1.9 und 2.1.10 wie folgend ausdrücken:

$$v = v_1 \left( \frac{p_1}{p} \right)^{1/\kappa}$$

Damit erhält die notwendige technische Arbeit des Gases folgende Form:

$$h_{is} = v_1 p_1^{1/\kappa} \int \frac{dp}{p^{1/\kappa}} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} p_1^{1/\kappa} v_1 (p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - p_1^{\frac{\kappa-1}{\kappa}})$$

$$h_{is} = i_2 - i_1 = c_{pm} (T_2 - T_1) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} p_1 v_1 \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1 \right] \quad 2.1.11$$

Ist in der Zeiteinheit eine technische Arbeit, also eine isentrope Energiezufuhr, gegeben, so lässt sich der Enddruck bzw. die Druckerhöhung leicht bestimmen.

$$p_2 = p_1 \left[ 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} h_{is} / (p_1 v_1) \right]^{\kappa / (\kappa - 1)}$$

oder mit der Gasgleichung  $p_1 v_1 = R T_1$  und  $c_p - c_v = R = c_p \left( \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right)$

$$p_2 = p_1 \left[ 1 + h_{is} / (c_p T_1) \right]^{\kappa / (\kappa - 1)} \quad 2.1.12$$

Für die Druckerhöhung erhält man :

$$\Delta p = p_2 - p_1 = p_1 \left[ 1 + h_{is} / (c_p T_1) \right]^{\kappa / (\kappa - 1)} - p_1 \quad 2.1.13$$

Mit der Gleichung 2.1.11 ist der Zusammenhang zwischen einem geforderten Druckverhältnis  $\pi = p_2 / p_1$  bei verlustloser Strömung des Gases mit einer Masse von 1 Kg /s und der Antriebsleistung des Verdichters hergestellt.

Die spezifische Wärme eines Gases setzt sich aus einer Druck- und einer Temperaturfunktion zusammen /1/. Die Druckfunktion wird bei den im Axialverdichterbau vorkommenden Relativ kleinen Gasdrücken allgemein vernachlässigt. Die meisten aller deutsch- und englisch- sprachigen Veröffentlichungen beziehen sich auf Tabellenwerte von Keenan und Kaye /3/. Eine schematische Darstellung der Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme der Luft zeigt die Abb.: 2.1.5.

Die in diesen Abschnitt angegebenen Zustandsänderungen eines Gases sind allgemein und beziehen sich auf die Gesamtzustandswerte eines Gases ohne auf den Unterschied zwischen den statischen und Gesamtzustandswerten einzugehen.

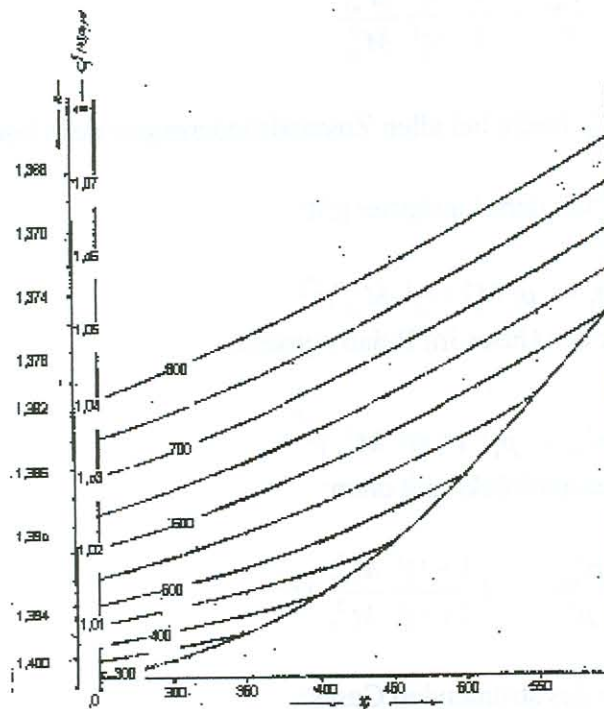


Abb.: 2.15 Mittlere spezifische Wärme bei konstantem Druck und der mittlere Isentropenexponent trockener Luft in Abhängigkeit der Temperatur vor der Zustandsänderung als Parameter.

## 2.2 Die Zustandsänderung des Gases bei Überschallanströmung der Laufgitter.

Die Zustandsänderung eines Gases bei Überschallanströmung eines Laufgitters im relativen Strömungssystem einer Axialverdichterstufe erfolgt nach den gasdynamischen Gesetzmäßigkeiten der Verdichtungsstöße. Da die Schaufelprofile eines Laufgitters technologisch im Eintrittsbereich mit einer endlichen Profildicke behaftet sind, ist die Anwendung nur eines geraden Verdichtungsstoßes nicht möglich. Im einfachsten Falle muss mit einer Kombination eines schrägen und eines geraden Verdichtungsstoßes gerechnet werden.

Ausgangspunkt für die Berechnung der Verdichtungsstöße im Laufgitter sind die Zustandswerte des Gases im relativen Strömungssystem vor dem Laufgitter. Die Zustandswerte des Gases im Absolutsystem vor dem Laufgitter. Die Zustandswerte des Gases im Absolutsystem vor dem Laufgitter sollen hier als bekannt vorausgesetzt sein. Mit den gasdynamischen Beziehungen  $\frac{T^*}{T_1} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{w1}^2$  (und andere) gelten folgende Umrechnungen vom absoluten Strömungssystem in das relative Strömungssystem.

Die statische Temperatur des Gases im Absolutsystem vor dem Vorleitgitter ist:

$$T_1 = T_1^* / (1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{w1}^2) \quad 2.2.1$$

und die Gesamttemperatur im Relativsystem:

$$\frac{T_{1rel}^*}{T_1} = 1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa} M_{w1}^2 \quad 2.2.2$$

Für das Verhältnis der Gesamttemperaturen gilt dann:

$$\frac{T_{rel}^*}{T_1^*} = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2}{1 - \frac{\kappa-1}{2} M_{c1}^2} \quad 2.23$$

Die Gesamttemperatur  $T_{rel}^*$  bleibt bei allen Zustandsänderungen des Gases im Laufgitter konstant.

Für den statischen Druck vor dem Laufgitter gilt:

$$p_1 = p_1^* / (1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{c1}^2)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad 2.24$$

und für den Gesamtdruck des Gases im Relativsystem:

$$p_{1rel}^* = p_1 (1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad 2.25$$

Für das Verhältnis der Gesamtdrücke gilt dann:

$$\frac{p_{1rel}^*}{p_1^*} = \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{c1}^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad 2.26$$

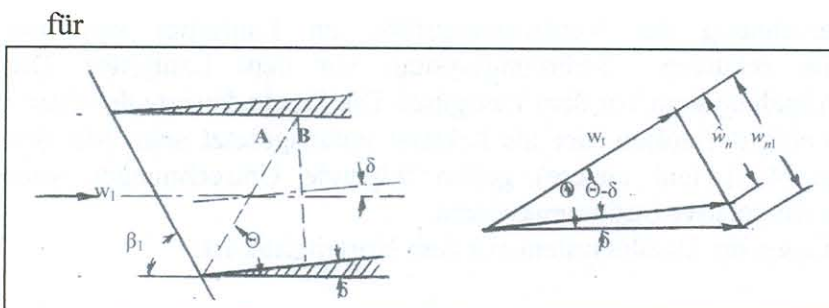
Analog gilt für die Dichte des strömenden Gases:

$$\frac{\rho_1^*}{\rho_1} = (1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{c1}^2)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad 2.27$$

Die statische Dichte  $\rho_1$  des Gases ist sowohl im absoluten als auch im relativen als auch im absoluten Strömungssystem vor dem Laufgitter gleich.

Es sollen nun die Beziehungen für den schrägen Verdichtungsstoß dargestellt werden, aus denen sich auch die Beziehungen für den geraden Verdichtungsstoß ergeben (siehe auch /4/, /5/, /6/, /7/, /8/ u.a.).

Alle dabei verwendeten Bezeichnungen für die Zustandswerte des Gases entsprechen jene im relativen Strömungssystem eines Laufgitters und sollen zur Vereinfachung nicht weiter als Solche gekennzeichnet werden.



A = Stoßfrontlage des schrägen Verdichtungsstoßes  
B = Stoßfrontlage des geraden Verdichtungsstoßes

Abb.: 2.2.1 Schematische Darstellung der Stoßfrontlagen und das

Geschwindigkeitsvektordiagramm für den schrägen Verdichtungsstoß.

$$\text{- den Impulssatz } \rho w_n^2 + p = \hat{\rho} w_n^2 + \hat{p} \quad 2.2.10$$

Ausgangspunkt für die Betrachtungen sind die Grundgleichungen für  
- die Kontinuität

$$\rho_1 w_1 = \hat{\rho} \hat{w} \quad 2.2.8$$

- die Energie

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{w^2}{2} =$$

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}} + \frac{\hat{w}^2}{2} \quad 2.2.9$$

Die mit  $\hat{\phantom{x}}$  gekennzeichneten Ausdrücke geben die Werte nach dem schrägen Verdichtungsstoß an.

Die Abb.: 2.2.1 zeigt schematisch die Stoßfrontlage eines schrägen Verdichtungsstoßes in einem Strömungskanal und das zugehörige Geschwindigkeitsdiagramm.

Die Tangentialgeschwindigkeit parallel zur Stoßfront  $w_t$  vor und nach einem schrägen Verdichtungsstoß ist gleich groß. Damit gilt:

$$w_n = \hat{\rho} \hat{w}_n$$

Durch Division mit der Schallgeschwindigkeit  $a = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}$  folgt:

$$\frac{w_n}{a} = \frac{\hat{\rho}}{\rho_1} \frac{\hat{w}_n}{a} \quad 2.2.11$$

Aus dem Energiesatz (Gl.: 2.2.9) ergibt sich mit  $w^2 = w_n^2 + w_t^2$ ,  $w_t = \text{konstant}$  und einer Division mit der Schallgeschwindigkeit:

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} \frac{1}{a^2} + \frac{w_n^2}{2a^2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}} \frac{1}{\hat{\rho}} + \frac{\hat{w}_n^2}{2a^2}$$

Da nun  $\frac{p}{\rho a^2} = \frac{1}{\kappa}$  ist, ergibt sich auch:

$$\frac{1}{\kappa-1} + \frac{w_n^2}{2a^2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho} a^2} + \frac{\hat{w}_n^2}{2a^2} \quad 2.2.9a$$

Dividiert man die Gl.: 2.2.10 für den Impulssatz noch durch  $\rho a^2$ , erhält man den Ausdruck:

$$\frac{w_n^2}{a^2} + \frac{1}{\kappa} = \frac{\hat{\rho}}{\rho} \frac{\hat{w}_n^2}{a^2} + \frac{\hat{p}}{\rho a^2} \quad 2.2.10a$$

Ersetzt man  $\hat{w}_n$  durch  $w_n$  nach Gl.: 2.2.11, so wird aus Gl.: 2.2.9a:

$$\frac{1}{\kappa-1} + \frac{w_n^2}{2a^2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{\hat{p}}{\rho a^2} + \frac{w_n^2}{2a^2} \frac{\rho^2}{\hat{\rho}^2} \quad 2.2.9b$$

und aus Gl.: 2.2.10a:

$$\frac{w_n^2}{a^2} + \frac{1}{\kappa} = \frac{\rho}{\hat{\rho}} \frac{w_n^2}{a^2} + \frac{\hat{p}}{\rho a^2} \quad 2.2.10b$$

Multipliziert man diese Gleichung mit  $\frac{\rho}{\hat{\rho}} \frac{\kappa}{\kappa-1}$  und stellt sie etwas um, so folgt:

$$\frac{\hat{p}}{\rho a^2} \frac{\rho}{\hat{\rho}} \frac{\kappa}{\kappa-1} = \frac{\rho}{\hat{\rho}} \frac{w_n^2}{a^2} \frac{\kappa}{\kappa-1} + \frac{\rho}{\hat{\rho}} \frac{1}{\kappa-1} - \frac{\rho^2}{\hat{\rho}^2} \frac{w_n^2}{a^2} \frac{\kappa}{\kappa-1}$$

Gleiches führen wir mit der Gl.: 2.2.9a durch und erhalten den Ausdruck:

$$\frac{\hat{p}}{\rho a^2} \frac{\rho}{\hat{\rho}} \frac{\kappa}{\kappa-1} = \frac{1}{\kappa-1} + \frac{w_n^2}{2a^2} - \frac{w_n^2}{2a^2} \frac{\rho^2}{\hat{\rho}^2}$$

Die letzten beiden Ausdrücke können gleich gesetzt werden. Multipliziert man sie noch mit  $\frac{\hat{\rho}^2}{\rho^2}$  so folgt:

$$\frac{1}{\kappa-1} \frac{\hat{p}^2}{\rho^2} + \frac{\hat{p}^2}{\rho} \frac{w_n^2}{2a^2} - \frac{1}{\kappa-1} \frac{\hat{p}}{\rho} - \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{\hat{p}}{\rho} \frac{w_n^2}{a^2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{w_n^2}{a^2} - \frac{w_n^2}{2a^2} = 0$$

Nach einigen Umformungen und Kürzungen erhält man für das Verhältnis der Dichten des Gases vor und nach einen schrägen Verdichtungsstoß:

$$\frac{\hat{p}}{\rho} = \frac{\frac{\kappa+1}{2} \frac{w_n^2}{a^2}}{1 + \frac{\kappa-1}{2} \frac{w_n^2}{a^2}} \quad 2.2.13a$$

Nach Abb.: 2.2.1 ist aber  $w_n = w_1 \sin \Theta$  und

$$\frac{w_n}{a} = \frac{w_1}{a} \sin \Theta \quad 2.2.12$$

Für das Verhältnis der Dichten des Gases gilt dann:

$$\frac{\hat{p}}{\rho} = \frac{\frac{\kappa+1}{2} M_1^2 (\sin \Theta)^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2 (\sin \Theta)^2} \quad 2.2.13$$

Aus der Gl.: 2.2.10b folgt:

$$\frac{\hat{p}}{\rho a^2} = \frac{w_n^2}{a^2} - \frac{\rho}{\hat{p}} \frac{w_n^2}{a^2} + \frac{1}{\kappa} = \frac{w_n^2}{a^2} \left(1 - \frac{\rho}{\hat{p}}\right) + \frac{1}{\kappa}$$

bzw. mit der Gleichung 2.2.10b:

$$\frac{\hat{p}}{\rho a^2} = \frac{w_n^2}{a^2} \left[1 - \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} \frac{w_n^2}{a^2}}{\frac{\kappa+1}{2} \frac{w_n^2}{a^2}}\right] + \frac{1}{\kappa} = \frac{\kappa+1}{2} \frac{w_n^2}{a^2} - \frac{\kappa-1}{2} \frac{w_n^2}{a^2} + \frac{1}{\kappa} - 1$$

Eine einfache Umformung unter Verwendung der Gl.: 2.2.12 ergibt:

$$\frac{\hat{p}}{\rho a^2} = \frac{2}{\kappa+1} \left[ M_1^2 \sin^2 \Theta - 1 + \frac{1}{\kappa} \right] \quad 2.2.14a$$

Da nun  $\frac{p}{\rho a^2} = \frac{1}{\kappa}$  ist, ergibt sich das Verhältnis der statischen Drücke vor und nach einen schrägen Verdichtungsstoß zu:

$$\frac{\hat{p}}{p} = \frac{2\kappa}{\kappa+1} M_1^2 \sin^2 \Theta \quad 2.2.14$$

Unter Verwendung der Gleichungen 2.2.11 und 2.2.13 ist auch:

$$\frac{\hat{w}_n}{w_n} = \frac{\rho}{\hat{p}} = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2 (\sin \Theta)^2}{\frac{\kappa+1}{2} M_1^2 (\sin \Theta)^2} \quad 2.2.15$$

Nach der Gasgleichung ist

$$\frac{\hat{T}}{T} = \frac{\hat{p}}{p} \frac{\rho}{\hat{\rho}}$$

und mit den Gleichungen 2.2.13 und 2.2.14



$$\frac{\hat{T}}{T} = \frac{\kappa M_1^2 (\sin \Theta)^2 - \frac{\kappa-1}{2}}{(\frac{\kappa+1}{2})^2 M_1^2 (\sin \Theta)^2} \left[ 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2 (\sin \Theta)^2 \right] \quad 2.2.16$$

In den Beziehungen 2.2.13; 2.2.14; 2.2.15 und 2.2.16 ist die Theorie des schrägen Verdichtungsstoßes auf die des geraden Verdichtungsstoßes zurückgeführt wobei statt der Geschwindigkeiten beim geraden Stoß hier die Normalkomponenten der Geschwindigkeiten auftraten.

Für die Energiegleichung am Laufgittereintritt gilt auch:

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{a^2}{2} + \frac{w_1^2}{2}$$

Verwendet man den Zusammenhang zwischen der statischen und der Gesamtmachzahl

$$a^{*2} = a^2 + \frac{\kappa-1}{2} w_1^2$$

so folgt auch :

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{a^{*2}}{\kappa-1} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1^*}{\rho_1^*}$$

Mit den Zusammenhang

$$a^{*2} = \frac{\kappa+1}{2} a'^2$$

zwischen der Gesamtmachzahl und der kritischen Machzahl ergibt sich:

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} a'^2 = \frac{a^{*2}}{\kappa-1} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_1^*}{\rho_1^*} \quad 2.2.17a$$

Weiterhin gilt:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p^*}{\rho^{*\kappa}} \quad 2.2.18a$$

Aus den ersten beiden Gliedern der Gl.: 2.2.17a folgt mit einer Division von  $a'^2/2$  und einer Multiplikation mit  $\frac{\kappa-1}{\kappa+1}$  der Ausdruck:

$$\frac{2\kappa}{\kappa+1} \frac{p_1}{\rho_1} \frac{1}{a'^2} = 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left( \frac{w_1}{a'} \right)^2 = \frac{\kappa}{a'^2} \frac{p_1}{\rho_1} = \kappa \frac{p_1}{\rho_1} \frac{\rho^*}{\rho_1^*} \frac{1}{\kappa} = \frac{p}{p^*} \frac{\rho^*}{\rho}$$

Verwendet man noch den Zusammenhang zwischen der kritischen Schallgeschwindigkeit mit der aus den Gesamtzuständen des Gases gebildeten Schallgeschwindigkeit

$$a'^2 = \frac{2}{\kappa+1} a^{*2}$$

so wird:

$$\frac{\kappa}{a^{*2}} \frac{p_1}{\rho_1} = 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left( \frac{w_1}{a'} \right)^2$$

und mit der Gl.: 2.2.18a:

$$\left(\frac{\rho}{\rho^*}\right)^{\kappa-1} = 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left(\frac{w_1}{a'}\right)^2$$

Damit gilt aber auch:

$$\left(\frac{p}{p^*}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{\rho}{\rho^*}\right)^{\kappa-1} = \frac{T}{T^*} = 1 - \frac{\kappa-1}{2} M'^2 \quad 2.2.19a$$

Analog zur Gl.: 2.2.17a gilt nach einem Verdichtungsstoß:

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}} + \frac{\hat{w}^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} a'^2 = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{\hat{p}^*}{\hat{\rho}^*}$$

und

$$\left(\frac{\hat{p}}{\hat{\rho}^*}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{\hat{\rho}}{\hat{\rho}^*}\right)^{\kappa-1} = \frac{\hat{T}}{T^*} = 1 - \frac{\kappa-1}{2} \hat{M}'^2 \quad 2.2.19b$$

Da auch

$$\frac{\hat{p}}{\hat{\rho}^\kappa} = \frac{\hat{p}^*}{\rho^{*\kappa}}$$

ist. Wendet man die Gleichungen 2.2.18a und 2.2.18b unmittelbar an der Stoßfront an so wird:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}^\kappa}$$

beziehungsweise:

$$\frac{p}{\hat{p}} \left(\frac{\hat{\rho}}{\rho}\right)^\kappa = \frac{p^*}{\hat{p}^*} \left(\frac{\hat{\rho}^*}{\rho^*}\right)^\kappa$$

Da die beiden Verhältnisse  $\frac{\hat{p}}{p}$  und  $\frac{\hat{\rho}}{\rho}$  nach dem zweiten Teil der Gleichungen 2.2.17a

und 2.2.17b gleich sind, sollen sie als Drosselfaktor K bezeichnet werden ( Die Gesamttemperatur im Relativsystem des Laufgitters ist konstant).

$$\frac{p}{\hat{p}} \left(\frac{\hat{\rho}}{\rho}\right)^\kappa = \frac{p^*}{\hat{p}^*} \left(\frac{\hat{\rho}^*}{\rho^*}\right)^\kappa = \frac{1}{K} K^\kappa = K^{\kappa-1} \quad 2.2.20$$

und mit den Gleichungen 2.2.13 und 2.2.14:

$$K = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \left[ \frac{M_1^2 (\sin \Theta)^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2 (\sin \Theta)^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \left[ \frac{1}{\kappa M_1^2 (\sin \Theta)^2 - \frac{\kappa-1}{2}} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

2.2.21

Da vor dem Verdichtungsstoß die Gasgleichung  $\frac{p^*}{\rho^*} = R T^*$  und nach den Verdichtungsstoß

$\frac{\hat{p}^*}{\hat{\rho}^*} = R \hat{T}^*$  gilt und sich durch den Verdichtungsstoß die Gesamttemperaturen nicht ändern

gilt auch:

$$\frac{\hat{p}^*}{p^*} = \left( \frac{\hat{\rho}^*}{\rho^*} \right)^\kappa = K \quad 2.2.22$$

Durch den Drosselfaktor ist die Berechnung des Druckes und der Temperatur nach den Verdichtungsstoß möglich, wenn der Winkel  $\Theta$  der Stoßfrontlage bekannt ist.

Der Entropiesprung des Gases an der Stoßfront lässt sich leicht durch den Drosselfaktor ausdrücken.

$$s = \frac{R}{\kappa - 1} \ln \frac{p}{\rho^\kappa}$$

Der Entropiesprung durch den Verdichtungsstoß ist:

$$\hat{s} - s = \frac{R}{\kappa - 1} \left[ \ln \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}^\kappa} - \ln \frac{p}{\rho^\kappa} \right] = \frac{R}{\kappa - 1} \ln \frac{p}{\hat{p}} \frac{\hat{\rho}^\kappa}{\rho^\kappa}$$

und mit Gl.: 2.2.20:

$$\hat{s} - s = \ln K^{\kappa-1} \quad 2.2.23$$

Wenden wir uns nun dem Keilwinkel  $\delta$  entsprechend der Abb.: 2.2.1 zu.

Unter der Voraussetzung dass die Tangentialgeschwindigkeit  $w_t$  vor und nach den Verdichtungsstoß gleich ist folgt:

$$\frac{\hat{w}_n}{w_n} = \frac{\tan(\Theta - \delta)}{\tan \Theta}$$

und der Gl.: 2.2.15

$$\tan((\Theta - \delta)) = \frac{\frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 (\sin \Theta)^2 + 1}{\frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 (\sin \Theta)^2} \quad 2.2.24$$

Setzt man :

$$\tan(\Theta - \delta) = \frac{\tan \Theta - \tan \delta}{1 + \tan \Theta \tan \delta}$$

lässt sich der Zusammenhang zwischen den Keilwinkel  $\delta$ , den Winkel  $\Theta$  der Stoßfrontlage beim schrägen Verdichtungsstoß und der Anströmmachzahl  $M_1$  herstellen.

$$\tan \Theta - \tan \delta = \frac{\frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 (\sin \delta)^2 + 1}{\frac{\kappa + 1}{2} M_1^2 (\sin \Theta)^2} [\tan \Theta + (\tan \Theta)^2 \tan \delta]$$

Mit einigen Umformungen der Gleichung und einigen Vereinfachungen ergibt eine Zwischenrechnung:

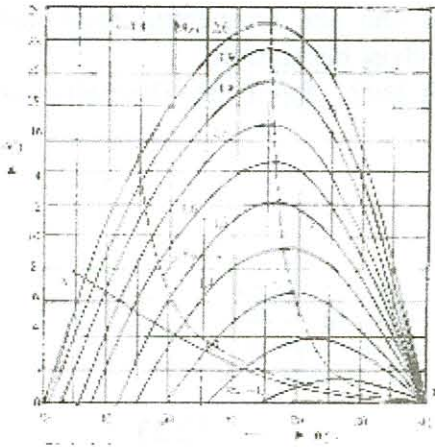
$$\cot \delta [M_1^2 \sin^2 \Theta - 1] = \left[ \left\{ \frac{M_1^2}{2} (\kappa + 1 - \sin^2 \Theta - (1 - \cos^2 \Theta)) \right\} + 1 \right] \tan \Theta$$

Eine weitere Umformung führt zu den Ausdruck:

$$\cot \delta = \left[ \frac{\frac{\kappa + 1}{2} M_1^2}{M_1^2 (\sin \delta)^2 - 1} - 1 \right] \tan \Theta \quad 2.2.25$$

Die Extremwertbestimmung für die Gl.: 2.2.25 in der Form  $\delta = \text{arc cot } z$  liefert für  $d\delta/d\theta = 0$

die Beziehung:



$$\sin^2 \Theta = \frac{\frac{\kappa+1}{2} M_1^2 - 2}{2\kappa M_1^2} \pm$$

$$\sqrt{\left( \frac{\frac{\kappa+1}{2} M_1^2 - 2}{2\kappa M_1^2} \right)^2 + \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2}{\kappa + M_1^4}} \quad 2.2.26$$

Die Auswertungen der Gleichungen 2.2.25 und 2.2.26 zeigt die Abb.: 2.2.2,

Für die Auslegung von Verdichtergittern sind diese Extremwerte nicht von Interesse. Darauf wird noch eingegangen.

Realisierbar sind die Werte auf der Linie AB Abb.: 2.2.2 Der Zusammenhang zwischen Der Anströmmachzahl der Stoßfrontlage und den Keilwinkel beim schrägen Verdichtungsstoß in einem Laufgitter.

Entsprechend der Abb.: 2.2.1 kann vor und hinter den schrägen Verdichtungsstoß gesetzt werden:

$$\frac{\hat{w}}{w_1} = \frac{\cos \Theta}{\cos(\Theta - \delta)}$$

Mit den gültigen trigonometrischen Additionstheoremen folgt dann:

$$\frac{\hat{w}}{w_1} = \frac{\sqrt{1 - (\cot \delta)^2}}{\cot \delta - \tan \Theta}$$

Durch Einsetzen der Gleichung 2.2.25 und Erweiterung der erhaltenen Beziehung erhält man nach einer Umformung den Ausdruck:

$$\frac{\hat{w}}{w_1} = \frac{M_1^2 (\sin \Theta)^2 - 1}{\frac{\kappa+1}{2} M_1^2 \sin \Theta} \sqrt{\left( \frac{\sin \Theta}{\tan \Theta} \right)^2 + (\sin \Theta)^2 \left[ \frac{\frac{\kappa+1}{2} M_1^2}{M_1^2 (\sin \Theta)^2 - 1} - 1 \right]^2}$$

Da nun

$$\left( \frac{\sin \Theta}{\tan \Theta} \right)^2 = 1 - (\sin \Theta)^2$$

ist ergibt sich:

$$\frac{\hat{w}}{w_1} = \frac{M_1^2 (\sin \Theta)^2 - 1}{\frac{\kappa+1}{2} M_1^2 \sin \Theta} \sqrt{1 - (\sin \Theta)^2 + (\sin \Theta)^2 \left[ \frac{\frac{\kappa+1}{2} M_1^2}{M_1^2 (\sin \Theta)^2 - 1} - 1 \right]^2} \quad 2.2.27$$

Analog kann das Verhältnis der Machzahlen vor und nach den schrägen Verdichtungsstoß angegeben werden:

$$\frac{\hat{M}}{M_1} = \frac{\hat{w}}{\hat{a}} \frac{a}{w_1} = \frac{\hat{w}}{w_1} \sqrt{\frac{\hat{T}}{T}}$$

oder mit den Gleichungen 2.2.27 und 2.2.16:

$$\hat{M} = (M_1^2 \sin^2 \Theta - 1) \sqrt{\frac{1 - (\sin \Theta)^2 + (\sin \Theta)^2 \left[ \frac{\frac{\kappa+1}{2} M_1^2}{M_1^2 (\sin \Theta)^2} - 1 \right]}{\left[ \kappa M_1^2 (\sin \Theta)^2 - \frac{\kappa-1}{2} \right] \left[ 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2 (\sin \Theta)^2 \right]}} \quad 2.2.28$$

Damit können auch die Gesamtzustände des Gases nach den schrägen Verdichtungsstoß ermittelt werden. Für den Druck gilt:

$$\frac{\hat{p}^*}{\hat{p}} = \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} \hat{M}^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad 2.2.29$$

Der Gesamtdruck nach den Verdichtungsstoß kann aber auch mit der Drosselzahl nach Gl.:2.2.21 und Gl.: 2.2.22 errechnet werden. Während des Stoßvorganges bleibt die Gesamttemperatur des Gases konstant

$$T_1^* = \hat{T}^*$$

Damit ist auch die Dichte des Gases gegeben.

Wie die Gleichung 2.2.23 zeigt, tritt während des Verdichtungs Vorganges ein Entropiesprung auf. Dieser Vorgang ist mit Verlusten behaftet. Für des Stoßwirkungsgrad gilt:

$$\eta_{st} = 1 - \frac{\Delta p^*}{\Delta p} = 1 - \frac{p_1^*}{p_1} \frac{1 - \frac{\hat{p}^*}{p_1^*}}{\frac{\hat{p}}{p_1} - 1} \quad 2.2.30$$

Alle bisher angeführten Gleichungen für den schrägen Verdichtungsstoß behalten für den geraden Verdichtungsstoß ihre Gültigkeit, wenn der Stoßfrontwinklen  $\Theta = 90^\circ$  und für die Machzahl  $M_1 = \hat{M}$  gesetzt wird /8/.

Wie die Abb.: 2.2.2 zeigt, ist der Keilwinkel  $\delta$  eine Funktion der Stoßfrontlage des schrägen Verdichtungsstoßes als auch der Anströmmachzahl  $M_1$  des Gases zum Laufgitter.

Die Gl.: 2.2.25 für den Keilwinkel  $\delta$  beim schrägen Verdichtungsstoß ist eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Um eine eindeutige Lösung zwischen den beiden Unbekannten zu erhalten ist hierfür eine zweite Gleichung erforderlich. Diese zweite Gleichung ergibt sich aus der Geometrie die den Zusammenhang zwischen den Keilwinkel  $\delta$ , den Winkel  $\Theta$  für die Stoßfrontlage des schrägen Verdichtungsstoßes und den engsten Querschnitt  $F_{\min}$ , wo erstmalig die Schallgeschwindigkeit des Gases auftritt, im Laufgittereintritt angibt.

Die Abb.:2.2.3 zeigt schematisch die Stoßfrontlage für den schrägen Verdichtungsstoß und die Stoßfrontlage für den geraden Verdichtungsstoß für eine Auslegungsmachzahl  $M_1$ .

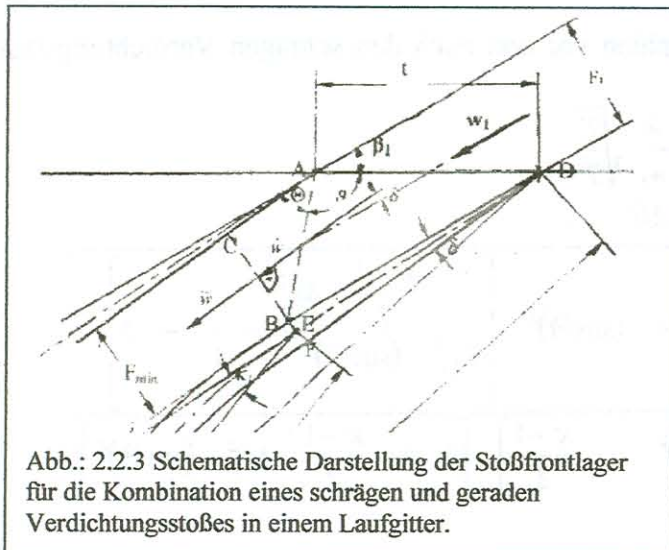


Abb.: 2.2.3 Schematische Darstellung der Stoßfrontlager für die Kombination eines schrägen und geraden Verdichtungsstoßes in einem Laufgitter.

Beim Hochfahren des Strömungssystems bis zur Auslegungsmachzahl wird die Lage der Stoßfront A des schrägen Verdichtungsstoßes, ausgehend von der Stoßfrontlage B des geraden Verdichtungsstoßes, bis zum Eintritt des Laufgitters entsprechend der Abb.:2.2.3 verschoben. Der Querschnitt  $F_{\min}$ , in dem die Schallgeschwindigkeit des Gases beim Anfahren des Strömungssystems erstmalig auftritt, kann leicht ermittelt werden.

Die Kontinuitätsgleichung liefert:

$$F_1 \rho_1 \sqrt{\kappa R T_1} M_1 = F_{\min} \rho_2 \sqrt{\kappa R T_2} M_2$$

bzw.:

$$\frac{F_1}{F_{\min}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \frac{1}{M_1}$$

da die Machzahl im Querschnitt  $F_{\min}$  gleich  $M_2 = 1$  sein soll.

Werden die statischen Zustandswerte des Gases

$$\frac{T^*}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2$$

$$\frac{\rho^*}{\rho} = \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$

umgerechnet und weiterhin die Gasgleichung

$$\rho^* = \frac{p^*}{R T^*}$$

verwendet, so ergibt sich nach einer kleineren Umrechnung:

$$\frac{F_1}{F_{\min}} = \frac{p_2^*}{p_1^*} \frac{1}{M_1} \left( \frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2}} \right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}$$

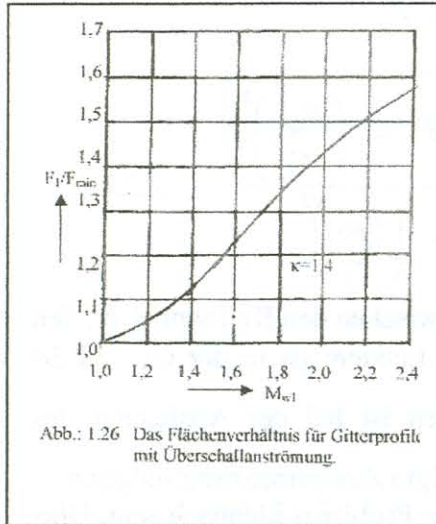
wobei berücksichtigt wurde, dass sich die Gesamttemperatur des Gases im relativen Strömungssystem des Laufgitters nicht ändert. Für das Druckverhältnis  $\frac{p_2^*}{p_1^*}$  kann der

Drosselfaktor K nach der Gleichung 2.2.21 für den geraden Verdichtungsstoß ( $\sin \Theta = \sin 90^\circ = 1$ ) in der Form

$$K = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} \left[ \frac{M_1^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \left[ \frac{1}{\kappa M_1^2 - \frac{\kappa - 1}{2}} \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$

Verwendet werden. Damit gilt dann:

$$\frac{F_1}{F_{\min}} = \frac{K}{M_1} \left[ \frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2}} \right]^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}} \quad 2.2.31$$



Eine Auswertung dieser Gleichung zeigt die Abb.:2.2.4. Die Abb.:2.2.3 zeigt schematisch die Stoßfrontlagen der Verdichtungsstöße für den Auslegungszustand eines Laufgitters. Dabei ist:  
 Strecke AB = Stoßfrontlage für den schrägen Verdichtungsstoß  
 Strecke BC = Stoßfrontlage für den geraden Verdichtungsstoß  
 $\delta$  = Keilwinkel der Laufgitterprofile.

An der Stoßfrontlage AB wird die Strömungsrichtung des Gases um den Keilwinkel  $\delta$  von der Anströmrichtung  $\beta_1$  abgelenkt.

Für das Dreieck ABD gilt der Sinussatz für das

schiefwinklige Dreieck

$$DB : AB : AD = \sin \vartheta : \sin \beta_1 : \sin \Theta$$

Daraus folgt mit  $AD = t$  als Teilung der Laufgitterbeschaufelung

$$\sin \beta_1 = \frac{F_1}{t}$$

für die Stoßfront des schrägen Verdichtungsstoßes

$$AB = \frac{F_1}{\sin \Theta} \quad 2.2.32$$

Aus den Betrachtungen des Dreieckes ABC erhält man:

$$\sin(\Theta - \delta) = \frac{CB}{AB}$$

$$CB = F_1 \frac{\sin(\Theta - \delta)}{\sin \Theta}$$

Da aber  $CB = F_{\min}$  ist gilt auch:

$$\frac{F_1}{F_{\min}} = \frac{\sin \Theta}{\sin(\Theta - \delta)} \quad 2.2.33$$

Mit den trigonometrischen Beziehungen

$$\sin(\Theta - \delta) = \sin \Theta \cos \delta - \cos \Theta \sin \delta$$

und

$$\sin \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \delta}}$$

$$\frac{F_{\min}}{F_1} = \sqrt{1 + (\cot \delta)^2} = \cot \delta - \cot \Theta$$

Bildet man das Quadrat dieser Gleichung und stellt sie etwas um, ergibt sich die quadratische Gleichung:

$$(\cot \delta)^2 - \frac{\cot \delta \cot \Theta}{1 - \left(\frac{F_{\min}}{F_1}\right)^2} + \frac{(\cot \Theta)^2 - \left(\frac{F_{\min}}{F_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{F_{\min}}{F_1}\right)^2}$$

mit der Lösung:

$$\cot \delta = \frac{\cot \Theta}{1 - \left(\frac{F_{\min}}{F_1}\right)^2} + \sqrt{\left[\frac{\cot \Theta}{1 - \left(\frac{F_{\min}}{F_1}\right)^2}\right]^2 - \frac{(\cot \Theta)^2 - \left(\frac{F_{\min}}{F_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{F_{\min}}{F_1}\right)^2}} \quad 2.2.34$$

Wie auch bei der Gl.: 2.2.25 besteht hier ein Zusammenhang zwischen den Keilwinkel  $\delta$ , den Winkel  $\Theta$  der Stoßfrontlage und der Anströmmachzahl  $M_1$ . Letztere ist in der Gl.: 2.2.34 latent in den Ausdruck  $F_{\min}/F_1$  enthalten. Streng genommen ist bei der Auslegung des

Überschallteiles des Laufgitters nur der in der Gl.: 2.2.34 gezeigte Zusammenhang möglich. Die Gleichungen 2.2.25 und 2.2.34 müssen für eine Lösung des Problems identisch sein. Dies ist der Fall, wenn der Verlauf der Gleichungen  $\delta = f(\Theta)$  mit  $M_1$  als Parameter einen Schnittpunkt ergeben. Die Abb.: 2.2.2 zeigt die Schnittpunkte der Gl.: 2.2.34 mit den

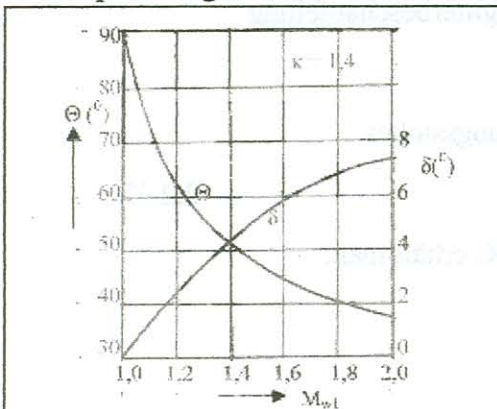


Abb.: 2.2.5 Die Abhängigkeit des Stoßfrontwinkels  $\Theta$  und des Keilwinkels  $\delta$  für den schrägen Verdichtungsstoß in einem Laufgitter.

Kurvenverlauf nach Gl.: 2.2.25. Damit kann aus der Abb.: 2.2.2 auch der Stoßfrontwinkel  $\Theta$  genügend genau abgelesen werden. Den Keilwinkel  $\delta$  selbst errechnet man wegen einer besseren Genauigkeit vorteilhafter mit der Gl.: 2.2.25. Somit erhält man einen Zusammenhang zwischen der Anströmmachzahl  $M_1$  mit den Stoßfrontenwinkel  $\Theta$  und den Keilwinkel  $\delta$  in einem Laufgitter. Die erhaltenen Werte zeigt die Abb.: 2.2.5.

Eine andere und genauere Möglichkeit zur Ermittlung dieser Zusammenhänge ist ein Gleichsetzen der Beziehungen 2.2.25 und 2.2.34 mit einer Eliminierung des Stoßfrontenwinkels  $\Theta$ . Mit der Kenntnis der Winkel  $\theta$  und  $\delta$  sind auch die Intensitäten des schrägen und geraden Verdichtungsstoßes eine Stoßkombination bekannt. Damit muss man auch erkennen, dass in einem

Laufgitter mit einer Überschallanströmung durch das Gas bei der Kombination eines schrägen Verdichtungsstoßes mit einem geraden Verdichtungsstoß für eine vorgegebene Anströmmachzahl  $M_1$  es immer nur eine Lösung gibt.



### 2.3 – Die Zustandsänderung des Gases in einem mehrstufigen Verdichter.

Bei einer isentropen Zustandsänderung des Gases, d.h. verlustlosen Verdichtungsprozess, in den Stufen eines mehrstufigen Verdichters würde die Summe der einzelnen Energiezufuhren an das zu verdichtende Gas je Stufe gleich der isentropen Gesamtenergie betragen. Erfolgt der Verdichtungsprozess hingegen verlustbehaftet, ergibt sich infolge der Divergenz der Linien  $p = \text{konst.}$  im T-s-Diagramm (siehe Abb.: 2.1.2) die Ungleichheit:

$$\sum h'_{is} < \sum h_{is} \quad 2.3.1$$

Diese Erscheinung wird als „thermodynamischer Verlust“ bezeichnet und findet eine Parallele im Turbinenbau beim thermodynamischen Rückgewinn. Unter der Voraussetzung gleicher Wirkungsgrade in den einzelnen Verdichterstufen kann man setzen

$$\frac{1}{\eta_0} \sum h_{is} = H_{th} = \frac{H_{is}}{\eta_{is}} \quad 2.3.2$$

wobei  $H_{th}$  die zur Erzeugung des geforderten Druckverhältnisses erforderliche theoretische Energiezufuhr an das Gas ist. Aus dieser Beziehung ist leicht zu erkennen, dass

$$\eta_{is} < \eta_0$$

sein muss.

Im Grenzfall unendlich kleiner Energiezufuhren an das Gas, wobei  $dH_{is} = \eta_0 dH_{th}$  sein soll, gilt nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik

$$dQ = (1 - \eta_0) c_p dT = c_p dT - v dp$$

daraus wird:

$$\frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{1}{\eta_0}$$

bzw.

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa \eta_0}}$$

Setzt man noch

$$\frac{T_{2is}}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}$$

So wird für ein konstantes  $c_p$  der isentrope Wirkungsgrad:

$$\eta_{is} = \frac{H_{is}}{H_{th}} = \frac{T_{2is} - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{\left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1}{\left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{1}{\eta_0}} - 1} \quad 2.3.3$$

Schreibt man die Ungleichung 2.3.1 in der Form

$$(1 + f_\infty) H_{is} = \sum h$$

wobei man den Wert  $(f_\infty + 1)$  als thermodynamischen Verlustfaktor des Verdichters bezeichnet, so folgt:

$$1 + f_\infty = \frac{\eta_0}{\eta_{is}}$$

und mit der gl.: 2.3.3:

$$1 + f_{\infty} = \frac{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \frac{1}{\eta_0} - 1}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1} \eta_0 \quad 2.3.4$$

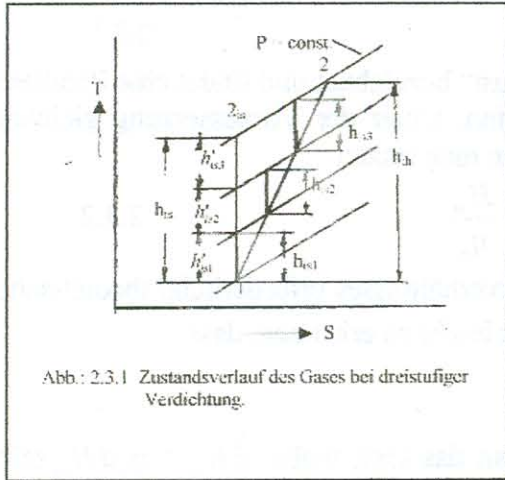


Abb.: 2.3.1 Zustandsverlauf des Gases bei dreistufiger Verdichtung.

Die Abb.: 2.3.2 zeigt die Werte des thermodynamischen Verlustfaktors  $f_{\infty}$  für Luft in Abhängigkeit vom Druckverhältnis des Verdichters mit den Parameter  $\eta_0$  für unendliche Stufenzahl bzw. für eine unendliche Anzahl von Elementarzustandsänderungen.

Die wirklichen Zustandsänderungen des Gases vollziehen sich jedoch in einer endlichen Anzahl von Verdichterstufen, so dass der Verlustfaktor noch einer Umrechnung bedarf. Dies geschieht zweckmäßig an Hand der Abb.:2.3.3.

Den Zustandsverlauf des Gases im Verdichter bei unendlicher Stufenzahl kann man sich aus lauter Unendlich kleine Zustandsverläufe entlang der Linie 1-2<sub>th</sub> vorstellen. Bei endlicher Stufenzahl verläuft die Zustandsänderung entlang der gezeichneten Treppenlinie vom Zustand 1 nach den Zustand 2<sub>th</sub>.

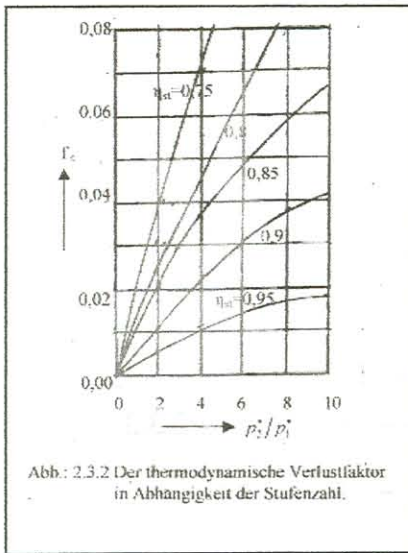


Abb.: 2.3.2 Der thermodynamische Verlustfaktor in Abhängigkeit der Stufenzahl.

Die Energiezufuhr bei isentroper Verdichtung entspricht der Fläche

$$2_{is} BCD 2_{is}$$

Die entsprechende Fläche für die Gesamtenergiezufuhr ist:

$$2_{th} ACD 2_{th}$$

Da die bei unendlicher Stufenzahl durch Verluste entstandene Wärme der Fläche

$$1 2_{th} AB1$$

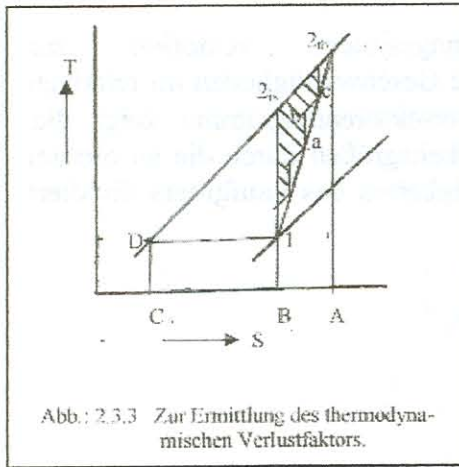
entspricht, kann man für thermodynamischen Verlustfaktor bei unendlich kleinen Zustandsänderungen auch setzen:

$$f_{\infty} = \frac{\text{Fläche } 2_{th} 1 2_{is} 2_{th}}{\text{Fläche } 2_{is} B C D 2_{is}}$$

Bei unendlicher Stufenzahl müssen die nicht schraffierten kleinen Dreiecke, die bei gleichen infinitesimalen

Stufenwirkungsgrad  $\eta_0$  und gleicher Energieaufnahme in den Stufen gleich sind, von der Fläche  $2_{th} 1 2_{is} 2_{th}$  in Abzug gebracht werden. Da diese kleinen Dreiecke ähnlich den Dreieck  $1 2_{is} 2_{th} 1$  sind, so ist mit z als Stufenzahl:

$$\text{Fläche } abc = \frac{\text{Fläche } 1 2_{is} 2_{th} 1}{z^2}$$



Alle kleinen Dreiecke zusammen ergeben:

$$z \text{ Fläche } abc \approx \frac{\text{Fläche } 1 \ 2_{is} \ 2_{th} \ 1}{z}$$

Damit ist es leicht, den thermodynamischen Verlustfaktor für eine endliche Stufenzahl zu finden.

$$f_z \cong \frac{\text{Fläche } 2_{th} \ 1 \ 2_{is} \ 2_{th}}{\text{Fläche } 2_{is} \ B \ C \ D \ 2_{is}}$$

$$\frac{\text{Fläche } 2_{th} \ 1 \ 2_{is} \ 2_{th}}{z \text{ Fläche } 2_{is} \ B \ C \ D \ 2_{is}}$$

oder:

$$f_z = f_\infty \left(1 - \frac{1}{z}\right) \quad 2.3.5$$

Definiert man den infinitesimalen Stufenwirkungsgrad als polytropen Wirkungsgrad

$$\eta_0 = \eta_{pol}$$

So gilt:

$$1 + f_\infty = \frac{\eta_{pol}}{\eta_{is}} \quad 2.3.6$$

Oder bei endlicher Stufenzahl des Verdichters:

$$1 + f_\infty (1+z) = \frac{\eta_{stm}}{\eta_{is}} \quad 2.3.7$$

wobei  $\eta_{stm}$  den mittleren Stufenwirkungsgrad des Verdichters darstellt. Diesen erhält man aus der Kombination der Gleichungen 2.3.6 und 2.3.7 zu:

$$\eta_{stm} = \eta_{is} + \left(1 - \frac{1}{z}\right)(\eta_{pol} - \eta_{is}) \quad 2.3.8$$

Der polytrope Wirkungsgrad ist bequem aus der Gleichung 2.3.3 zu ermitteln.

$$\eta_{pol} = \frac{\log \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{\log \left( 1 + \frac{1}{\eta_{is}} \left[ \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \right)} \quad 2.3.9$$

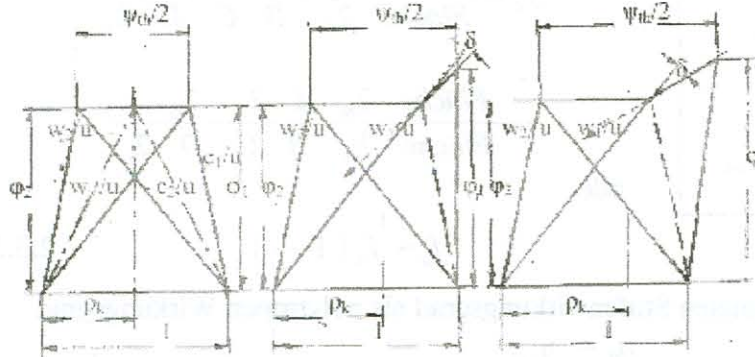
### 3. Das Stufenelement.

#### 3.1 Die Geschwindigkeiten des Gases im Stufenelement.

Unter einem Stufenelement sei ein koaxial zur Verdichterachse mit dem Radius  $r$  gelegter Zylinderschnitt durch das Laufgitter eines Axialverdichters verstanden werden.

Ein vor dem Laufgitter stehender Betrachter (absolutes Strömungssystem) würde die Zuströmgeschwindigkeit des Gases entsprechend der Größe  $c_1$  in der Strömungsebene I messen können. Würde sich aber der Betrachter mit dem Laufgitter mitbewegen (relatives Strömungssystem) erhielte er als Ergebnis seiner Messung die Zuströmgeschwindigkeit des Gases die Größe  $w_1$ . Ähnliches gilt auch für die Strömungsebene II am Laufgitteraustritt.

Die Geschwindigkeiten im absoluten Strömungssystem vektoriell zur Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters addiert ergeben die Geschwindigkeiten im relativen Strömungssystem. Die so entstandenen Geschwindigkeitsvektordiagramme zeigt die Abb.: 3.1.1 in dimensionsloser Form, da alle Geschwindigkeitsgrößen durch die an diesem koaxialen Zylinderschnitt vorhandenen Umfangsgeschwindigkeiten des Laufgitters dividiert sind.



- a) für Stufen mit Unterschallanströmung des Laufgitters
- b) für Stufen mit Überschallanströmung des Laufgitters ohne Vorleitgitter
- c) für Stufen mit Überschallanströmung des Laufgitters mit Vorleitgitter

Abb.: 3.1.1 Geschwindigkeitsvektordiagramme.  
(siehe auch Abb.: 1.2)

Durch die Division der Geschwindigkeiten in den Strömungsebenen I und II (siehe auch Abb.: 1.2) durch die Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters ergeben sich die bekannten dimensionslosen Kennzahlen. Diese sind:

Die Druckzahl 
$$\psi_{th} = \frac{2\Delta w_u}{u} = \frac{2\Delta c_u}{u} = \frac{2h_{th}}{u^2} \quad 3.1.1$$

Die Lieferzahl 
$$\varphi = \frac{c_{ax}}{u} \quad 3.1.2$$

Der kinematische Reaktionsgrad 
$$\rho_k = 1 - \frac{c_{u\infty}}{u} = \frac{w_{u\infty}}{u} \quad 3.1.3$$

Dabei ist:

- $\Delta c_u$  die Differenz der Umfangskomponenten der Strömungsgeschwindigkeiten zwischen den Strömungsebenen I und II wobei auch  $\Delta c_u = \Delta w_u$  ist und ein Maß für die Energiezuführung an das Gas im Laufgitter ist.
- $c_{u\infty}$  die mittlere Umfangskomponente der Absolutgeschwindigkeiten
- $u$  die Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters am betrachteten Zylinderschnitt des Laufgitters.

### 3.2 Die Energieübertragung im Stufenelement.

Die Druckerhöhung im Gas erfolgt in einem Laufgitter und einem nachfolgenden Leitgitter einer Verdichterstufe. Dabei wird die Energie an das Gas durch eine Vergrößerung seines

Bewegungsimpulses im Laufgitter übertragen. Im nachfolgenden Leitgitter muss notwendigerweise die absolute Strömungsgeschwindigkeit wieder verzögert werden wenn der Vorgang wiederholt stattfinden soll. Beim Durchgang des Gases durch das Laufgitter wird der absoluten Strömungsgeschwindigkeit eine Richtungsänderung aufgezwungen. Die dazu notwendige Kraft übt das Laufgitter infolge der Schaufelkrümmung auf das Gas aus. Nach den Gesetzen der Mechanik muss der von dem Laufgitter auf das Gas ausgeübten Kraft von diesem eine gleich große Gegenkraft entgegengesetzt werden. Nach den Impulssatz gilt:

$$P dt = \dot{m} dc$$

Wobei  $\dot{m}$  die sekundliche Masse des strömenden Gases ist. Für 1 Kg Masse in der Zeiteinheit von einer Sekunde wird:

$$P = \int_1^2 dc$$

Da sich die Schaufeln des Laufgitters nur in Umfangsrichtung bewegen können, ist eine Energieübertragung an das Gas auch nur durch die Umfangskomponente der Kraft möglich.

Demnach ist:

$$P_u = \int_1^2 dc_u = c_2 \cos \alpha_2 - c_1 \cos \alpha_1$$

Mit der Umfangsgeschwindigkeit  $u$  des betrachteten Laufgitterelementes ist die vom Laufgitter an das Gas mit einem Massendurchsatz von 1Kg/s übertragene Energie

$$h_{th} = P_u u = u (c_2 \cos \alpha_2 - c_1 \cos \alpha_1) = u (c_{u2} - c_{u1}) = u \Delta c_u \quad 3.2.1$$

Da nach dem Geschwindigkeitsvektordiagramm (Abb.: 3.1.1) auch  $\Delta c_u = \Delta w_u$  ist, gilt auch:

$$h_{th} = u \Delta c = u \Delta w_u \quad 3.2.2$$

Bringt man in die Gleichung 3.2.2 noch die Druckzahl nach Gleichung 3.1.1 und das Druckverhältnis der Verdichterstufe hinein, so erhält man den für den Verdichterbau wichtigen Zusammenhang:

$$h_{th} = u \Delta w_u = \frac{\psi_{th}}{2} u^2 = \frac{1}{\eta_{is}} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[ \left( \frac{p_2^*}{p_1^*} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \quad 3.2.3$$

Die Steigerung der Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters ist somit die entscheidende Größe zur Erhöhung des Stufendruckverhältnisses. Ihre Grenze wird bestimmt durch die Festigkeitswerte der Werkstoffe und den maximal zulässigen Mach-Zahlen bei der Anströmung der Laufgitterprofile.

### 3.3 Die Stabilität der Strömung im Stufenelement.

Über die Größe der in einem Laufgitter maximal zu verwirklichenden Druckzahl  $\psi_{th}$  gibt das Prinzip von Hamilton /9/ Auskunft.

Es lautet: "Bewegt sich ein Massenpunkt unter den Einfluss irgendwelcher Kräfte, die ein Potential besitzen, in der Zeit  $t_1$  bis  $t_2$  vom Punkt 1 nach den Punkt 2, so erfolgt die Bewegung immer so, dass der Unterschied zwischen kinetischer Energie und potentieller Energie, gemittelt über die Zeit, ein Minimum wird".

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = \text{Min} !$$

Es soll vorausgesetzt werden, dass die Kraft ein zeitlich sich nicht änderndes Potential besitzt. Wendet man den Energiesatz

$$E = T + U$$

auf den Strömungsvorgang an, so wird mit:

$$T - U = 2T - E$$

das Hamilton'sche Prinzip zu:

$$\frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_1}^{t_2} 2T dt - E = \text{Min!} \quad 3.3.1$$

Beschränkt man sich auf eine reibungsfreie, stationäre ebene Strömung bei der die radialen Geschwindigkeitskomponenten null oder vernachlässigbar klein sind, kann man die Integration über den Zeitraum fallen lassen. Damit ist aber bereits auch ein stabiler Strömungszustand vorausgesetzt, bei dem keine Trägheitsablösungen der Strömung von seinen Begrenzungswänden auftreten kann. Bei gegebener Potentialdifferenz ist das Minimum nach Hamilton dann nur noch von der Energieübertragung an das Gas im Laufgitter abhängig.

$$-E = \text{Min!} \quad \text{oder} \quad E = \text{Max!}$$

Für die Gesamtenergie gilt dann:

$$E = \dot{m} h_{th} = \dot{m} u \Delta c_u$$

Nach dem Geschwindigkeitsvektordiagramm erhält man

$$\Delta c_u = c_{u2} - c_{u1} = u - c_{ax} (\cot \beta_2 + \cot \alpha_1) \quad 3.3.2$$

Mit Hilfe der Kontinuität kann für die Axialgeschwindigkeit des Gases geschrieben werden

$$c_{ax} = \frac{\dot{m}}{\rho z t h}$$

wobei h die Schaufelhöhe im Laufgitter darstellt. Für die Gesamtenergie können wir setzen:

$$E = \dot{m} u \left[ u - \frac{\dot{m}}{\rho z t h} (\cot \beta_2 + \cot \alpha_1) \right] \quad 3.3.3$$

Das Maximum der Energieübertragung erhalten wir, wenn wir den Differentialquotienten  $dE/dh$  bilden und den Ausdruck null setzen.

$$\frac{dE}{dh} = \frac{\dot{m}}{\rho z t h} (\cot \beta_2 + \cot \alpha_1) = 0$$

oder

$$\cot \beta_2 + \cot \alpha_1 = 0 \quad 3.3.4$$

Nach der Gleichung 3.3.2 bedeutet das aber für die Kinematik des Gases im Laufgitter:

$$\Delta w_u = u = \Delta w_{u \max} \quad 3.3.5$$

oder

$$\psi_{th} = 2 = \psi_{th \max} \quad 3.3.6$$

Dieser Maximalwert gilt nur für stationäre, reibungsfreie Strömung. Die Einflüsse der Reibung und des instationären Strömungsvorganges auf die Größe der zu verwirklichenden Druckzahl hängen noch von anderen Einflüssen ab. Als solche sind unter anderen zu nennen:

- Die Bewegung der Gasteilchen auf Pseudostromlinien.
- Der Einfluss des Sekundärwirbels auf den Strömungsverlaufes des Gases im Laufgitter.

In der Praxis ist auf alle Fälle

$$\psi_{th} < 2$$

zu wählen.

### 3.4 Der Wirkungsgrad eines Stufenelementes.

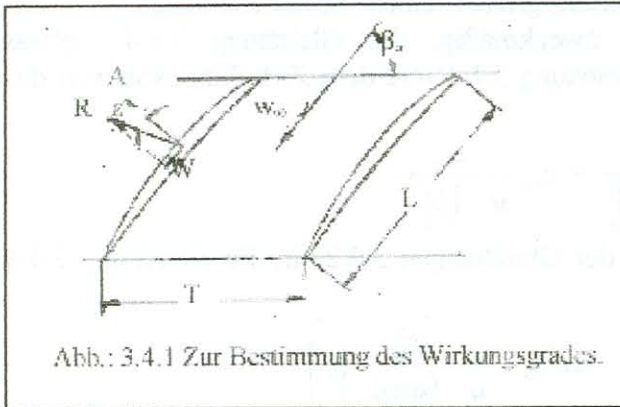
Unter den isentropen Wirkungsgrad eines Stufenelementes wird das Verhältnis der in Druck umgesetzten Energie zur zugeführten Energie im Laufgitter verstanden.

$$\eta_{is} = \frac{h_{is}}{h_{th}} = 1 - \frac{h_v}{h_{is}} \quad 3.4.1$$

Der Gesamtverlust  $h_v$  setzt sich aus den einzelnen Anteilen des Lauf- und Leitgitters zusammen.

$$h_v = h_{vR} + h_{vS}$$

Für den Verlust eines Stufenelementes können wir nach Abb.: 3.4.1 setzen:



$$h_{vR} = \frac{W_R}{\rho t_R \sin \beta_{\infty}}$$

und analog für das Leitgitterelement

$$h_{vS} = \frac{W_S}{\rho t_S \sin \alpha_{\infty}}$$

Die Widerstandskräfte am Profil für eine Schaufelhöhe  $h=1$  sind:

$$W_R = c_{wR} \rho \frac{w_{\infty}^2}{2} l_R$$

$$W_S = c_{wS} \rho \frac{c_{\infty}^2}{2} l_S$$

Beachten wir dass nach den Geschwindigkeitsvektordiagramm

$$w_{\infty} = \frac{c_{ax\infty}}{\sin \beta_{\infty}} \quad \text{und} \quad c_{\infty} = \frac{c_{ax\infty}}{\sin \alpha_{\infty}} \quad 3.4.2$$

ist, erhält man für die einzelnen Verlustanteile:

$$h_{vR} = c_{wR} \frac{c_{ax\infty}^2}{2 \left(\frac{t}{l}\right)_R (\sin \beta_{\infty})^3} \quad \text{und} \quad h_{vS} = c_{wS} \frac{c_{ax\infty}^2}{2 \left(\frac{t}{l}\right)_S (\sin \alpha_{\infty})^3}$$

Diese Beziehungen in die Gleichung 3.4.1 eingesetzt ergibt den isentropen Wirkungsgrad eines Stufenelementes.

$$\eta_{is} = 1 - \frac{1}{h_{th}} \left[ c_{wR} \frac{c_{ax\infty}^2}{2 \left(\frac{t}{l}\right)_R (\sin \beta_{\infty})^3} + c_{wS} \frac{c_{ax\infty}^2}{2 \left(\frac{t}{l}\right)_S (\sin \alpha_{\infty})^3} \right] \quad 3.4.3$$

Fügen wir die Kennzahlen nach den Gleichungen 3.1.1 bis 3.1.3 in die Beziehung ein, so folgt auch:

$$\eta_{is} = 1 - \frac{1}{\psi_{th}} \left[ c_{wR} \frac{\varphi_{\infty}^2}{\left(\frac{t}{l}\right)_R (\sin \beta_{\infty})^3} + c_{wS} \frac{\varphi_{\infty}^2}{\left(\frac{t}{l}\right)_S (\sin \alpha_{\infty})^3} \right] \quad 3.4.4$$

Setzen wir:

$$\xi_R = c_{wR} \frac{\varphi_\infty^2}{\left(\frac{t}{l}\right)_R (\sin \beta_\infty)^3} \quad \text{und} \quad \xi_S = c_{wS} \frac{\varphi_\infty^2}{\left(\frac{t}{l}\right)_S (\sin \alpha_\infty)^3}$$

dann verhalten sich die Verluste von Lauf- und Leitgitter wie  $\xi_R$  und  $\xi_S$ . Deshalb ist:

$$\frac{h_{vS}}{h_{vR} + h_{vS}} = \frac{\xi_S}{\xi_R + \xi_S} \quad \text{bzw.} \quad h_{vS} = \frac{h_{vR} + h_{vS}}{1 + \xi_R / \xi_S} \quad 3.4.5$$

Diese Gleichung gibt in anschaulicher Weise den Druckverlust im Leitgitter wieder.

Um die Abhängigkeit des optimalen Wirkungsgrades eines Stufenelementes von der Lieferzahl unmittelbar zu erhalten ist es zweckmäßig, die Gleichung 3.4.4 etwas umzuformen. Mit der Druckzahl nach der Gleichung 3.1.1 und dem Zirkulationsbeiwert des Gitterprofils wird:

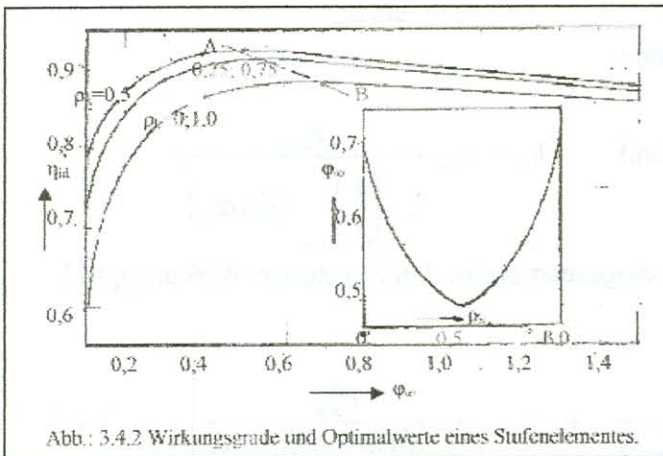
$$\psi = c_{\Gamma R} \frac{w_\infty}{u \left(\frac{t}{l}\right)_R} = c_{\Gamma S} \frac{c_\infty}{u \left(\frac{t}{l}\right)_S}$$

Setzt man diesen Ausdruck unter Beachtung der Gleichungen 3.4.2 in die Gleichung 3.4.4 ein, ergibt sich:

$$\eta_{is} = 1 - \left[ \tan \varepsilon_R \frac{w_\infty^2}{u (\sin \beta_\infty)^2} + \tan \varepsilon_S \frac{c_\infty^2}{u (\sin \alpha_\infty)^2} \right]$$

Da der Gleitwinkel der Profile sehr klein ist, kann man setzen:

$$\tan \varepsilon \approx \varepsilon = \frac{c_w}{c_\Gamma}$$



Mit  $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_R + \varepsilon_S}{2}$

und

$$w_\infty^2 = c_{ax\infty}^2 + w_{u\infty}^2$$

sowie

$$c_\infty^2 = c_{ax\infty}^2 + c_{u\infty}^2$$

Unter Beachtung der Gleichungen 3.1.1 bis 3.1.3 erhält der Wirkungsgrad eines Stufenelementes folgende Form:

$$\eta_{St} = -\tilde{\varepsilon} \left\{ 2\varphi_\infty + \frac{1}{\varphi_\infty} [\rho_k^2 + (1 - \rho_k)^2] \right\} \quad 3.4.6$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen den Wirkungsgrad und den kinematischen Kenngrößen eines Stufenelementes hergestellt.

Die optimale Lieferzahl eines Stufenelementes erhält man aus:

$$\frac{\partial \eta_{St}}{\partial \varphi_\infty} = 2 - \frac{1}{\varphi_\infty} [\rho_k^2 + (1 - \rho_k)^2] = 0$$



zu:

$$\varphi_{\infty op} = \sqrt{\frac{1}{2} [\rho_k^2 + (1 - \rho_k)^2]} \quad 3.4.7$$

und den optimalen kinematischen Reaktionsgrad:

$$\frac{\partial \eta_{is}}{\partial \rho_k} = 2 \rho_k + 2(1 - \rho_k) = 0$$

bzw.:  $\rho_k = 0,5$  3.4.8

Die Abb.: 3.4.2 zeigt die Auswertung der Gleichungen 3.4.6 bis 3.4.8.

Die angegebenen Gleichungen beziehen sich auf den Wirkungsgrad eines Stufelementes. Die Stufe eines Axialverdichters besteht, entsprechend der Gitterschaufellänge in radialer Erstreckung von der Verdichterachse, aus lauter aufeinandergeschichteten Stufelementen in denen sich die Lieferzahl  $\varphi_{\infty}$  stark verändern kann. Insofern haben die in diesen Abschnitt gemachten Betrachtungen zunächst nur einen theoretischen Charakter.

### 3.5 Die Belastung des Stufelementes.

Mit dem Prinzip von Hamilton (siehe Abschnitt 3.3) lässt sich leicht nachweisen, dass es bei reibungsfreier Strömung in einer Turbomaschine hinsichtlich der Stufenbelastung eine charakteristische Druckzahl  $\psi_{th} = 2$  gibt. Dabei gilt für Axialverdichter:

$$\psi_{th} = \leq 2$$

Derartig annähernd große Druckzahlen sind aber nur bei Axialverdichterstufen mit sehr kleinen Nabenverhältnis  $v_i = \frac{r_i}{r_a}$  denkbar wo kleine Umfangsgeschwindigkeiten der

Laufgitter mit großen Lieferzahlen auftreten. Die Ursache liegt darin, dass die einzelnen Schaufelgitter, die als Verzögerungsgitter ausgebildet sind, für ablösungsfreie Strömung an den Schaufelprofilen nur eine bestimmte Umlenkung des Gasstromes im Gitterkanal zulassen.

Für die Auftriebskraft eines Gitterprofils gilt:

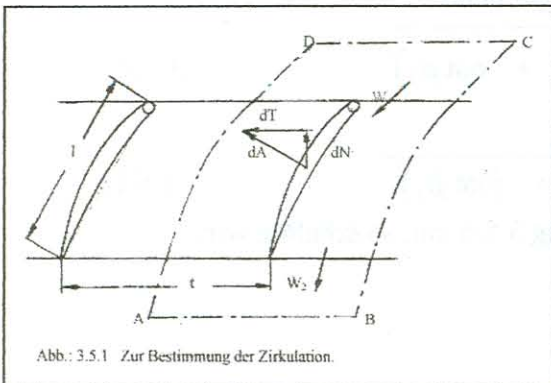
$$A = \rho w_{\infty} h \Gamma \quad 3.5.1$$

Oder in einer etwas anderen Form

$$A = c_{\Gamma} \frac{\rho}{2} w_{\infty}^2 F \quad 3.5.2$$

mit  $c_{\Gamma}$  als Zirkulationsbeiwert der Gitterprofile. Aus beiden Beziehungen erhält man:

$$\Gamma = \frac{c_{\Gamma}}{2} w_{\infty}^2 l \quad 3.5.3$$



Der Zirkulationsbeiwert bezieht sich auf die Ebene  $\infty$ , da er auf die Geschwindigkeit  $w_{\infty}$  Bezogen wurde. Die Fläche  $F$  ist das Produkt aus der Flügelerstreckung  $h$  und der Profilschneidlänge  $l$ . Die Zirkulation um das Schaufelprofil ist das Umlaufintegral um dieses;

$$\Gamma = \oint w_s ds$$

Dabei ist  $w_s$  die Geschwindigkeit des Gases an der Profilkontur und  $ds$  das Differential der Wegstrecke.

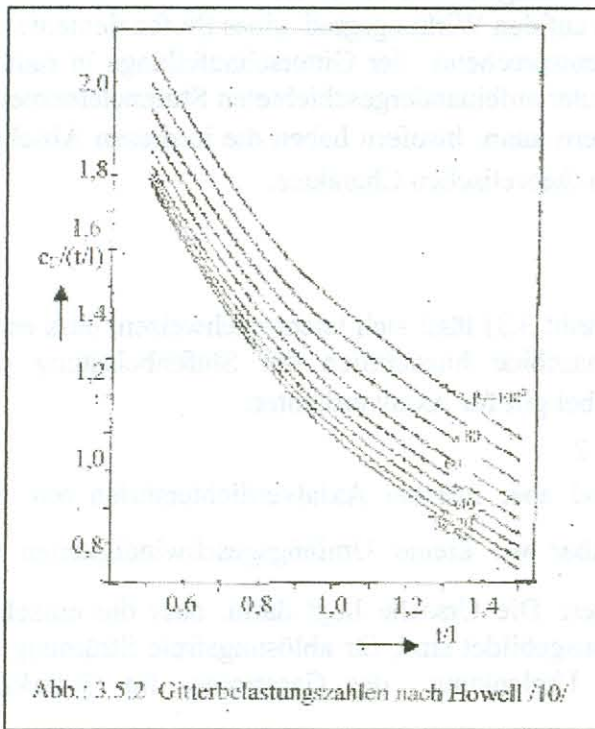
Nach Abb.: 3.5.1 kann offenbar auch auf den Kontrolllinien ABCD integrieren:

$$\Gamma = \oint w_s ds = (w_{u1} - w_{u2}) t = \Delta w_u t \quad 3.5.4$$

Aus den Gleichungen 3.5.3 und 3.5.4 ergibt sich unmittelbar die Gitterbelastungszahl:

$$\frac{c_\Gamma}{t/l} = \frac{2\Delta w_u}{w_\infty} \quad 3.5.5$$

Die Abb.: 3.5.2 zeigt die von Howell /10/ benutzten Gitterbelastungszahlen in benutzten Gitterbelastungszahlen in Abhängigkeit vom Teilungsverhältnis  $t/l$  mit den Anström-



winkel  $\beta_2$  als Parameter. die Gitterbelastungswerte sind nicht auf die Geschwindigkeiten  $w_\infty$  sondern auf Abströmgeschwindigkeit  $w_2$  bezogen. Alle Werte basieren dabei auf einen normalen Arbeitspunkt der Gitterprofile, der bei 80% der maximalen Strömungsumlenkung liegt. Als maximale Umlenkung ist jene definiert, bei der der Gesamtdruckverlust im Schaufelgitter das Doppelte seines Minimalwertes erreicht.

Aus Gl.: 3.5.2 erhält man:

$$\frac{c_{\Gamma 2}}{c_\Gamma} = \left( \frac{w_\infty}{w_2} \right)^2$$

und mit der Gl.: 3.5.5:

$$\frac{c_{\Gamma 2}}{t/l} = \frac{2\Delta w_u w_\infty}{w_2^2} \quad 3.5.6$$

Nach den Geschwindigkeitsvektordiagrammen gilt:

$$\Delta w_u = w_{u1} - w_{u2} = c_{ax} (\cot \beta_1 - \cot \beta_2) \quad 3.5.7$$

und

$$w_\infty^2 = c_{ac}^2 + w_{u\infty}^2$$

mit

$$w_{u\infty} = w_{u1} - \frac{\Delta w_u}{2} = c_{ax} \cot \beta_1 - \frac{c_{ax}}{2} (\cot \beta_1 - \cot \beta_2)$$

beziehungsweise

$$w_\infty = \frac{c_{ax}}{2} (\cot \beta_1 + \cot \beta_2) \quad 3.5.8$$

Für die Geschwindigkeit in der Strömungsebene  $\infty$  gilt dann:

$$w_\infty = c_{ac} \sqrt{1 + \frac{1}{4} (\cot \beta_1 + \cot \beta_2)^2} \quad 3.5.9$$

Weiterhin gilt noch:

$$w_2 = \sqrt{c_{ax}^2 + w_{u2}^2} = \sqrt{c_{ax}^2 + (\cot \beta_2)^2} \quad 3.5.10$$

Setzen wir die erhaltenen Ausdrücke in die Gleichung 3.5.6 ein, so erhalten wir:

$$\frac{c_{r2}}{t/l} = \frac{2 (\cot \beta_1 - \cot \beta_2) \sqrt{1 + \frac{1}{4} (\cot \beta_1 + \cot \beta_2)^2}}{1 + (\cot \beta_2)^2} \quad 3.5.11$$

Mit dieser Beziehung ist ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen den Winkeln im Geschwindigkeitsvektordiagramm und den von Howell angegebenen Gitterbelastungswerten hergestellt.

Eine explizite Lösung der Gl.: 3.5.11 für die zulässige Umlenkung des Gases in einem Stufenelement in Abhängigkeit vom Abströmwinkel  $\beta_2$  mit dem Teilungsverhältnis  $\frac{t}{l}$  des Schaufelgitters ist nicht möglich. Mit der Wahl verschiedener Winkel  $\beta_1$  und  $\beta_2$  erhält man durch Auswertung der Gl.: 3.5.11 in Zusammenhang mit der Abb.: 3.5.2 eine Darstellung  $t/l$  als Funktion von  $\beta_1$  mit  $\beta_2$  als Parameter. Aus dieser Darstellung kann unmittelbar die

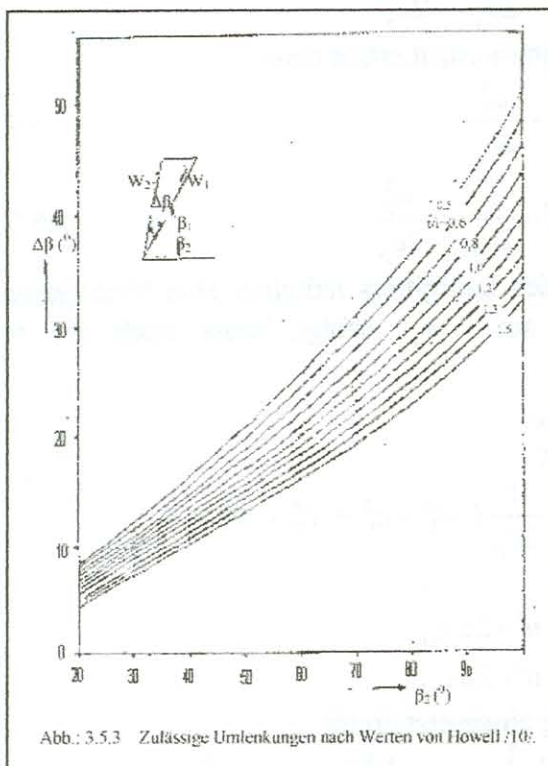


Abb.: 3.5.3 hergestellt werden, welche die zulässigen Umlenkungen des Gases in einem Stufenelement in Abhängigkeit vom Abströmwinkel  $\beta_2$  mit dem Teilungsverhältnis  $t/l$  des Profilgitters als Parameter angibt. Mit den in Abb.: 3.5.3 dargestellten Diagramm kann bequem die erforderliche Schaufelzahl eines Profilgitters festgelegt werden, wenn die Winkel im Geschwindigkeitsvektordiagramm bekannt sind.

K. Wichert /11/ hat auf Grund von Diffusoruntersuchungen eine Beziehung für den optimalen Zirkulationsbeiwert eines Schaufelgitters aufgestellt. Danach ist:

$$c_{\Gamma opt} = 0,63 \left[ 1,7 - \frac{w_\infty^2}{w_1^2} \frac{c_\Gamma}{t/l} \cos \beta_\infty \right] \left( \frac{w_1}{w_\infty} \right)^2 \quad 3.5.12$$

Die Gitterbelastungszahl  $\frac{c_\Gamma}{t/l}$  kann durch die Gleichung 3.5.5 ersetzt werden und ist durch das Geschwindigkeitsvektordiagramm gegeben.

### 3.6 Temperatur- und Druckverlauf im Absolut- und Relativsystem eines Stufenelementes.

Die Strömung des Gases durch einen koaxialen Zylinderschnitt einer Axialverdichterstufe wurde schon auf der Abb.: 3.1.1 dargestellt. Das vor dem Vorleitgitter ankommende Gas hat entsprechend der Zuströmgeschwindigkeit die statische Temperatur:

$$T_1 = T_1^* - \frac{c_0^2}{2c_p} \quad 3.6.1$$

und am Austritt des als Beschleunigungsgitter ausgeführten Vorleitgitters:

$$T_I = T_1^* - \frac{c_1^2}{2c_p} \quad 3.6.2$$

Dabei ist  $T_1^*$  die Gesamt- bzw. Kesseltemperatur des angesaugten Gases. Da sich das Laufgitter mit der Umfangsgeschwindigkeit  $u$  am Vorleitgitter vorbei bewegt, wird das Laufgitter mit der Relativgeschwindigkeit  $w_1$  angeströmt. Die Gesamttemperatur des Gases im Laufgitter ist somit gleich der statischen Gastemperatur plus der Stautemperatur durch die Relativgeschwindigkeit.

$$T_{Irel} = T_1^* - \frac{c_1^2}{2c_p} + \frac{w_1^2}{2c_p} \quad 3.6.3$$

Bei einer analogen Betrachtung am Laufgitteraustritt erhält man:

$$T_{II} = T_2^* - \frac{c_2^2}{2c_p} \quad 3.6.4$$

$$T_{IIrel}^* = T_2^* - \frac{c_2^2}{2c_p} + \frac{w_2^2}{2c_p} \quad 3.6.5$$

Da in den rotierenden Schaufelkanälen des Laufgitters lediglich eine Verzögerung der relativen Gasgeschwindigkeit von  $w_1$  auf  $w_2$  erfolgt, muss auch die relative Gesamttemperatur konstant sein.

$$T_{Irel}^* = T_{IIrel}^*$$

Aus den Gleichungen 3.6.3 und 3.6.5 folgt:

$$T_2^* = T_1^* - \frac{1}{2c_p} (w_1^2 - c_1^2 + c_2^2 - w_2^2)$$

Mit Hilfe der Abb.: 3.1.1 erhält man:

$$w_1^2 - c_1^2 = u^2 - 2uc_{u1}$$

$$w_2^2 - c_2^2 = u^2 - 2uc_{u2}$$

Die Ausdrücke in die Temperaturgleichung eingesetzt ergibt.

$$T_2^* = T_1^* + \frac{u}{c_p} (c_{u2} - c_{u1}) = T_1^* + \frac{u\Delta c_u}{c_p} = T_1^* + \frac{h_{th}}{c_p} \quad 3.6.6$$

Diese Beziehung ist bereits aus den thermodynamischen Betrachtungen bekannt.

Wendet man die gasdynamischen Betrachtungen an, erhält man für das Verhältnis der statischen Temperatur zur Gesamttemperatur:

$$\frac{T}{T^*} = 1 - \frac{\kappa - 1}{2} M^{*2} \quad 3.6.7$$

wobei für die Machzahl im Absolutsystem

$$M^* = \frac{c}{20,1 \sqrt{T^*}} \quad 3.6.8$$

und im Relativsystem

$$M^* = \frac{w}{20,1 \sqrt{T_{rel}^*}} \quad 3.6.9$$

gesetzt werden muss.

Bei der Bestimmung der Drücke in den einzelnen Ebenen eines Stufenelementes müssen die Druckverluste in den einzelnen Schaufelgittern berücksichtigt werden. Beim Durchgang des Gases durch das Vorleitgitter ändert sich der Gesamtdruck bis auf die Verluste im Gitter nicht. Setzt man für den Druckverlust im Vorleitgitter

$$\xi_V = \frac{p_0^* - p_1^*}{\frac{\rho}{2} c_0^2} \quad 3.6.10$$

so erhält man mit einer Umformung:

$$\xi_V = \frac{2 \left( 1 - \frac{p_1^*}{p_0^*} \right)}{\kappa \frac{p_0}{p_0^*} \frac{c_0^2}{\kappa p_0}} = \frac{2 \left( 1 - \frac{p_1^*}{p_0^*} \right)}{\kappa \frac{p_0}{p_0^*} M_{c_0}^2}$$

Mit Hilfe der gasdynamischen Beziehung

$$\frac{p^*}{p} = \left( 1 - \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

folgt für das Verlustdruckverhältnis.

$$\frac{p_1^*}{p_0^*} = 1 - \xi_V \frac{\kappa M_{c_0}^2}{2 \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{c_0}^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}} \quad 3.6.11$$

Für den Widerstandsbeiwert der Profile gilt:

$$c_w = \frac{W}{q_\infty l}$$

Die Widerstandskraft steht aber mit den Druckabfall in folgenden Zusammenhang:

$$W = t \sin \alpha_\infty \Delta p^*$$

Mit Hilfe der Umrechnung

$$\frac{q_0}{q_\infty} = \left( \frac{c_0}{c_\infty} \right)^2 = \left( \frac{\sin \alpha_\infty}{\sin \alpha_0} \right)^2$$

und den Druckbeiwert

$$\xi_V = \frac{\Delta p^*}{q_1}$$

erhält man den Widerstandsbeiwert für die Beschauelung:

$$c_w = \frac{t}{l} \xi_V \frac{(\sin \alpha_\infty)^3}{(\sin \alpha_0)^2}$$

oder

$$\xi_V = \frac{c_w}{\frac{t}{l} \sin \alpha_\infty} \left( \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_\infty} \right)^2 \quad 3.6.12$$

Wird diese Beziehung in die Gleichung 3.6.11 eingesetzt, erhält man für den Druckverlust im Vorleitgitter den Ausdruck:

$$\frac{p_1^*}{p_0^*} = 1 - \frac{c_{wVl}}{\frac{t}{l} \sin \alpha_\infty} \left( \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_\infty} \right)^2 \frac{\kappa M_{c0}^2}{2 \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{c0}^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \quad 3.6.13$$

Für das Vorleitgitter einer Axialverdichterstufe ist allgemein  $\sin \alpha_0 = 1$ , da die Zuströmung zum Gitter mit einem Winkel  $\alpha_0 = 90^\circ$ , zur Gitterebene gemessen, erfolgt.

Den statischen Druck vor dem Laufgitter erhält man aus der gasdynamischen Beziehung

$$\frac{p_1}{p_1^*} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} \frac{c_1^2}{\kappa RT_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \quad 3.6.14$$

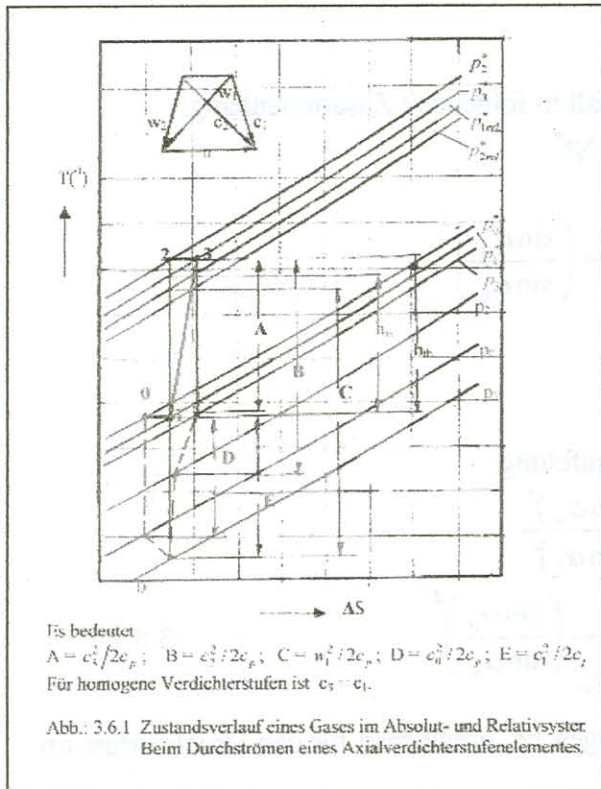
und den Gesamtdruck im Relativsystem aus

$$\frac{p_{1rel}^*}{p_1} = \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} \frac{w_1^2}{\kappa RT_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad 3.6.15$$

Bei verlustloser Strömung im Laufgitter muss der Gesamtdruck im Relativsystem konstant bleiben.

Berücksichtigt man die Verluste im Laufgitter, so erhält man analog zu dem Verlustdruckverhältnis im Vorleitgitter:

$$\frac{p_{2rel}^*}{p_{1rel}^*} = 1 - \frac{c_{wR}}{\frac{t}{l} \sin \beta_\infty} \left( \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_\infty} \right)^2 \frac{\kappa M_{w1}^2}{2 \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \quad 3.6.16$$



Durch die Umrechnung auf den statischen Druck nach dem Laufgitter

$$\frac{p_2}{p_{2rel}^*} = \frac{1}{\left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} \frac{w_1^2}{\kappa RT_2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \quad 3.6.17$$

erhält man mit den Übergang vom Relativsystem auf das Absolutsystem den Gesamtdruck nach dem Laufgitter:

$$\frac{p_2^*}{p_2} = \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} \frac{c_2^2}{\kappa RT_2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad 3.6.18$$

Entsprechen den Gleichungen 3.6.13 und 3.6.16 ist das Verlustdruckverhältnis in dem nach dem Laufgitter folgenden Leitgitter.

$$\frac{p_3^*}{p_2^*} = 1 - \frac{c_{wS}}{\frac{t}{l} \sin \alpha_\infty} \left( \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_\infty} \right)^2 \frac{\kappa M_{c2}^2}{2 \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{c2}^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \quad 3.6.19$$

Das Gesamtdruckverhältnis eines Stufelementes ist dann:

$$\frac{p_{3*}}{p_0^*} = \frac{p_1^*}{p_0^*} \frac{p_1}{p_1^*} \frac{p_{1rel}^*}{p_1} \frac{p_{2rel}^*}{p_{1rel}^*} \frac{p_2}{p_{2rel}^*} \frac{p_2^*}{p_2} \frac{p_3^*}{p_2^*} = \left( 1 + \frac{h_{is}}{c_p T} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad 3.6.20$$

Mit Hilfe der angegebenen Gleichungen kann der Zustandsverlauf des Gases beim Stufelement im absoluten und im relativen Strömungssystem theoretisch verfolgt werden. Eine schematische Darstellung eines solchen Zustandsverlaufes eines Gases im T-s – Schaubildes zeigt die Abb.: 3.6.1.

### 3.7 Der statische und der kinematische Reaktionsgrad.

Als statischen Reaktionsgrad eines Stufelementes bezeichnet man das Verhältnis der statischen Druckerhöhung im Laufgitterelement zur Gesamtdruckerhöhung des Gases.

$$\rho_{st} = \frac{\Delta p_{stR}}{\Delta p_R^* + \Delta p_{st}^*} \quad 3.7.1$$

Mit Hilfe der Bernoulli'schen Gleichung kann man die Drücke des Gases vor und hinter dem Laufgitter eines Stufelementes angeben:

$$p_1 = p_{1rel}^* - \frac{\rho}{2} w_1^2$$

$$p_2 = p_{2rel}^* - \frac{\rho}{2} w_2^2$$

Dabei ist  $p_{2rel}^*$  um den Druckverlust im Laufgitter kleiner als  $p_{1rel}^*$ . Die statische Druckerhöhung des Gases in einem Laufgitterelement ist dann

$$p_2 - p_1 = p_{1rel}^* \left( \frac{p_{2rel}^*}{p_{1rel}^*} - 1 \right) + \frac{\rho}{2} (w_1^2 - w_2^2)$$

Und mit den Verlusten nach Gleichung 3.6.16:

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2} (w_1^2 - w_2^2) - p_{1rel}^* \frac{c_{wR}}{\frac{t}{l} \sin \beta_\infty} \left( \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_\infty} \right)^2 \frac{\kappa M_{w1}^2}{2 \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \quad 3.7.2$$

Mit den Gesamtdrücken vor und hinter dem Laufgitter eines Stufelementes

$$p_1^* = p_1 + \frac{\rho}{2} c_1^2 = p_{1rel}^* - \frac{\rho}{2} w_1^2 + \frac{\rho}{2} c_1^2$$

und

$$p_2^* = p_2 + \frac{\rho}{2} c_2^2 = p_{2rel}^* - \frac{\rho}{2} w_2^2 + \frac{\rho}{2} c_2^2$$

erhält man die Gesamtdruckerhöhung im Laufgitter zu

$$\Delta p_R = p_2^* - p_1^* = p_{1rel}^* \left( \frac{p_{2rel}^*}{p_{1rel}^*} - 1 \right) + \frac{\rho}{2} (w_1^2 - w_2^2 + c_1^2 - c_2^2)$$

und mit der Gleichung 3.6.1

$$\Delta p_R = p_2^* - p_1^* = \frac{\rho}{2} (w_1^2 - w_2^2 + c_2^2 - c_1^2) - p_{1rel}^* \frac{c_{wR}}{\left( \frac{t}{l} \right)_R \sin \beta_\infty} \frac{\sin^2 \beta_1}{\sin^2 \beta_\infty} \frac{\kappa M_{w1}^2}{2 \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \quad 3.7.3$$

Für den Gesamtdruckverlust des Leitgitters gilt:

$$\Delta p_{St} = p^* - p^* = p^* \left( \frac{p^*}{p^*} - 1 \right)$$

Da im Leitgitter lediglich eine statische Druckerhöhung erreicht wird, ist dieses Druckverhältnis negativ. Mit der Gleichung 3.6.19 ist dann:

$$\Delta p_{St} = p_3^* - p_2^* = -P_1^* \frac{c_{wS}}{\left(\frac{t}{l}\right)_{St} \sin \alpha_\infty} \frac{\sin^2 \alpha_2}{\sin^2 \alpha_\infty} \frac{\kappa M_{c2}^2}{2 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{c2}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}} \quad 3.7.4$$

Für die einzelnen Geschwindigkeitsanteile gilt nach dem Geschwindigkeitsvektordiagramm:

$$\begin{aligned} w_1^2 &= c_{ax1}^2 + (u - c_{u1})^2 \\ w_2^2 &= c_{ax2}^2 + (u - c_{u2})^2 \\ c_1^2 &= c_{ax1}^2 + c_{u1}^2 \\ c_2^2 &= c_{ax2}^2 + c_{u2}^2 \end{aligned}$$

bzw. mit  $\Delta w_u = \Delta c_u$

$$w_1^2 - w_2^2 = \rho w_{u\infty} \Delta c_u \quad 3.7.5$$

und

$$w_1^2 - w_2^2 + c_2^2 - c_1^2 = \rho u \Delta c_u \quad 3.7.6$$

Setzt man die Gleichungen 3.7.2 bis 3.7.6 in die Gleichung 3.7.1 ein, erhält man den statischen Reaktionsgrad zu:

$$\rho_{st} = \frac{A + B}{C + D + E} \quad 3.7.7$$

Dabei ist:

$$A = \rho w_{u\infty} \Delta c_u \quad 3.7.7.A$$

$$B = p_{1rel}^* \frac{c_{wR}}{\left(\frac{t}{l}\right)_R \sin \beta_\infty} \frac{\sin^2 \beta_1}{\sin^2 \beta_\infty} \frac{\kappa M_{w1}^2}{2 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{w1}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}} \quad 3.7.7.B$$

$$C = \rho u \Delta c_u \quad 3.7.7.C$$

$$D = p_{1rel}^* \frac{c_{wR}}{\left(\frac{t}{l}\right)_R \sin \beta_\infty} \frac{\sin^2 \beta_1}{\sin^2 \beta_\infty} \frac{\kappa M_{w1}^2}{2 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{w1}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}} \quad 3.7.7.D$$

$$E = p_2^* \frac{c_{wSt}}{\left(\frac{t}{l}\right)_{St} \sin \alpha_\infty} \frac{\sin^2 \alpha_2}{\sin^2 \alpha_\infty} \frac{\kappa M_{c2}^2}{2 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{c2}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}} \quad 3.7.7.E$$

Die einzelnen Drücke des Gases können nach Abschnitt 3.6 ermittelt werden.

Bei der verlustlosen Strömung des Gases durch ein Axialverdichterstufenelement sind die Widerstandsbeiwerte  $c_{wR} = c_{wSt} = 0$  und man erhält den Ausdruck:

$$\rho_k = \frac{w_{u\infty}}{u} = 1 - \frac{c_{u\infty}}{u} \quad 3.7.8$$



Nach Abschnitt 3.1 hatten wir diesen Ausdruck als kinematischen Reaktionsgrad gekennzeichnet. Bei verlustloser Strömung ist also der statische Reaktionsgrad mit den kinematischen Reaktionsgrad identisch.

#### 4. Die Verluste in der Stufe.

##### 4.1 Der Profilverlust.

Grundsätzlich besteht die Möglichkeit mit Hilfe der Grenzschichttheorie /12/,/13/ die an den Schaufelprofilen auftretenden Verluste näherungsweise zu ermitteln. Diese Möglichkeit ist aber für den in der Praxis tätigen Ingenieur zu aufwendig. Zur Abschätzung der Profilverluste ist es deshalb sinnvoller, sich auf die in reichlicher Auswahl vorhandenen Versuchswerte zu stützen die zumeist nach dem Impulsverfahren an ebenen Schaufelgittern auf Prüfständen ermittelt wurden. In /14/ ist eine Vielzahl von systematischen Messwerten für den Widerstandsbeiwert  $c_{wp}$  der Profilverluste bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung der Profile für die Profilverihe NACA-65 angegeben. Nach einer systematischen Aufzeichnung der Verlustwerte  $c_{wp}$  in Abhängigkeit von den Zirkulationsbeiwert  $c_r / \left(\frac{t}{l}\right)$  mit dem Teilungsverhältnis als Parameter erhält man eine Abhängigkeit des Profilwiderstandsbeiwertes von diesen Größen. Dabei zeigt sich auch, dass der Profilwiderstandsbeiwert  $c_{wp}$  unabhängig vom Staffelungswinkel  $\beta_i \approx \beta_\infty$  der Profilvergitter ist. Das Verhältnis der maximalen Profildicke zur Sehnenlänge war bei allen Messpunkten mit  $d/l = 0,1$  konstant. Legt man durch alle Messpunkte eine Kurve, so erhält man die empirische Beziehung

$$c_{wp} = K + f\left(\frac{c_r}{\left(\frac{t}{l}\right)}\right) + f\left(\frac{t}{l}\right) \quad 4.1.1$$

oder

$$c_{wp} = 0,01326 + \left[ 0,086 \frac{c_r}{\left(\frac{t}{l}\right)} - 0,0127 \right]^2 + \left[ 0,125 \frac{t}{l} - 0,116 \right]^2 \quad 4.1.2$$

Nach Versuchen von Bahr /15/ sind die kleinsten Profilverluste bei Anströmung der Gitter mit überkritischer Reynoldszahl

( $R_e = wl/\nu$ ) unabhängig von der

Profildicke. Die Abb.: 4.1.1 zeigt die Auswertung der Gleichung 4.1.2 für eine in der Praxis günstigen Form.

Weitere Einflüsse auf die Profilverluste wie durch Abweichungen von der aerodynamisch stoßfreien Anströmung, der Anström- Machzahl und den Re-Einfluss sind im Hauptabschnitt „Das Gitterprofil dargestellt (siehe dort).

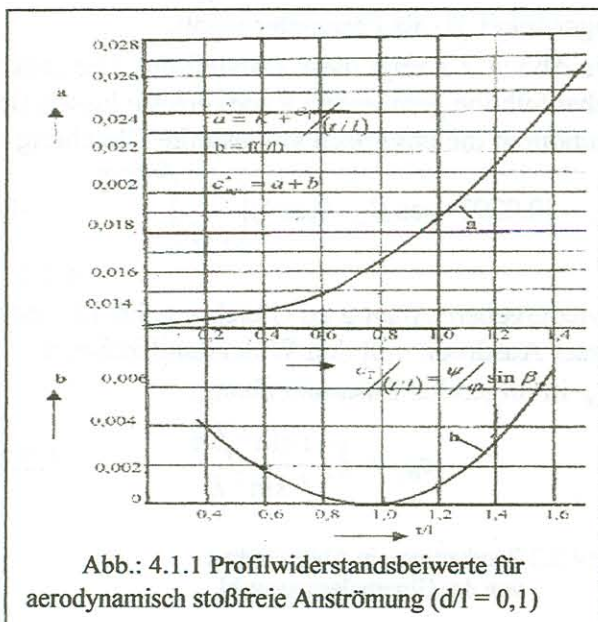


Abb.: 4.1.1 Profilwiderstandsbeiwerte für aerodynamisch stoßfreie Anströmung ( $d/l = 0,1$ )

## 4.2 Die Randverluste.

In den Randgebieten eines Schaufelgitters sind die Strömungsvorgänge infolge der Reibung an den Strömungsprofilen und der inneren und äußeren Strömungskanalbegrenzungen einer Verdichterstufe sehr verwickelt und als dreidimensional zu betrachten. Infolge eines Ausgleiches des statischen Druckes zwischen der Saug- und Druckseite der Gitterprofile innerhalb des Strömungskanals tritt in dessen äußeren Bereichen jeweils ein Sekundärwirbel auf.

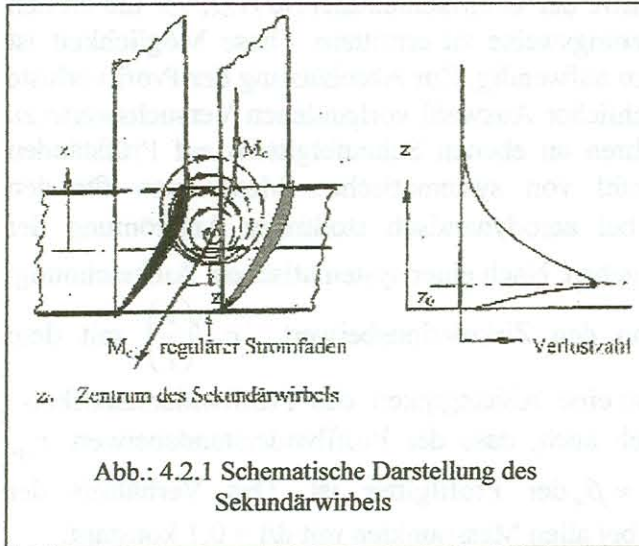


Abb.: 4.2.1 Schematische Darstellung des Sekundärwirbels

auf. Eine schematische Darstellung des Sekundärwirbels zeigt die Abb.: 4.2.2 4.2. Ausgehend vom Wirbelzentrum wird eine Zusatzgeschwindigkeit induziert die mit Verlusten in der Stufe und Winkelabweichungen gegenüber der regulären Strömungsrichtung verbunden ist. Die Lage des Wirbelzentrums und die Wirbelintensität werden durch die

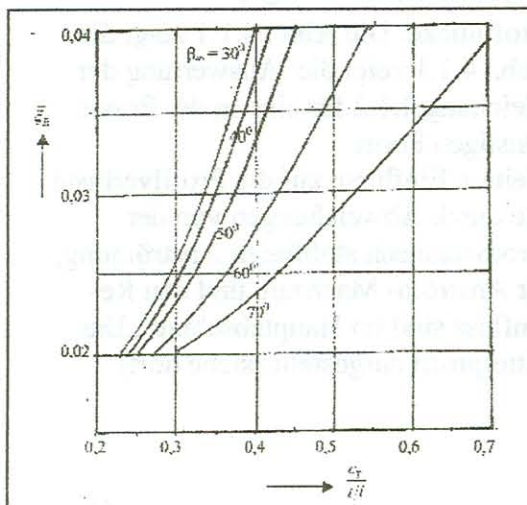
Gitterbelastungszahl  $\frac{c_T}{t/l}$  den

Grenzschichtwerten an den Gitterprofilen und an der inneren und äußeren Strömungskanalbegrenzung einer Stufe sowie den Spaltverlusten an der äußeren Kanalbegrenzung eines Laufgitters beeinflusst.

Eine exakte Vorausberechnung der Randverluste ist nach den derzeitigen Wissensstand nicht möglich /4/ und kaum zu erwarten /16/, da es eine dreidimensionale Strömungsgleichung für kompressible Medien weder ohne noch mit einer gegenseitigen Beeinflussung der oben angegebenen Einflüsse auf den Sekundärwirbel noch nicht existiert.

Zur Erfassung der Randverluste in Abhängigkeit von den einzelnen Einflussparametern ist eine Anzahl experimenteller Untersuchungen an geraden Schaufelgittern durchgeführt worden; zum Beispiel /16/ bis /26/ u.a..

Die Randverluste von Wolf /26/ sind durch eine große Anzahl von Messwerten fundiert und können als solide Grundlage angesehen werden. Eine systematische und übersichtliche Darstellung der Randverluste erhält man, wenn man sie in Abhängigkeit von der Gitterbelastungszahl aufträgt und den Strömungswinkel  $\beta_\infty$  als Parameter wählt.



Die Abb.:4.2.2 zeigt diese Darstellung. Die über der Schaufelhöhe gemittelten Randverluste lassen sich danndurch die empirisch aufgestellte Gleichung

$$\bar{\xi}_R = (0,0293 \cos \beta_\infty - 0,004) \left( \frac{c_T}{t/l} \right)^{(0,275 \cos \beta_\infty + 2)} - 0,018$$

4.2.1

wiedergeben. Analog zu Gleichung 3.6.12 steht dieser Ausdruck mit den Widerstandsbeiwert

$c_{WR}$  in folgenden Zusammenhang:

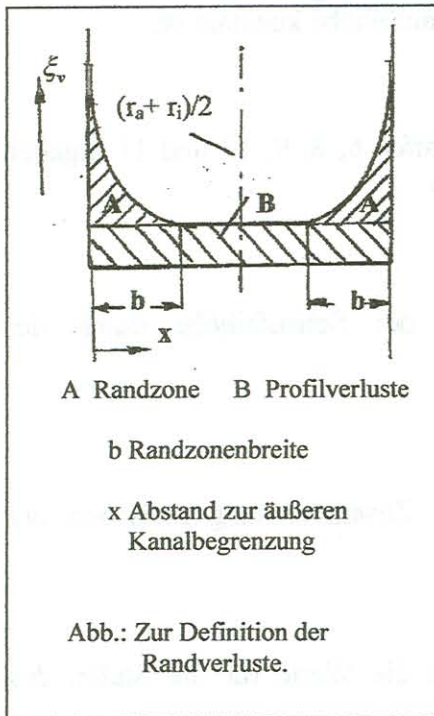
$$c_{WR} = \bar{\xi}_R \frac{t \sin^2 \beta_\infty}{l \sin^2 \beta_1}$$

4.2.2

Abb.: 4.2.2 Randverluste in Abhängigkeit von der Gitterbelastungszahl.

Der örtliche Verlauf der Randverluste über der Schaufelhöhe, aufgetragen über den bezogenen Wandabstand kann durch den Ansatz

$$\xi_{VB} = C \bar{\xi}_v \left[ \frac{1}{\left(\frac{z}{\delta_1^*}\right)^n + \frac{K}{e^{z/\delta_1^*}}} - \frac{1}{\frac{b}{\delta_1^*} + \frac{K}{e^{b/\delta_1^*}}} \right] \quad 4.2.3$$



mit  $0 < \frac{z}{\delta_1^*} < \frac{b}{\delta_1^*}$

angegeben werden. Dabei ist  $\delta_1^*$  die Grenzschichtverdrängungsdicke an der Nabe bzw. der Gehäusewand des Verdichters und

$$\frac{b}{\delta_1^*} = \left( 4,33 \frac{c_r}{t/l} - 0,72 \right)^2 + 13 \quad 4.2.4$$

entsprechend der Abb.:4.2.3. Diese Gleichungen geben die Messergebnisse von Wolf /26/ gut wieder.

Für den bezogenen Wandabstand vom Außenradius der Stufe gilt.

$$\frac{z}{\delta_1^*} = \frac{(1-v)h/l}{\frac{\delta_1^*}{l} (1-v_i)} \quad 4.2.5$$

und für den bezogenen Wandabstand von der Nabe:

$$\frac{z}{\delta_1^*} = \frac{(v-v_i)h/l}{\frac{\delta_1^*}{l} (1-v_i)} \quad 4.2.6$$

Eine gute Annäherung an die Messwerte für die örtlichen Randverluste nach /19/, /20/ und /25/, die an geraden Schaufelgittern gewonnen wurden, erhält man mit:

$$C = 30; \quad n = 0,825 \quad \text{und} \quad K = 0,782.$$

Nach den Versuchen von Gersten /21/ vergrößern sich die Randverluste mit größer werdendem Verhältnis der Grenzschichtverdrängungsdicke zur Sehnenlänge der Profile nur

bis zu einem Wert von  $\frac{\delta_1^*}{l} = 0,04$ . Wird dieser Wert überschritten bleiben die Randverluste nahezu konstant.

Die Ermittlung der Randverluste in den Gittern mehrstufiger Axialverdichter setzt die Kenntnis des Grenzschichtverhaltens eines strömenden Gases in den Stufen voraus.

Der Einfluss der Zähigkeit des strömenden Gases auf die Axialgeschwindigkeitsverteilung in einer Verdichterstufe kann näherungsweise durch das logarithmische Gesetz der Rohrströmung

$$\frac{c_{ax}}{c_{ax0}} = 1 + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \left( 1 - \ln \frac{r_a - r_i}{2y} \right)$$

ermittelt werden /27/. Der Reibungsbeiwert (siehe hierzu die einschlägige strömungstechnische Literatur) ist in Abhängigkeit von der Stufenzahl des Verdichters praktisch konstant. Die aus Versuchen gewonnenen Werte für die Mischungswegkonstante  $\kappa$  zeigt die Abb.: 1.15.

Ab etwa der 5. Stufe eines Axialverdichters kann mit einer ausgebildeten Grenzschichtströmung gerechnet werden, da die Mischungswegkonstante  $\kappa$  annähernd konstant bleibt. Für die praktischen Belange ist dann die durch die Zähigkeitseinflüsse des Gases hervorgerufene Geschwindigkeitsverteilung vom logarithmischen Glied der Rohrreibungsformel abhängig. Infolge

$$\frac{r_a - r_i}{2y}$$

mit  $y$  als Wandabstand ist bei ausgebildeter Grenzschichtströmung im Axialverdichter zu erwarten, dass das Verhältnis der Grenzschichtdicke zur Schaufelhöhe konstant ist:

$$\frac{\delta}{r_a - r_i} \approx \text{konst.}$$

Die Auswertungen am Verdichter Pirna TL 014 für die Stufen 6, 8, 9, 10 und 11 ergaben einen Mittelwert für die Grenzschichtverdrängungsdicke von:

$$\delta^* = \int_{y=0}^{y=h/2} \left(1 - \frac{c_{ax}}{\bar{c}_{ax}}\right) dy = 4,15 \text{ mm}$$

Drückt man die Axialgeschwindigkeitsverteilung über der Schaufelhöhe durch das Potenzgesetz

$$\frac{c_{ax}}{\bar{c}_{ax}} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n^*}$$

aus, so lässt sich der Exponent  $1/n^*$  ermitteln. Der Zusammenhang zwischen der Verdrängungsdicke und der Grenzschichtdicke ist durch

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{n^* + 1}$$

gegeben. Zur Bestätigung der Überlegungen werden noch die Werte für die Stufen des Verdichters Pirna TL 014 angegeben.

Stufe	6	8	9	10	11	Dimension
$r_a$	356	356	356	356	356	mm
$r_i$	275	296	300,5	303	303	mm
$l$	42	42	38	32	32	mm
$n^*$	6,42	4,42	3,97	3,795	3,73	-
$\delta^*/\delta$	0,1348	0,1845	0,2013	0,2085	0,2115	-
$\delta$	30,4	22,5	20,6	19,9	19,62	mm
$\delta/(r_a - r_i)$	0,375	0,3763	0,371	0,374	0,3725	-

Da in einer Axialverdichterstufe mit ausgebildeter Grenzschichtströmung das Verhältnis  $\delta_1^*/l$  beträchtlich größer ist als der von Gersten /21/ angegebene Grenzwert ( $\delta_1^*/l = 0,04$ ),

kann Letzterer zur Ermittlung der Randverluste eingesetzt werden.

Da in einem Axialverdichter mit ausgebildeter Grenzschichtströmung in den Stufen, im Gegensatz zu den Versuchen nach /18/, /19/, /20/, /21/ und /23/, beim Durchströmen der Schaufelgitter keine Verdickung Grenzschichtverdrängungsdicke zu erwarten ist, sind die Versuchsergebnisse für die Randverluste bei Verzögerungsgittern nicht bedingungslos auf Axialverdichterstufen übertragbar. Es würden zu große Randverluste vorgetäuscht. Eine Übertragung ist jedoch qualitativ möglich.

Um eine gute Näherung an die an mehrstufigen Axialverdichtern hinsichtlich der Höhe des Stufenwirkungsgrades gemachten Erfahrungen zu erhalten, wäre zur Ermittlung der Randverluste in der Gleichung 4.2.3 die Konstante  $C \approx 12$  einzusetzen. Dann erhält man anstelle der Gleichung 4.2.1:

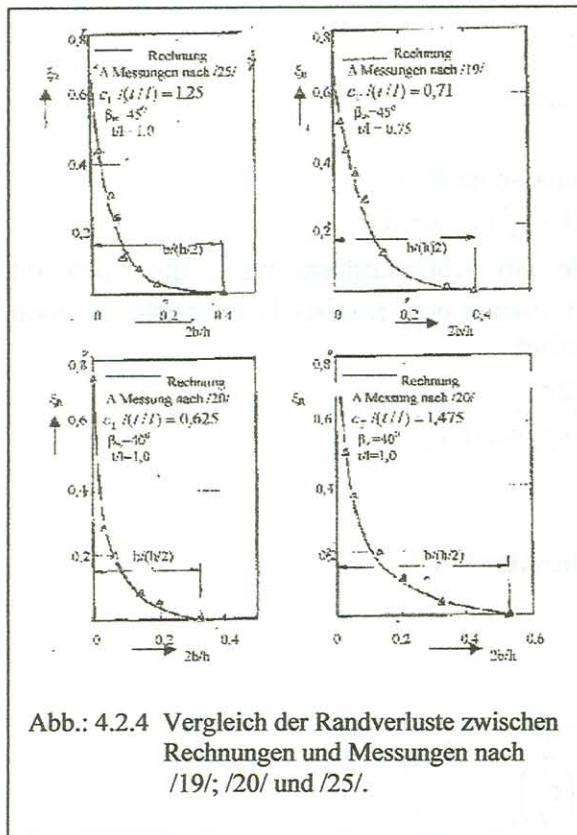
$$\bar{\xi}_R = 0,4 \left[ (0,0293 \cos \beta_\infty - 0,004) \left( \frac{c_r}{t/l} \right)^{(0,275 \cos \beta_\infty + 2)} + 0,018 \right] \quad 4.2.7$$

und anstelle der Gleichung 4.2.3

$$\xi_R = 30 \bar{\xi}_R \left[ \frac{1}{\left( \frac{z}{\delta^*} \right)^{0,825} + \frac{0,782}{e^{z/\delta^*}}} - \frac{1}{\left( \frac{b}{\delta^*} \right) + \frac{0,782}{e^{b/\delta^*}}} \right] \quad 4.2.8$$

mit  $0 < z/\delta^* < b/\delta^*$

wobei  $b/\delta^*$  durch Gl.: 4.2.4 und der Verlustbeiwert durch Gl.: 4.2.2 gegeben ist.



Die Abbildungen 4.2.4a bis 4.2.4d zeigen eine Gegenüberstellung der ermittelten Rechenwerte mit den aus der Literatur /19/, /20/ und /25/ entnommenen Messergebnissen für den örtlichen Randverlust in Schaufelgittern.

Die angegebenen Beziehungen geben einen recht guten Näherungswert für den Randverlust in Schaufelgittern die mit Unterschallströmung beaufschlagt werden.

Bei Schaufelgittern mit Überschallanströmung ist dagegen große Vorsicht geboten, da die durch den Sekundärwirbel induzierten Zusatzgeschwindigkeiten Winkelabweichungen gegenüber der regulären Strömungsrichtung des Gases hervorrufen wobei die Winkelabweichungen größer als der Keilwinkel im Eintrittsbereich eines Laufgitters sein können. Dies zeigen auch die Abströmwinkeländerungen in den Randgebieten von Schaufelgittern nach den Messungen von Wolf /20/.

### 4.3 Der Spaltverlust.

Wir betrachten einem Strömungskanal durch den ein Massenstrom von  $\dot{m} = 1 \text{ kg/s}$  fließt. In dem Kanal (Abb.: 4.3.1) sei ein Leitgitter mit einer Spaltweite  $s_{St}$  und ein Laufgitter mit der Spaltweite  $s_R$  enthalten. Es wird angenommen, dass sich der anteilige Massenstrom  $\Delta m$



und

$$\frac{\varphi_{\infty a}}{\hat{\varphi}_{\infty}} = \frac{c_{ax\infty a}}{\hat{c}_{ax\infty}} \frac{\hat{r}}{r_a}$$

Eingesetzt ergibt das:

$$\xi_{SpR} = K \frac{2s_R}{r_a(1-v_i^2)} \sqrt{\frac{2(\cot \beta_{1a} - \cot \beta_{2a})}{\left(\frac{t}{l}\right)_{Ra} \sin \beta_{\infty a}} \left(\frac{c_{ax\infty a}}{\hat{c}_{ax\infty}}\right)^2}$$

Für das Verhältnis der Axialgeschwindigkeiten kann nach Abschnitt 5.1 geschrieben werden:

$$\left(\frac{c_{ax\infty a}}{\hat{c}_{ax\infty}}\right)^2 = 1 + \alpha \frac{q+1}{q} \left(\frac{1-\rho_k}{\hat{\varphi}_{\infty}}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{r_a}{\hat{r}}\right)^2\right]$$

Somit gilt für den Spaltverlust im Laufgitter:

$$\xi_{SpR} = K_R \frac{2s_R}{r_a(1-v_i^2)} \sqrt{\frac{2(\cot \beta_{1a} - \cot \beta_{2a})}{\left(\frac{t}{l}\right)_{Ra} \sin \beta_{\infty a}} \left\{1 + \alpha \frac{q+1}{q} \left(\frac{1-\hat{\rho}_k}{\hat{\varphi}_{\infty}}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{r_a}{\hat{r}}\right)^{2q}\right]\right\}} \quad 4.3.2$$

b) Leitgitterspaltverluste.

Bei der Trommelläuferbauart eines Verdichters liegt der Radialsplatt am Nabenradius  $r_i$  der Stufe. Analog zu den Ableitungen für das Laufgitter gilt für den Spaltverlust beim Leitgitter:

$$\xi_{SpSt} = K \frac{2s_{St}v_i}{r_a(1-v_i)} \sqrt{\frac{2(\cot \alpha_{2i} - \cot \alpha_i)}{\left(\frac{t}{l}\right)_{Sti} \sin \alpha_{\infty i}} \left\{1 + \alpha \frac{q+1}{q} \left(\frac{1-\hat{\rho}_k}{\hat{\varphi}_{\infty}}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{r_i}{\hat{r}}\right)^{2q}\right]\right\}} \quad 4.3.3$$

Dabei wurden die Winkelbezeichnungen der Abb.: 1.2 verwendet.

Der gesamte Spaltverlust einer Verdichterstufe ist dann:

$$\xi_{Sp} = \xi_{SpR} + \xi_{SpSt} \quad 4.3.4$$

Der Einfluss der Spaltverluste auf den Wirkungsgrad der Stufe ist entsprechend den Ableitungen durch

$$\eta_{St} = \eta_{St0}(1 - \xi_{St}) \quad 4.3.5$$

gegeben.

Da eine theoretische Erfassung der Spaltverluste infolge der komplizierten Spaltströmung bisher noch nicht gelang, ist der Korrekturfaktor für die abgeleiteten Beziehungen aus Versuchsunterlagen zu ermitteln.

Brauchbare Unterlagen ergeben die von Ackermann an ebenen Verdichtergittern durchgeführten Versuche (siehe hierzu /29/). Die Kenndaten der untersuchten Profile der Profildreihe NACA 8410 sind:

Profildickenverhältnis	$d/l = 0,1$
Teilungsverhältnis	$t/l = 0,94$
Seitenverhältnis	$h/l = 3,75$
Wölbungswinkel	$\Theta = 34,7^\circ$
Tangenteneintrittswinkel	$\kappa_1 = 21,8^\circ$
Tangentenaustrittswinkel	$\kappa_2 = 12,9^\circ$
Anströmwinkel	$\beta_1 = 30^\circ$
Abströmwinkel	$\beta_2 = 49,3^\circ$

Der Zirkulationsbeiwert der Gitterprofile beträgt:

$$c = \frac{2(\cot \beta_1 - \cot \beta_e)}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(\cot \beta_1 + \cot \beta_2)^2}} \frac{t}{l} = 1,0$$

und die analoge Gitterbelastungszahl:

$$\frac{\psi}{\varphi} = 2(\cot \beta_1 - \cot \beta_2) = 1,7438$$

Die Ergebnisse der Verlustuntersuchungen zeigt Abb.: 4.3.2. Man erkennt, dass der Spaltverlust für die praktischen Belange linear mit der Spaltweite ansteigt.

Der Verlust wurde in der Form

$$\xi = \frac{\Delta p^*}{q_{cax}}$$

angegeben. Mit den Widerstandsbeiwert steht dieser Ausdruck in folgenden Zusammenhang:

$$c_{wSp} = \frac{W}{q_{\infty} l} = \frac{t \sin \beta_{\infty} \Delta p^*}{q_{\infty} l}$$

$$= \frac{t}{l} \sin^3 \beta_{\infty} \frac{\Delta p^*}{q_{\infty}} = \frac{t}{l} \sin^3 \beta_{\infty} \xi$$

Nach Gl.: 3.4.4 galt für den Wirkungsgrad eines Einzelgitters:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\psi_{th}} \frac{c_w \varphi_{\infty}^2}{l}$$

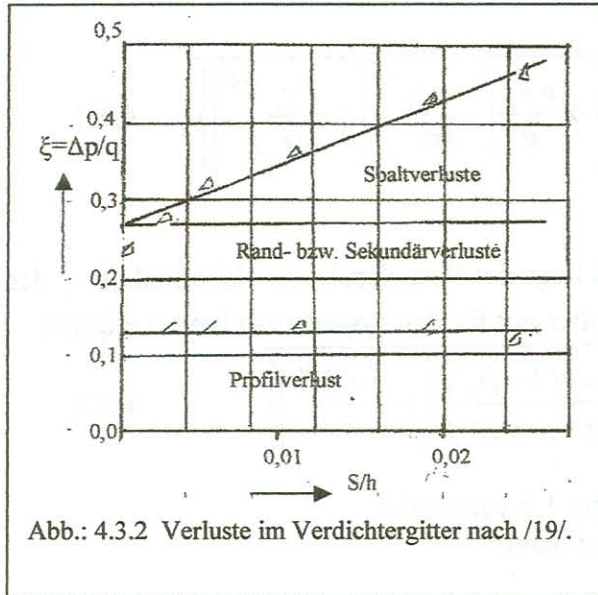


Abb.: 4.3.2 Verluste im Verdichtergitter nach /19/.

oder mit den Widerstandsbeiwert:

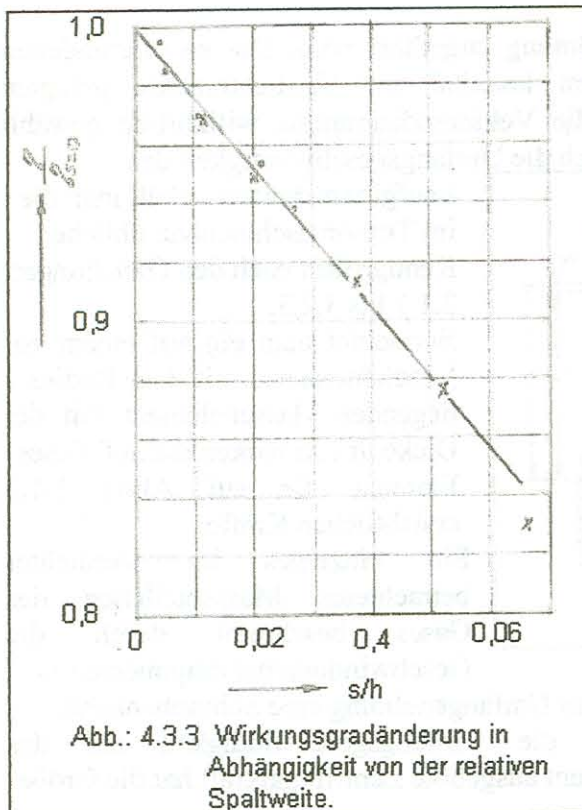
$$\eta = 1 - \frac{\varphi_{\infty}^2}{\psi_{th}} \xi$$

Setzt man weiterhin eine Lieferzahl von  $\varphi_{\infty} = 0,5$  voraus, kann man mit den Messwerten der Abb.: 4.3.2 das Verhältnis des Wirkungsgrades bei entsprechenden Spitzenspalten zum Wirkungsgrad ohne Spitzenspalt ermitteln. Die entsprechenden Werte sind:

$s/h$	0,0000	0,0028	0,0053	0,0106	0,0213	0,0267
$\xi = \Delta p^* / q_{ax}$	0,272	0,28	0,32	0,3645	0,420	0,47
$\eta$	0,922	0,9197	0,9082	0,8953	0,8795	0,865
$\eta / \eta_0$	1,0	0,997	0,985	0,9708	0,954	0,938

Um die Übertragbarkeit der Messwerte vom ebenen Gitter auf die Verdichterstufe zu untermauern, sollen diese Wirkungsgradverhältnisse mit den Messwerten am mehrstufigen Alice- Verdichter /30/ verglichen werden. Die Abb.: 4.3.3 zeigt die am Alice- Verdichter gewonnenen Messergebnisse und die Ergebnisse nach Messungen von Ackermann /29/ in Abhängigkeit von der Größe des Spitzenspaltes. Bemerkenswert ist die gute Übereinstimmung zwischen den Messwerten vom ebenen Gitter und den am Verdichter gewonnenen Messwerten. Dies lässt die Schlussfolgerung zu, dass ein aus den Werten des ebenen Gitters gewonnener Korrekturfaktor auch auf eine Verdichterstufe angewendet werden darf.





Da die Werte des Verdichtergitters nach /29/ bekannt sind, lässt sich analog zu Gl.: 4.3.1 eine Spaltverlustbeziehung für das ebene Gitter ableiten um den erforderlichen Korrekturfaktor K zu ermitteln.

Für die Spaltdurchflussmenge des Gases galt:

$$m_{Sp} = \rho l s c_{\infty} \sqrt{c_{\Gamma}}$$

Beim ebenen Gitter kann man für die durch den von zwei Schaufeln begrenzten Strömungskanal fließende Durchsatzmenge des Gases setzen:

$$m = \rho h t c_{\infty} \sin \beta_{\infty}$$

Analog zu Gl.:4.3.1 ergibt sich:

$$\xi = K \frac{m_{Sp}}{m} = K \frac{s/h \sqrt{c_{\Gamma}}}{t/l \sin \beta_{\infty}}$$

Nach Gl.: 4.3.5 galt auch:

$$\xi = 1 - \frac{\eta}{\eta_{s=0}}$$

wobei das Wirkungsgradverhältnis aus den

Messwerten bekannt ist. Mit den Werten des Gitters

$$\sin \beta_{\infty} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} (\cot \beta_1 + \cot \beta_2)^2}} = 0,611$$

und den bekannten Zirkulationsbeiwert sowie das Gitterteilungsverhältnis folgt dann für den Korrekturfaktor:

$$K = \frac{1 - \frac{\eta}{\eta_{s=0}}}{\frac{s}{h} \sqrt{c_{\Gamma}}} \frac{t}{l} \sin \beta_{\infty} = 0,574 \frac{1 - \frac{\eta}{\eta_{s=0}}}{\frac{s}{h}}$$

Benutzt man die auf Abb.:4.3.3 durch die Messpunkte gehende Gerade, so kann der von der Spaltweite unabhängige Korrekturwert

$$K = 1.375$$

Ermittelt werden. Dieser Wert kann zur Ermittlung der Spaltverluste nach den Gleichungen 4.3.2 und 4.3.3 benutzt werden.

## 5. Die Kinematik im Verdichter.

### 5.1 Die Kinematik in der Stufe eines Axialverdichters.

Die Druckerzeugung in der Stufe eines Axialverdichters erfolgt in eines rotierenden Laufgitter und in einen nachfolgendem ruhenden Leitgitter. Dabei wird die Energie dem Gas durch eine Vergrößerung seines Bewegungsimpulses im Laufgitter zugeführt. Durch eine Ausbildung sowohl des Laufgitters als auch des Leitgitters als Verzögerungsgitter verteilt sich die statische Druckerhöhung des Gases in der Stufe auf Verzögerungsgitter. Dabei ist es gleichgültig ob dem Gas die Energie durch eine Kombination eines schrägen und geraden

Verdichtungsstoßes oder/und einer Diffusorströmung zugeführt wird. Die so entstandenen Geschwindigkeitsvektordiagramme auf einem koaxial zur Verdichterachse gelegten Schaufelschnitt zeigt die Abb.: 5.1.1, wobei die Vektordiagramme willkürlich gewählt wurden. Dividiert man die einzelnen Größen durch die Umfangsgeschwindigkeit des

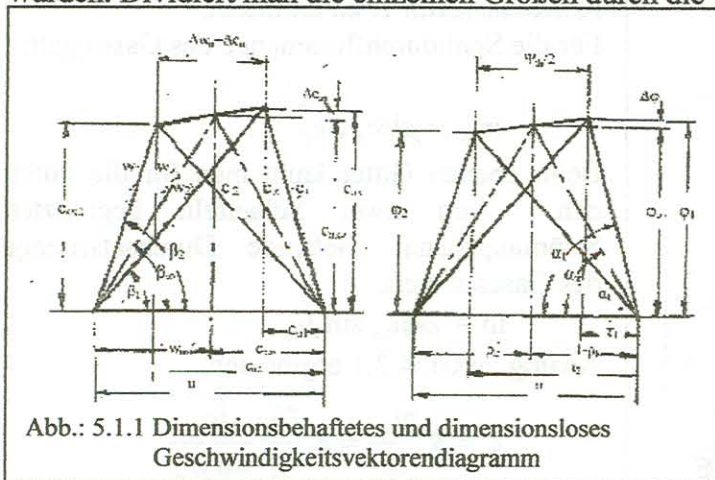


Abb.: 5.1.1 Dimensionsbehaftetes und dimensionsloses Geschwindigkeitsvektordiagramm

Laufgitterschnittes, erhält man die im Turbomaschinenbau üblichen Kenngrößen nach den Gleichungen 3.1.1 bis 3.2.3.

Betrachtet man ein auf einem zur Verdichterachse mit dem Radius  $r$  liegendes Massenelement mit der Dicke  $dr$ , so wirken die auf dieses Element die auf Abb.: 5.1.2 ersichtlichen Kräfte.

Ein einzelnes im Verdichter betrachtetes Massenteilchen des Gases beschreibt durch die Geschwindigkeitskomponenten in

axialer und in Umfangsrichtung eine Schraubenbahn. Die durch die Umfangsgeschwindigkeit auf das Massenelement ausgeübte Zentrifugalkraft hat die Größe

$$C = dm r \omega^2 = \rho dF dr \frac{c_u^2}{r}$$

Der auf das Massenteilchen wirkende statische Druckunterschied ergibt die Kraft

$$P = (p + dp) dF - p dF = dp dF$$

Da sich die einzelnen Massenteilchen auf gekrümmten Meridianstromlinien bewegen können, kommt schließlich noch die d' Alambertsche Trägheitskraft hinzu:

$$T = \rho dF dr \frac{dc_r}{dt}$$

Setzt man alle auf das Massenteilchen einwirkenden Kräfte ins Gleichgewicht, erhält man alle auf das

Massenteilchen einwirkenden Kräfte ins Gleichgewicht, erhält man die im Turbomaschinenbau bekannte Differentialgleichung:

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{c_u^2}{r} dr + \frac{dc_r}{dt} dr \quad 5.1.1$$

In jedem Punkt eines beliebigen senkrecht zur Verdichterachse gelegten Schnittes muss die Bernoullische Gleichung erfüllt sein.

$$h_{th}^* = h_{th} + \frac{c^2}{2} + zg \quad 5.1.2$$

Die geodätische Höhe der einzelnen Massenteilchen bleibt bei den zu betrachtenden Bewegungsvorgängen ohne Einfluss. Deshalb kann man sich auf die verkürzte Form der Bernoullischen Gleichung beschränken. Die Gesamtenergie des Gases kann einen über den Radius beliebigen Wert haben oder im Grenzfall auch konstant sein.

Durch Differenzieren des Ausdruckes erhält man mit den Geschwindigkeitskomponenten nach Abb.: 5.1.1:

$$dh_{th}^* = dh_{th} + cdc = dh_{th} + c_{ax}dc_{ax} + c_u dc_u \quad 5.1.3$$

Der statische Energieanteil ist durch die Differentialgleichung 5.1.1 gegeben.

$$dh_{th}^* = c_{ax}dc_{ax} + c_u dc_u + \frac{c_u^2}{r} dr + \frac{dc_r}{dt} dr$$

Mit der Integration über den Stufenradius erhält man:

$$h_{tha}^* - h_{th}^* = \int_{c_{ax}}^{c_{axa}} c_{ax} dc_{ax} + \int_{c_u}^{c_{ua}} c_u dc_u + \int_r^{r_a} \frac{c_u^2}{r} dr + \int_r^{r_a} \frac{dc_r}{dt} dr \quad 5.1.4$$

Die Gleichung 5.1.4 kann sowohl in der Stufenebene I (vor Laufgitter) als auch in der Stufenebene II (nach Laufgitter) angewendet werden, wenn der jeweilige Verlauf der Geschwindigkeitskomponenten über den Radius bekannt ist. Die Verteilung der Energie über den Radius in der Stufenebene I kann beliebig sein. Hinter dem Laufgitter, also in der Stufenebene II, ist dann der Energieinhalt des Gases:

$$h_{thII}^* = h_{thI}^* + h_{th} \quad 5.1.5$$

wobei  $h_{th}$  die dem Gas im Laufgitter zugeführte Energie darstellt. Soll diese über den Radius der Stufe linear veränderlich angenommen werden [32], erhält man nach Abb.: 5.1.3:

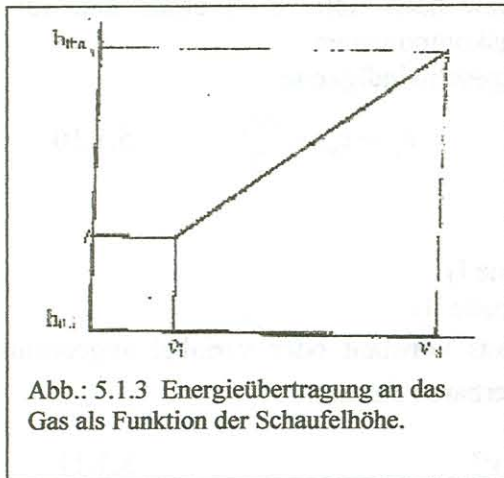


Abb.: 5.1.3 Energieübertragung an das Gas als Funktion der Schaufelhöhe.

$$h_{th} = h_{tha} - \frac{h_{tha} - h_{thi}}{1 - v_i} (1 - v) \quad 5.1.6$$

Dabei ist:

$$v_i = \frac{r_i}{r_a} \quad \text{das Nabenverhältnis}$$

$$v = \frac{r}{r_a} \quad \text{das Radienverhältnis}$$

Der

Index a bezieht sich dabei auf den Wert am Außenradius und der Index i auf den Werte am Innenradius der Stufe.

Mit den Eulerschen Beziehungen :

$$h_{th} = u\Delta c_u; \quad h_{tha} = u_a\Delta c_{ua}; \quad h_{thi} = u_i\Delta c_{ui}$$

und der Gleichung 5.1.5 erhält man für die Differenz der Umfangskomponenten der Absolutgeschwindigkeiten auf irgendeinem Radius den Ausdruck:

$$\Delta c_u = \frac{\Delta c_{ua}}{v} \left[ 1 - \frac{1 - \frac{\Delta c_{ui}}{v}}{1 - v_i} (1 - v) \right]$$

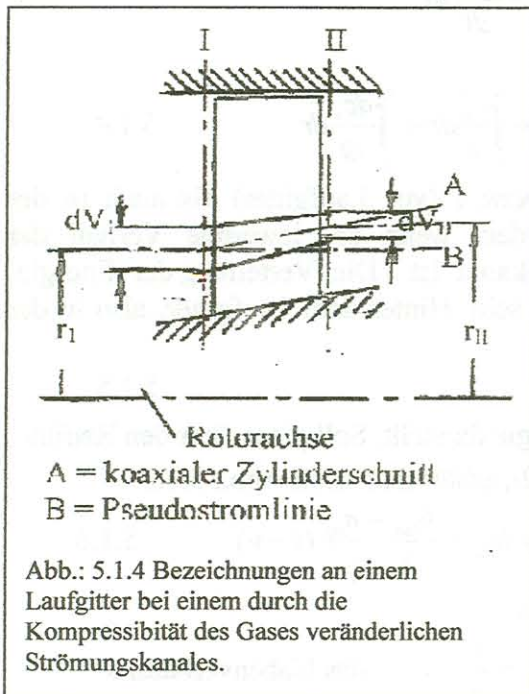
Der Bruch im Klammerausdruck ist eine Konstante, deren Größe von der Wahl der im Laufgitter dem Gas zuzuführenden Energie am Außen- und Innenradius der Stufe abhängig ist. Mit

$$\frac{1 - \frac{h_{thi}}{h_{tha}}}{1 - v_i} = \frac{1 - \frac{\Delta c_{ui}}{\Delta c_{ua}} v_i}{1 - v_i} = K \quad 5.1.7$$

ergibt sich die einfache Beziehung:

$$\Delta c_u = \frac{\Delta c_{ua}}{v} [1 - K(1 - v)] \quad 5.1.8$$

Die Gleichung 5.1.8 gilt, solange auf coaxialen Zylinderschnitten einer Stufe gerechnet wird. Durch die Kompressibilität des zu verdichtenden Gases ist das Volumen in der Stufenebene I größer als in der Stufenebene II (siehe Abb.: 5.1.4). deshalb kann angenommen werden, dass



sich ein Massenteilchen des zu verdichtenden Gases auf einer Pseudo-Stromlinie durch das Laufgitter bewegt. Um diese Erscheinung zu berücksichtigen wird der Ansatz

$$\Delta c_u = \Delta c_{ua} v^\varepsilon [1 - K(1-v)] \quad 5.1.9$$

gemacht.

Wie man noch sehen wird, ist  $\varepsilon$  eine Funktion des Radienverhältnisses  $v$  der Stufe wobei eine Korrektur der Energiezufuhr an das Gas durchaus sinnvoll oder zur Einhaltung des Stabilitätskriteriums von Hamilton (siehe Abschnitt 3.3) notwendig sein kann.

Entsprechend der Geschwindigkeitsvektordiagramme nach Abb.: 5.1.1 erhält man für die Umfangskomponenten der Absolutgeschwindigkeit

$$c_u = c_{u\infty} \pm \frac{\Delta c_u}{2} \quad 5.1.10$$

Für die Vorzeichen gilt:

- vor Laufgitter (Stufenebene I)
- + nach Laufgitter (Stufenebene II)

Die Umfangskomponente  $c_{u\infty}$  kann über den Radius konstant oder variabel angenommen werden. Schröder /33/ machte hier den leicht integrierbaren Ansatz:

$$c_{u\infty} = c_{u\infty a} \left( \frac{r}{r_a} \right)^q = c_{u\infty a} v^q \quad 5.1.11$$

Dabei bedeutet:

- q = +1 konstante kinematische Reaktion
- q = -1 Potentialwirbel
- q = 0 konstante Drallverteilung.

Setzt man die Beziehungen 5.1.9 und 5.1.11 in die Gleichung 5.1.10 ein, erhält man den Ausdruck:

$$c_u = c_{u\infty a} v^q \pm \frac{\Delta c_{ua}}{2} v^\varepsilon [1 - K(1-v)] \quad 5.1.12$$

und für  $c_u^2$ :

$$c_u^2 = c_{u\infty a}^2 v^{2q} \pm c_{u\infty a} \Delta c_{ua}^{q+\varepsilon} [1 - K(1-v)] + \frac{\Delta c_{ua}^2}{4} v^{2\varepsilon} [1 - 2K + 2Kv + K^2 - 2K^2v + Kv^2] \quad 5.1.13$$

Damit ist es möglich die in der Gleichung 5.1.4 enthaltenen Integralausdrücke zu lösen. Für die einzelnen Integrale ergibt sich dann:

$$\int_{c_{ax}}^{c_{axa}} c_{ax} dc_{ax} = \frac{1}{2} (c_{axa}^2 - c_{ax}^2) \quad 5.1.14$$

$$\int_c^{c_{ua}} c_u dc_u = \frac{1}{2} \left[ c_{ua}^2 (1 - v^{2q}) \pm c_{ua} \Delta c_{ua} (1 - v^{q+\varepsilon}) \pm c_{ua} \Delta c_{ua} K (v^{q+\varepsilon} - v^q) \right. \\ \left. + \frac{\Delta c_{ua}^2}{4} (1 - v^{2q}) + 2K \frac{\Delta c_{ua}^2}{4} (v^{2\varepsilon} - v^{2\varepsilon+1}) - K^2 \frac{\Delta c_{ua}^2}{4} (v^{2\varepsilon} - 2v^{2\varepsilon+1} + v^{2\varepsilon+2}) \right] \quad 5.1.15$$

$$\int_r^r \frac{c_u^2}{r} dr = \int_v^1 \frac{c_u^2}{v} dv = \frac{1}{2} \left[ \frac{c_{ua}^2}{q} (1 - v^{2q}) \pm 2 c_{ua} \Delta c_{ua} \left[ \frac{1-K}{q+\varepsilon} (1 - v^{q+\varepsilon}) + \frac{K}{q+\varepsilon+1} (1 - v^{q+\varepsilon+1}) \right] \right. \\ \left. + \frac{\Delta c_{ua}^2}{4} \left[ \frac{1}{\varepsilon} (1 - v^{2\varepsilon}) (1-K)^2 + \frac{4}{2\varepsilon+1} (1 - v^{2\varepsilon}) (K - K^2) + \frac{K^2}{\varepsilon+1} (1 - v^{2\varepsilon+2}) \right] \right] \quad 5.1.16$$

Setzt man die Beziehungen 5.1.14 bis 5.1.16 in die Gleichung 5.1.4 ein,, erhält man nach einigen umständlichen aber einfachen Umformungen unter Verwendung der in Abschnitt 3.2 erwähnten dimensionslosen Kennzahlen ( Gl.: 3.1.1; Gl.: 3.1.3 und Gl.: 3.1.3) für den Axialgeschwindigkeitsverlauf in der Strömungsebene I (vor Laufgitter) und in der Strömungsebene II ( nach Laufgitter) einer Verdichterstufe einer Axialverdichterstufe die allgemeine Beziehung:

$$\left( \frac{c_{ax}}{u_a} \right)^2 = \varphi_a^2 + \alpha A \pm \beta B - C \quad 5.1.17$$

Dabei ist:

$$A = \left[ \frac{q+1}{q} (1 - \rho_k)^2 (1 - v^{2q}) + \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon} \frac{\psi_{th}^2}{16} (1 - K^2) (1 - v^{2\varepsilon}) \right. \\ \left. + \frac{2\varepsilon+3}{2\varepsilon+1} \frac{\psi_{th}^2}{8} (K - K^2) (1 - v^{2\varepsilon+1}) + \frac{q+2}{q+1} \frac{\psi_{th}^2}{16} K^2 (1 - v^{2\varepsilon+2}) \right] \quad 5.1.17 a$$

$$B = \frac{1 - \rho_k}{2} \psi_{th} \left[ \frac{q+\varepsilon+2}{q+\varepsilon} (1 - K) (1 - v^{q+\varepsilon}) - K (1 - v^q) + \frac{2K}{q+\varepsilon+1} (1 - v^{q+\varepsilon+1}) \right] \quad 5.1.17 b$$

$$C = \frac{2c_p}{Au_a^2} [T_{Ia}^* - T_I^*] \quad 5.1.17 c$$

Dabei ist  $A = 1/427$  das mechanische Wärmeäquivalent.

In der Gleichung 5.1.17 wurden bereits die Korrekturfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  /33/ berücksichtigt (siehe Abschnitt 5.2). Deshalb ist eine Vernachlässigung des Trägheitsgliedes nach der Gl.: 5.1.4 gerechtfertigt.

Bei der Gleichung 5.1.17 gilt für die Vorzeichen:

- vor Laufgitter in der Stufenebene I
- + hinter Laufgitter in der Stufenebene II

und für die anderen charakteristischen Werte:

$K = 0$   $h_{th} = f(v) = konst. =$  konstante Energieumsetzung über den Radius des Laufgitters.

$K \neq 0$   $h_{th} = f(v) \neq 0 =$  linear veränderliche Energieumsetzung über den Radius des Laufgitters.

$\varepsilon = -1$  für Rechnungen auf koaxialen Zylinderschnitten.

$\varepsilon \neq -1$  für Rechnungen auf Pseudo-Stromlinien.

- $q = +1$  für konstante kinematische Reaktion über den Radius der Stufe  
 $q = -1$  für den Potentialwirbel  $c_{\infty} r = konst.$   
 $q = 0$  für konstante Drallverteilung.

Die Symbole  $\alpha$  und  $\beta$  stellen die Korrekturfaktoren nach Schröder /33/ dar. Diese erfassen die Einflüsse durch die induzierten Geschwindigkeiten sowohl der gebundenen Wirbel in der Schaufelgitterebene als auch der freien Wirbel, die mit der Strömung abfließen, auf die Axialgeschwindigkeitsverteilung. Näheres darüber ist im Abschnitt 5.2 zu finden.

Mit der radialen Axialgeschwindigkeitsverteilung in Verdichterstufen haben sich unter anderen schon mehrere Autoren (/27/, /34/, /35/, /36/, /37/) beschäftigt deren Verfahren in der Praxis einen großen Rechenaufwand beinhalten.

Das Verfahren von Schröder /33/ ist bei der Ermittlung der Axialgeschwindigkeitsverteilung in Verdichterstufen leicht zu handhaben und hat sich in der Praxis vielfach bewährt.

Aus der Gl.: 5.1.17 lassen sich noch die einzelnen wichtigsten kinematischen Schemata für die einzelnen Axialgeschwindigkeitsverteilungen angeben.

$$K \neq 0, \quad \varepsilon = -1, \quad -1 < q < +1$$

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{c_{ax}}{u_a} \right)^2 = \varphi^2 = \varphi_a^2 + \alpha & \left[ \frac{q+1}{q} (1-\rho_{ka})^2 (1-v^{2q}) - \frac{\psi_{tha}^2}{8} (K-K^2)(1-v^{-1}) \right] \\
 \pm / \beta / \frac{1-\rho_k}{2} \psi_{tha} & \left[ \frac{q+1}{q-1} (1-K)(1-v^{q-1}) - K \frac{q-2}{q} (1-v^q) \right] \\
 - \frac{2c_p}{u_a^2 A} [T_{Ia}^* - T_I^*] & \qquad \qquad \qquad 5.1.17-a
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung wurde bei der Auslegung des Verdichters für das Zweikreistriebwerk Pirna ZTL 020 verwendet.

$$K = 0, \quad \varepsilon \neq -1; \quad -1 < q < +1$$

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{c_{ax}}{u_a} \right)^2 = \varphi^2 = \varphi_a^2 + \alpha & \left[ \frac{q+1}{q} (1-\rho_{ka})^2 (1-v^{2q}) + \frac{\varepsilon+1}{\varepsilon} \frac{\psi_{tha}^2}{16} (1-v^{2\varepsilon}) \right] \\
 \pm / \beta / \left[ \frac{q+\varepsilon+2}{q+\varepsilon} \left( \frac{1-\rho_{ka}}{2} \right) \psi_{tha} \right] & (1-v^{q+\varepsilon}) - \frac{2c_p}{u_a^2} [T_{Ia}^* - T_I^*] \qquad 5.1.17-b
 \end{aligned}$$

$$K = 0, \quad \varepsilon = -1; \quad -1 < q < +1$$

5.1.17-c

$$\left( \frac{c_{ax}}{u_a} \right)^2 = \varphi^2 = \varphi_a^2 + \alpha \frac{q+1}{q} (1-\rho_{ka})^2 (1-v^{2q}) \pm / \beta / \frac{q+1}{q-1} \psi_{tha} \frac{1-\rho_{ka}}{2} (1-v^{q+1}) - \frac{2c_p}{u_a^2 A} [T_{Ia}^* - T_I^*]$$

Diese Gleichung wurde bei der Auslegung des Verdichters für das Strahltriebwerk Pirna TL 014 verwendet.

$$K = 0, \quad \varepsilon \neq -1, \quad q = +1$$

$$\left(\frac{c_{ax}}{u_a}\right)^2 = \varphi^2 = \varphi_a^2 + \alpha \left[ 2(1 - \rho_{ka})^2 (1 - v^2) + \psi_{tha}^2 \frac{\varepsilon + 1}{16\varepsilon} (1 - v^{2\varepsilon}) \right] \\ \pm \beta / \left[ \frac{1 - \rho_{ka}}{2} \psi_{tha} \frac{\varepsilon + 3}{\varepsilon + 2} (1 - v^{1+\varepsilon}) \right] - \frac{2c_p}{u_a^2 A} [T_{Ia}^* - T_I^*] \quad 5.1.17-d$$

Diese Gleichung wurde bei der Auslegung des Verdichters für das Strahltriebwerk Pirna TL 016 verwendet.

$$K = 0, \quad \varepsilon = -1, \quad q = +1.$$

Für diese Bedingungen wird der Ausdruck in der Gleichung 5.1.17-d der Ausdruck

$$\frac{1 - v^{1+\varepsilon}}{1 + \varepsilon} = \frac{0}{0}$$

also unbestimmt. Bildet man hierfür den Grenzwert

$$\lim \frac{(1 - v^{1+\varepsilon})'}{(1 + \varepsilon)'} = \lim \frac{(1 - v^z)'}{z'} = -\ln v$$

wobei die Werte  $\varepsilon$  gegen  $-1$  und  $z$  gegen  $0$  gehen. Damit gilt dann:

$$\left(\frac{c_{ax}}{u_a}\right)^2 = \varphi_a^2 + \alpha 2(1 - \rho_{ka})^2 (1 - v^2) \pm \beta / (1 - \rho_{ka}) \psi_{tha} \ln v - \frac{2c_p}{u_a^2 A} [T_{Ia}^* - T_I^*] \quad 5.1.17-e$$

Dieser Ausdruck entspricht der Auslegung des Verdichters für das Propellertriebwerk Pirna PTL 018.

$$K = 0, \quad q = 0, \quad \varepsilon = -1$$

$$\left(\frac{c_{ax}}{u_a}\right)^2 = \varphi^2 = \varphi_a^2 - \alpha \left[ 2(1 - \rho_{ka})^2 \ln v \right] \pm \beta / \frac{1 - \rho_{ka}}{2} \psi_{tha} \left( \frac{1}{v} - 1 \right) - \frac{2c_p}{u_a^2 A} [T_{Ia}^* - T_I^*] \quad 5.1.17-f$$

$$K = 0, \quad q = -1, \quad \varepsilon = -1$$

$$\left(\frac{c_{ax}}{u_a}\right)^2 = \varphi_a^2 - \frac{2c_p}{u_a^2 A} [T_{Ia}^* - T_I^*] \quad 5.1.17-g$$

In den Gleichungen der Kategorie 5.1.17 sind die dimensionslosen Kennzahlen wie

- die Druckzahl  $\psi_{th}$
- der kinematische Reaktionsgrad  $\rho_k$
- die Lieferzahl  $\varphi_a = \frac{c_{axa}}{u_a}$

auf den Außenradius der Stufe bezogen.

Es ist zweckmäßig am Innenschnitt der Stufe den kinematische Reaktionsgrad zur Erreichung eines guten Wirkungsgrades mit  $\rho_{ki} = 0.5$  anzusetzen (siehe Abschnitt 3.4). Aus Gründen der Strömungsstabilität sollte am Innenradius der Stufe die Druckzahl  $\psi_{thi} < 2$  gewählt werden (siehe Abschnitt 3.3) Mit Hilfe der Gleichungen 5.1.8 bis 5.1.11 können diese Werte für den Innenradius leicht auf den Außenradius der Stufe umgerechnet werden.

Da im Verdichter allgemein das Gas mit konstanter Temperatur angesaugt wird und die Energiezufuhr, mit einigen Ausnahmen, bei  $K = 0$  über den Radius des Laufgitters konstant ist, kann das Temperaturglied in den entsprechenden Gleichungen entfallen.

Damit sind die Geschwindigkeitsverteilungen in Axialverdichterstufen für die wichtigsten in der Praxis auftretenden kinematischen Schemata angegeben.

Grundsätzlich sind bei einem mehrstufigen Axialverdichter die möglichen charakteristischen Bauarten zu unterscheiden. Diese sind:

- a) Der Außenradius  $r_a$  ist in Abhängigkeit von der Stufenzahl  $z$  konstant.  
( $r_i = f(z)$  ist variabel)
- b) Der Kontinuitätsradius der einzelnen Stufen ist konstant.  
( $r_i = f(z)$  und  $r_a = f(z)$  ist variabel).
- c) Der Innenradius  $r_i$  ist in Abhängigkeit von der Stufenzahl konstant.  
( $r_a = f(z)$  ist variabel).

Zwischen den Grenzen a) und c) kann auch ein beliebiger Radius konstant gehalten werden.

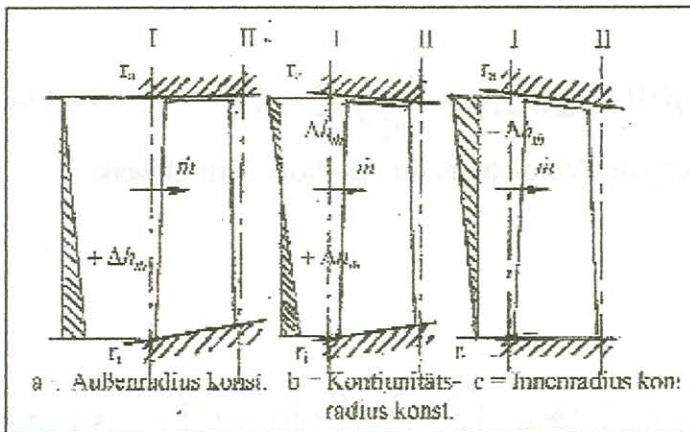


Abb.: 5.1.5 Darstellung der Änderung der Energieübertragung in der Stufe an das Gas auf Pseudostromlinien gegenüber der Strömung des Gases auf coaxialen Zylinderschnitten.

In der Abb.: 5.1.5 sind schematisch die Stufen für die Bauarten a), b) und c) dargestellt. Am Eintritt zum Laufgitter ist jeweils  $\Delta h_{th}$  nach Gl.: 5.1.18 schematisch angegeben wenn der Strömungsverlauf des Gases entlang den Pseudo-Stromlinien verläuft und nicht auf den rechnerischen coaxialen Zylinderschnitten. Gefordert wird aber entlang der Laufgitterhöhe eine Energieübertragung an das Gas von

$$h_{th}(v) = \text{konstant}$$

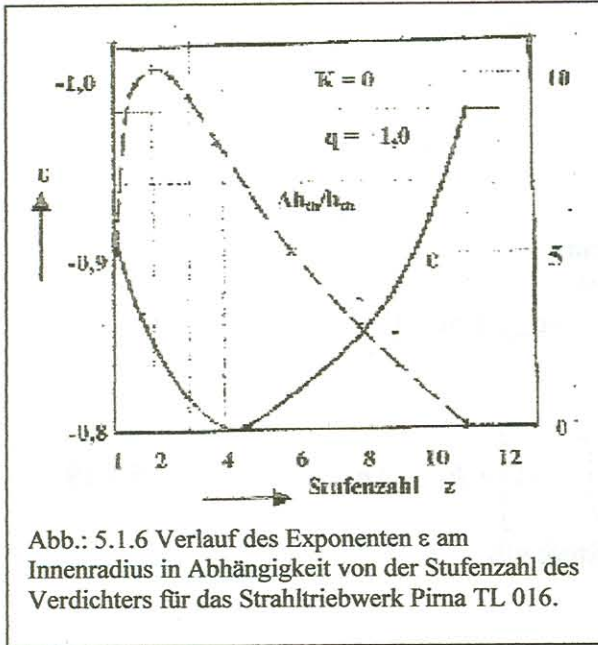
oder

$$h_{th}(v) \neq \text{konstant.}$$

Das bedeutet aber, dass bei der Festlegung der Geschwindigkeitsvektorendiagramme in den einzelnen Schaufelschnitten mit:

- $h_{th} - \Delta h_{th}$  festgelegt werden müssen, wenn die Pseudo-Stromlinie in Strömungsrichtung gesehen von der Verdichterachse wegzeigen.
- $h_{th} + \Delta h_{th}$  festgelegt werden müssen, wenn die Pseudo-Stromlinie in Strömungsrichtung gesehen zur Verdichterachse hinzeigen.





Bei Stufen für hochbelastete Axialverdichter ist zu prüfen, ob durch den Kompressibilitätseinfluss des Gases die Berücksichtigung von Pseudo-Stromlinien und damit des Exponenten  $\varepsilon \neq -1$  in den einzelnen Stufen notwendig ist.

Die Abb.: 5.1.6 zeigt als Beispiel die Abhängigkeit des Exponenten  $\varepsilon$  am Innenradius des Verdichters für das Strahltriebwerk Pirna TL 016.

Gleichzeitig ist die Änderung der Energieübertragung im Laufgitter bezogen auf die geforderte Energieübertragung

$h_{th}$  der jeweiligen Stufe am

Innenradius entsprechend der

Abb.: 5.1.5 a) angegeben.

In diesen Zusammenhang ist aber die Stabilität der Strömung in der Verdichterstufe am Innenradius (Nabentotwassergebiet) angesprochen. Hinsichtlich der Stabilitätskriterien der Strömung sei auf den Abschnitt 3.3 verwiesen.

Für Axialverdichterstufen mit Überschallanströmung der Laufgitter aber bei Unterschallströmung im absoluten Strömungssystem ist die Gl.: 5.17 auch anwendbar, da sie nur auf strömungstechnische Werte des Gases im absoluten Strömungssystem der Ebenen I und II einer Stufe aufgebaut wurde.

Nun sollen noch einige Ausführungen über den Exponenten  $\varepsilon$  gemacht werden, der den Kompressionseinfluss des strömenden Gases beim durchströmen einer Verdichterstufe infolge der Energiezufuhr im Laufgitter berücksichtigen soll.

Die strömungstechnische Berechnung einer Axialverdichterstufe erfolgt normalerweise auf zur Verdichterachse gelegte koaxiale Zylinderschnitte. Betrachtet man ein Volumenteil des Gases, so hat dieses vor dem Laufgitter das Volumen  $dV_I$  und infolge der Energieübertragung im Laufgitter dahinter das kleinere Volumen  $dV_{II}$ . Entsprechend der Volumenänderung des Gases durch die Energiezufuhr im Laufgitter muss bei gleicher Durchflussgeschwindigkeit des Gases der Strömungsquerschnitt in der Ebene II hinter dem Laufgitter kleiner sein als in der Ebene I vor dem Laufgitter.

Entsprechend der Abb.: 5.1.4 gilt für die Euler-Gleichung:

$$h_{th} = \omega(c_{uII}r_{II} - c_{uI}r_I)$$

Mit

$$c_u = c_{u\infty} \pm \frac{\Delta c_u}{2}$$

Gilt dann auch entlang einer Pseudo-Stromlinie:

$$h_{th} = \omega \left[ \left( c_{u\infty II} + \frac{\Delta c_{uII}}{2} \right) r_{II} - \left( c_{u\infty I} - \frac{\Delta c_{uI}}{2} \right) r_I \right]$$

Da die Betrachtungen auf die Strömungsvorgänge entlang der Pseudo-Stromlinien gerichtet sind, gilt analog zur Gl.: 5.1.11:

$$c_{u\infty II} = c_{u\infty I} \left( \frac{r_{II}}{r_I} \right)^q$$

und

$$\Delta c_{ul} = \Delta c_{ul} \frac{r_I}{r_{II}}$$

Für die Energieübertragung im Laufgitter gilt dann:

$$h_{th} = \omega \left[ c_{u\infty I} \left( \frac{r_{II}}{r_I} \right)^{q+1} - c_{u\infty I} + \Delta c_{ul} \right]$$

oder auch:

$$h_{th} = u_I \Delta c_{ul} + u_I c_{u\infty I} \left[ \left( \frac{r_{II}}{r_I} \right)^{q+1} - 1 \right] = h_{thI} + \Delta h_{thII} \quad 5.1.18$$

FÜR DEN Eintritt des Gases in die Ebene I der Stufe gilt:

$$\Delta c_{ul} = \frac{h_{thI}}{u_I}$$

und für den Austritt des Gases aus der Ebene II der Stufe:

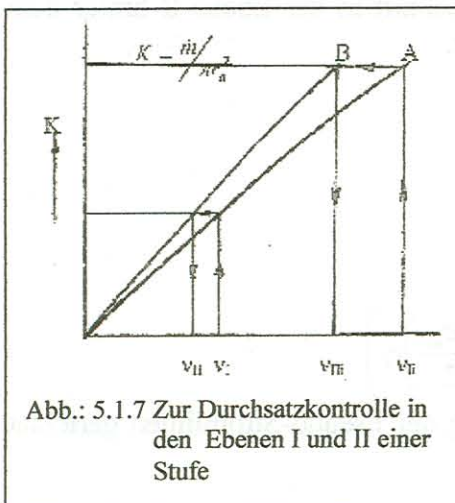
$$\Delta c_{ulI} = \frac{h_{thI} + \Delta h_{thII}}{u_{II}}$$

Unter Beachtung der Gl.,; 5.1.9 gilt dann:

$$\frac{\Delta c_{ulI}}{\Delta c_{ul}} = \frac{r_{II}}{r_I} \left( 1 + \frac{\Delta h_{thII}}{h_{thI}} \right) = \left( \frac{r_{II}}{r_I} \right)^\varepsilon$$

Aus dieser Beziehung kann der Exponent  $q$  für jeden Rechnungsschnitt einer Verdichterstufe ermittelt werden, wenn der Verlauf der Pseudo-Stromlinien bekannt ist. Aus obiger Gleichung folgt dann:

$$\varepsilon = \frac{\ln \left[ \frac{r_{II}}{r_I} \left( 1 + \frac{\Delta h_{th}}{h_{th}} \right) \right]}{\ln \frac{r_{II}}{r_I}} \quad 5.1.19$$



Die Radien  $r_I$  und  $r_{II}$  erhält man näherungsweise, wenn man die Verdichterstufe zunächst für  $\varepsilon = -1$  durchrechnet und eine Durchsatzkontrolle in der Ebene I vor dem Laufgitter und in der Ebene II hinter dem Laufgitter durchführt.

Für den Massendurchsatz des Gases durch die Stufe gilt allgemein:

$$\dot{m} = \pi \int_{r_i}^{r_a} \rho c_{ax} dr^2 = \pi r_a^2 \int_{r_i}^{r_a} \rho c_{ax} dv^2$$

oder auch:

$$K = \frac{\dot{m}}{\pi r_a^2} = \int_{v_i}^1 \rho c_{ax} dv^2 \quad 5.1.20$$

Die Auswertung der Gleichung 5.1.20 erfolgt zweckmäßig numerisch. Die Radien  $r_I$  und  $r_{II}$  erhält man, wenn man die einzelnen K-Werte für die einzelnen Rechenschnitte entlang des Stufenradius aufträgt und die einzelnen zugehörigen Radien bzw. Radienverhältnisse  $v_I$  und  $v_{II}$  abliest.

Für  $\dot{m}/2$  erhält man mit:

$$\frac{K}{2} = \frac{\dot{m}}{2\pi r_a^2}$$

entsprechend der Abb.: 5.1.7 die Kontinuitätsradien in den Strömungsebenen I und II einer Stufe. Der Kontinuitätsradius kennzeichnet jenen Radius, der durch multiplizieren der dort vorhandenen statischen Dichte und Axialgeschwindigkeit des Gases mit der Strömungsfläche  $F = r_a^2 \pi (1 - v_i^2)$  den erforderlichen Massendurchsatz  $\dot{m}$  des Gases ergibt.

Um bei Stufen mit Überschallanströmung der Laufgitter die auf Abb.: 1.5 in Abhängigkeit von der Anströmmachzahl  $M_0$  des Laufgitters dargestellten Anströmmachzahlen der Laufgitter erreichen zu können, muss die gewählte Zuströmung des Gases über den Radius der Stufe konstant sein. Für die Axialgeschwindigkeitsverteilung in der Stufenebene I kann auch entsprechend der Gl.: 5.1.17 unter Vernachlässigung des Temperaturgliedes (da die Temperatur des Gases über den Stufenradius konstant ist) gesetzt werden:

$$\left( \frac{c_{ax}}{u_a} \right)^2 = \varphi_a^2 + \alpha A - |\beta| B$$

Die Glieder A und B können leicht der Gl.: 5.1.17 entnommen werden.

Diese Gleichung besagt, dass eine konstante Zuströmgeschwindigkeit des Gases in der Stufenebene I erreicht werden kann, wenn

$$\alpha_1 A = |\beta_1| B$$

bzw.

$$\frac{|\beta_1|}{\alpha_1} = \frac{A}{B}$$

eingehalten wird. Diese Bedingung führt näherungsweise zu der bekannten „sogenannten Breitbandschaufel des Laufgitters.“

Bis auf die Korrekturfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  nach Schröder /33/ für die Berechnung der Axialgeschwindigkeiten in einer Verdichterstufe wurde auf alle Einflussgrößen eingegangen. Diese Korrekturfaktoren werden im nachfolgenden Abschnitt behandelt.

Bei der Auslegung hochbelasteter Axialverdichter ist man aus wirtschaftlichen Erwägungen gezwungen, auf kleine geometrischen Abmessungen und geringes Gewicht des Verdichters zu achten. Diese Faktoren hängen hauptsächlich von der Wahl des Nabenverhältnisses  $v_i$  in der ersten Stufe und der Stufenbelastung des Verdichters ab. Aus der Unkenntnis über den genauen Verlauf der Stromlinienschwungung in den Schaufelgittern ist man vielfach bemüht die einzelnen Stufen nach den Potentialwirbelprinzip mit konstanter Energieübertragung über den Stufenradius auszulegen. Dies hätte den Vorteil, dass man durch die über der Schaufelhöhe konstanten Axialgeschwindigkeiten übersichtlichere Verhältnisse erhält. Außerdem entfällt die Schwingbewegung der Meridianstromlinie im Schaufelgitter. Würde man dieses kinematische Schema auf die erste Stufe eines Axialverdichters mit kleinen Nabenverhältnissen  $v_i$  anwenden, so würde man zu große Anströmmachzahlen an den Schaufelprofilen erhalten, oder die maximale Drehzahl des Laufgitters müsste in einem nicht vertretbaren Maße verringert werden, was – wenn man sich an die zulässigen Umlenkungen des Gases in einem Profilvergitter hält – zu einer größeren Anzahl der Stufen in einem Axialverdichter führt.

In Abb.: 1.18 ist z.B. der rechnerische Machzahlverlauf der ersten Stufe eines Verdichters am Außen- und Innenschnitt für konstante Energieumsetzung im Laufgitter über den Radius in Abhängigkeit vom Drallverteilungsexponenten  $q$  aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass die Anströmmachzahl des Laufgitters am Außenradius mit abnehmenden Drallverteilungsexponenten  $q$  sehr stark ansteigt, während sie sich am Innenradius verringert. Der Schnittpunkt der Linien  $M_{w_{1a}}$  und  $M_{w_{1i}}$  ergibt den Drallverteilungsexponenten  $q$ , bei dem über die ganze Schaufelhöhe eine annähernd gleiche Anströmmachzahl vorhanden ist. Es ist jedoch günstiger, die Machzahl am Außenradius der Stufe größer zu halten als am Innenradius, da dünnere Profile unempfindlicher gegen hohe Anströmmachzahlen sind als dickere und letztere aus Festigkeitsgründen am Schaufelfuß am Innenradius der Stufe zur Anwendung kommen (siehe auch Abb.: 1.29).

## 5.2 Näherungsverfahren zur Erfassung dreidimensionaler Strömungsvorgänge in Axialverdichterstufen nach /33/.

Im vorhergehenden Abschnitt wurde festgestellt dass die von einem Massenteilchen des Gases auf den gekrümmten Stromlinien verursachten Zentrifugalkräfte dämpfend auf die Axialgeschwindigkeitsunterschiede vor und hinter dem Laufgitter wirken. Verschiedene Autoren, von denen hier unter Anderen Petermann /35/; Conrad /36/; Seippel /37/ und Eckert /34/ benannt werden sollen, behandelten das Problem in ganz einfacher Weise für eine theoretisch unendliche Stufenzahl im Verdichter. Durch die radiale Verteilung der Umfangskomponenten der Geschwindigkeiten und einer Überlagerung der Geschwindigkeiten in der Strömungsebene  $\infty$  (siehe auch Abb.: 5.1.1) über die Schaufelhöhe kann man sich den Strömungskanal in der Ebene  $\infty$  mit einer Wirbelschicht belegt vorstellen. Nach dem Biot-Sawart'schen Gesetz ist somit zu erwarten, dass die Strömungsverhältnisse einer betrachteten Axialverdichterstufe die vorhergehenden und nachfolgenden Stufen hinsichtlich der Kinematik beeinflusst. Die Stufen stromauf- und stromabwärts beeinflussen sich gegenseitig. Ohne Berücksichtigung dieses Einflusses ist eine Auslegung von Axialverdichtern mit starker Abweichung vom Potentialwirbel fragwürdig. Auch die Berechnung von Verdichterkennfeldern aus gemessenen Einzelstufenkennfeldern ist unter diesen Umständen nur von symbolischer Bedeutung. Die einfachen Verfahren von den bereits angegebenen Autoren berücksichtigen die gegenseitige Beeinflussung der Stufen im Verdichter untereinander nicht. Die exakteren Verfahren, z.B. von /38/ bis /40/ u.a. haben für den in der Praxis tätigen Ingenieur einen nicht vertretbaren mathematischen Aufwand. Das von Schröder /33/ entwickelte Näherungsverfahren ergibt mit relativ einfachen Mitteln eine Vorstellung vom Verlauf der Strömung und ein rationelles Auslegungsverfahren für Turbomaschinen bei weitgehender Freiheit in der Wahl des Drallverteilungsexponenten  $q$  bzw. der anzuwendenden kinematischen Schemata in den Stufen von Axialverdichtern. Dabei geht er von einer stark vereinfachten Konfiguration aus. Nachfolgend soll das Verfahren von Schröder, das sich in der Praxis vielfach bewährt hat, beschrieben werden.

Schröder betrachtet einen ebenen Kanal von der Höhe  $h=1$ , der sich von  $y=-\infty$  bis  $y=+\infty$  erstreckt (siehe Abb.: 5.2.1). In der Ebene  $x=0$ , d.h. in der Stufenebene  $\infty$  nach Abb.:5.2.3, soll sich ein Schaufelgitter von unendlich kleiner Teilung befinden, das die Strömung um  $\Delta c_u$  umlenkt. Die Umlenkung möge von den Wert Null bei  $z=0$  bis auf  $\Delta c_{ua}$  bei  $z=1$  linear zunehmen. Dem ganzen System sei eine Parallelströmung  $w_\infty$  überlagert. Dabei soll  $w_\infty$  sehr groß gegenüber  $\Delta c_{ua}$  sein, damit die resultierende Strömung in jedem Punkt des

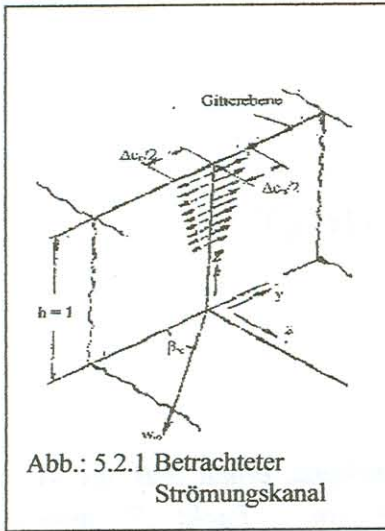


Abb.: 5.2.1 Betrachteter Strömungskanal

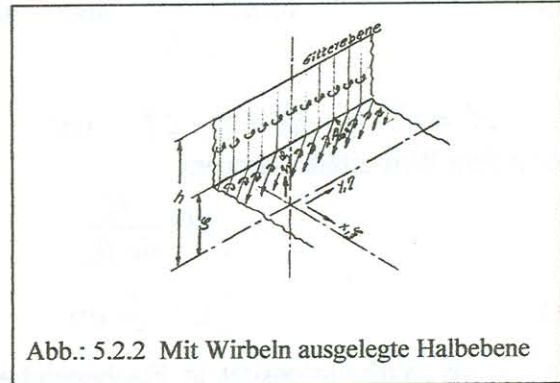


Abb.: 5.2.2 Mit Wirbeln ausgelegte Halbebene

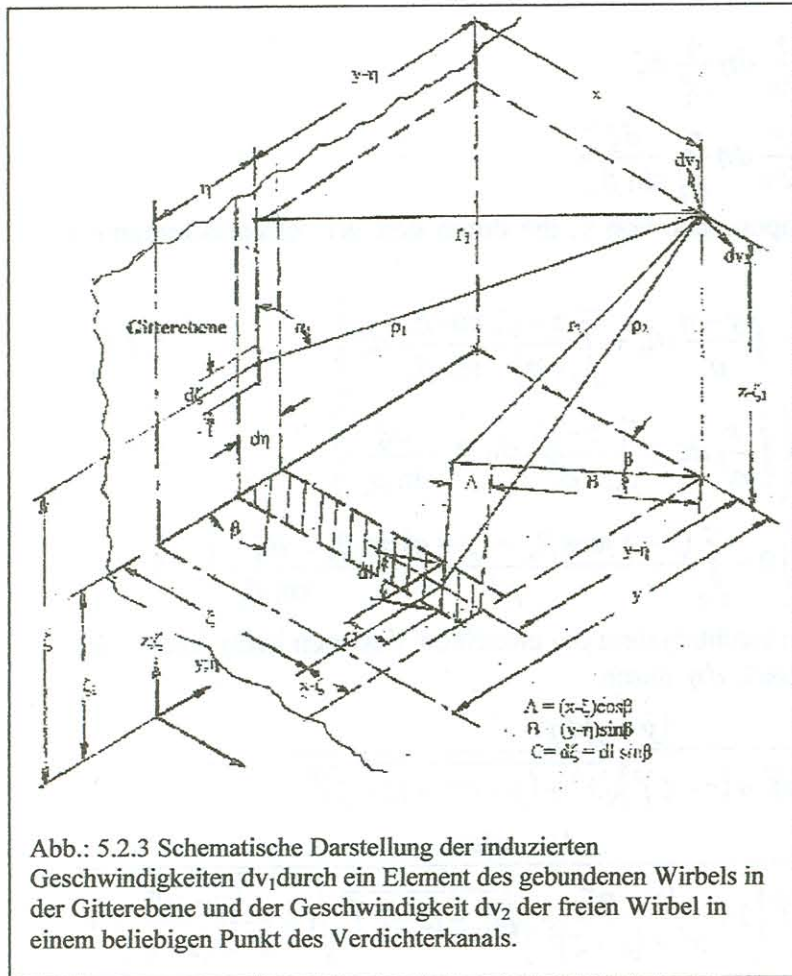


Abb.: 5.2.3 Schematische Darstellung der induzierten Geschwindigkeiten  $dv_1$  durch ein Element des gebundenen Wirbels in der Gitterebene und der Geschwindigkeit  $dv_2$  der freien Wirbel in einem beliebigen Punkt des Verdichterkanals.

Strömungskanal als konstant betrachtet werden kann. Da die Zirkulation im Gitter von  $z=0$  bis  $z=1$  linear veränderlich ist, fließt mit jeder Stromröhre aus der Gitterebene ein wirbelfaden ab, der als Fortsetzung eines Wirbelfadens gleicher Intensität in der Gitterebene anzusehen ist. Schröder greift aus diesem Gebilde eine wagerechte, mit Wirbelfäden gleichmäßig belegte Halbebene ( $0 < x < \infty$ ) heraus, sowie einen horizontalen Streifen der Gitterebene mit ebenfalls gleichmäßiger Wirbelbelegung (Abb.: 5.2.2). um später wieder auf das vollständige Schema der Abb.: 5.2.1 mit linearer Wirbelverteilung in der Gitterebene und einem gleichmäßig mit Wirbelfäden erfüllten Raum im Kanal hinter der Gitterebene zu kommen wird am Schluss der Ableitungen eine Integration in Richtung der Kanalhöhe durchgeführt.

Zur Anwendung des Biot-Sawart'schen Gesetzes wurde aus der Abb.: 5.2.2 ein Streifen von der Breite  $d\eta$  herausgeschnitten und die an einem Punkt  $P(x, y, z)$  induzierten Geschwindigkeitskomponenten ermittelt (Abb.: 5.2.3).

Für die von einem Wirbelfadenelement in einem Punkt  $P(x, y, z)$  induzierte Geschwindigkeit gilt nach dem Biot-Sawart'schen Gesetz:

$$dv = C dl \frac{\sin \alpha}{\rho^3}$$

Mit  $\sin \alpha_1 = \frac{r_1}{\rho_1}$  und  $\sin \alpha_2 = \frac{r_2}{\rho_2}$

$\rho_1^2 = x^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$  und  $\rho_2^2 = (x - \xi)^2 + (z - \zeta)^2$   
sowie dem Wirbelfadenelement

$$dl = \frac{d\xi}{\sin \beta_\infty}$$

und

$$C = \frac{\gamma}{2\pi} d\eta$$

mit  $\gamma$  als Wirbelintensität je Flächeneinheit in der Gitterebene, erhält man die von den Wirbelelementen in der Gitter- und Horizontalebene im Punkt P induzierten Geschwindigkeiten:

$$dv_1 = \frac{\gamma}{2\pi} d\eta \frac{r_1}{\rho_1^3} d\zeta$$

$$dv_2 = \frac{\gamma}{2\pi} d\eta \frac{r_2}{\rho_2^3} \frac{d\xi}{\sin \beta_\infty}$$

Aus  $dv = dv_1 + dv_2$  folgen die Komponenten von  $v$ , die durch den Wirbelfadenelemente in beiden Ebenen induziert werden.

$$v_x = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{\eta=-\infty}^{\eta=+\infty} d\eta \left[ - \int_{\zeta}^1 \frac{y - \eta}{\rho_1^3} d\zeta + \int_{\xi=0}^{+\infty} \frac{z - \zeta_1 \cos \beta_\infty}{\rho_2^3 \sin \beta_\infty} d\xi \right] \quad 5.2.1$$

$$v_y = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} d\eta \left[ \int_{\zeta}^1 \frac{x}{\rho_1^3} d\zeta + \int_{\xi=0}^{+\infty} \frac{z - \zeta_1 \sin \beta_\infty}{\rho_2^3 \sin \beta_\infty} \frac{d\xi}{\sin \beta_\infty} \right] \quad 5.2.2$$

$$v_z = \frac{\gamma}{2\pi} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} d\eta \left[ \int_{\zeta}^1 0 - \int_{\xi=0}^{+\infty} \frac{(x - \xi) \cos \beta_\infty + (y - \eta) \sin \beta_\infty}{\rho_2^3 \sin \beta_\infty} d\xi \right] \quad 5.2.3$$

Die Vorzeichen ergeben sich aus dem Rechtssystem der einzelnen Vektoren beim Ansatz des Wie führen zunächst die Integration nach  $d\eta$  durch:

$$\begin{aligned} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \frac{y - \eta}{\rho_1^3} d\eta &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(y - \eta) d\eta}{[x^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2] \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(y - \eta) d\eta}{[x^2 + (z - \zeta)^2] \left[ 1 + \frac{(y - \eta)^2}{x^2 + (z - \zeta)^2} \right] \sqrt{x^2 + (z - \zeta)^2} \sqrt{1 + \frac{(y - \eta)^2}{x^2 + (z - \zeta)^2} +}} \end{aligned}$$

Setzt man:

$$t = \frac{y - \eta}{\sqrt{x^2 + (z - \zeta)^2}}; \quad dt = \frac{-d\eta}{\sqrt{x^2 + (z - \zeta)^2}}$$

so folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y - \eta}{\rho_1^3} d\eta = - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (z - \zeta)^2}} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \frac{t dt}{(1 + t^2) \sqrt{1 + t^2}}$$

Führt man die Substitution  $t = \sinh z$ ,  $dt = \cosh z$  ein, erhält man:

$$\int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \frac{y-\eta}{\rho_1^3} d\eta = -\frac{1}{\sqrt{x^2+(z-\zeta)^2}} \int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh z}{\cosh z} dz$$

Mit  $u = \cosh z$  und  $du = \sinh z dz$  folgt schließlich:

$$\int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \frac{y-\eta}{\rho_1^3} d\eta = -\frac{1}{\sqrt{x^2+(z-\zeta)^2}} \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{\cosh z \sqrt{x^2+(z-\zeta)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+(z-\zeta)^2} \sqrt{1+t^2}}$$

$$\int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \frac{y-\eta}{\rho_1^3} d\eta = \frac{1}{\sqrt{x^2+(z-\zeta)^2+(y-\eta)^2}} = \frac{1}{\rho_1} = 0 \quad 5.2.4$$

wobei die Grenzen  $\pm \infty$  eingesetzt wurden.

$$\int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\rho_1^3} = -\int \frac{\sqrt{x^2+(z-\zeta)^2} dt}{[x^2+(z-\zeta)^2] \sqrt{x^2+(z-\zeta)^2} \sqrt{1+t^2}} = -\frac{1}{x^2+(z-\zeta)^2} \int \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$$

Mit der Substitution  $t = \sinh z$ ,  $dt = \cosh z$  folgt:

$$\int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\rho_1^3} = -\frac{1}{x^2+(z-\zeta)^2} \int \frac{dz}{\cosh^2 z} = -\frac{1}{x^2+(z-\zeta)^2} \left[ \tanh z \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{x^2+(z-\zeta)^2} \left| \frac{\sinh z}{\sqrt{1+\sinh z}} \right|_{-\infty}^{+\infty} \right]$$

$$= -\frac{1}{x^2+(z-\zeta)^2} \left| \frac{y-\eta}{\sqrt{x^2+(z-\zeta)^2+(y-\eta)^2}} \right|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{x^2+(z-\zeta)^2} \left| \frac{-(y-\eta)}{\rho_1} \right|_{-\infty}^{+\infty}$$

oder wenn  $\rho_1$  eingesetzt wird:

$$\int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\rho_1^3} = \frac{2}{x^2+(z-\zeta)^2} \quad 5.2.5$$

Analog gilt:

$$\int_{\eta=-\infty}^{+\infty} \frac{2}{(x-\xi)^2+(z-\zeta_1)^2} \quad 5.2.6$$

Setzt man die Beziehungen 5.2.4 bis 5.2.6 in die Gleichungen 5.2.1 bis 5.2.3 ein, so folgt für die induzierten Geschwindigkeiten:

$$v_x = \frac{\gamma}{2\pi} \cot \beta_\infty 2(z-\zeta_1) \int_{\xi=0}^{+\infty} \frac{d\xi}{(x-\xi)^2+(z-\zeta_1)^2} \quad 5.2.7$$

$$v_y = -\frac{\gamma}{2\pi} \left[ 2x \int_{\xi=\zeta}^1 \frac{d\xi}{x^2+(z-\zeta)^2} + 2(z-\zeta_1) \int_{\xi=0}^{\infty} \frac{d\xi}{(x-\xi)^2+(z-\zeta_1)^2} \right] \quad 5.2.8$$

und unter Beachtung der Gl.: 5.2.4

$$v_z = -\frac{\gamma}{2\pi} 2 \cot \beta_\infty \int_{\xi=0}^{+\infty} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(z-\zeta_1)^2} d\xi \quad 5.2.9$$

Die Integration der Gleichungen 5.2.7 bis 5.2.9 erfolgt über eine Zwischenrechnung.

$$\int_{\xi=0}^{+\infty} \frac{d\xi}{(x-\xi)^2+(z-\zeta_1)^2} = \frac{1}{(z-\zeta_1)^2} \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{1+\frac{(x-\xi)^2}{(z-\zeta_1)^2}}$$

Wird  $t = \frac{x-\xi}{z-\zeta_1}$  und  $dt = -\frac{d\xi}{z-\zeta_1}$  gesetzt, so folgt:

$$\int_{\xi=0}^{+\infty} \frac{d\xi}{(x-\xi)^2 + (z-\zeta_1)^2} = -\frac{1}{z-\zeta_1} \int \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{z-\zeta_1} \arctan t$$

bzw.

$$\int_{\xi=0}^{+\infty} \frac{d\xi}{(x-\xi)^2 + (z-\zeta_1)^2} = -\frac{1}{z-\zeta_1} \operatorname{ars} \tan \frac{x-\xi}{z-\zeta_1} \Big|_{\xi=0}^{+\infty} \quad 5.2.10$$

Weiterhin gilt:

$$\int_{\xi=0}^{+\infty} \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2 + (z-\zeta_1)^2} d\xi = -\ln \left[ (x-\xi)^2 + (z-\zeta_1)^2 \right]_{\xi=0}^{+\infty} \quad 5.2.11$$

Die induzierten Geschwindigkeiten erhalten damit folgende Form:

$$v_x = -\frac{\gamma}{2\pi} \cot \beta \operatorname{arctan} \frac{x-\xi}{z-\zeta_1} \Big|_{\xi=0}^{+\infty} \quad 5.2.12$$

$$v_y = -\frac{\gamma}{2\pi} 2 \left\{ \operatorname{arctan} \frac{z-\zeta}{x} \Big|_{\zeta=\zeta}^1 + \operatorname{arctan} \frac{x-\xi}{z-\zeta_1} \Big|_{\xi=0}^{+\infty} \right\} \quad 5.2.13$$

$$v_z = \frac{\gamma}{2\pi c} \cot \beta \ln \left[ (x-\xi)^2 + (z-\zeta_1)^2 \right]_{\xi=0}^{+\infty} \quad 5.2.14$$

Um Trugschlüsse zu vermeiden, sollen die Grenzen erst nach den folgenden Rechenoperationen eingesetzt werden.

Endlose Spiegelung der Wirbelschicht an den Kanalwänden.

Da die Radialgeschwindigkeiten  $v_z$  an den Kanalwänden bei  $z=0$  und  $z=1$  verschwinden müssen, werden die Kanalwände zu Stromebenen gemacht. Das wird dadurch erreicht, indem die Winkalebene  $z-x$  zuerst an die untere Kanalwand ( $\zeta=0$ ) gespiegelt und das Gebilde in unendlicher Wiederholung nach oben und unten aufgestapelt wird (siehe Abb.: 5.2.4).

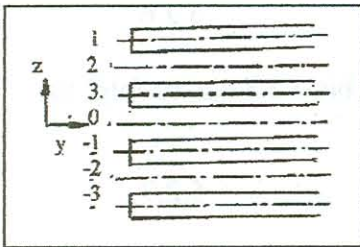


Abb.: 5.2.4 Der nach oben und unten unendlich gespiegelte ebene Kanal.

Alle Ebenen  $z=u$  ( $-\infty < u < +\infty$ ;  $u$  ganzzahlig) sind dann Symmetrieebenen der Strömung in denen  $v_z$  verschwindet. Damit wird auch die Helmholtz'sche Bedingung erfüllt, dass ein Wirbelfaden in einer reibungsfreien Flüssigkeit stets eine geschlossene Linie ergeben muss. Aus Abb.: 5.2.4 erkennt man die von der Tragflügeltheorie bekannten Hufeisenwirbel, deren Schlussjoch der bei  $\xi = +\infty$  liegende Anfahrwirbel bildet. Die

Spiegelung lässt sich symbolisch durch

$$v = v(z-\zeta) - v(z+\zeta)$$

und die Übereinanderschichtung durch:

$$v = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} [v(z+1u-\zeta_1) - v(z+2u+\zeta_1)]$$

angegeben.

Für die Gleichungen 5.2.12 bis 5.2.14 wird eine Zwischenrechnung durchgeführt.

Nach /41/ ist:

$$\operatorname{arctan} t = -i \operatorname{arctanh} it = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+it}{1-it}$$

und

$$\ln(s^2 + t^2) = \ln(s+it) + \ln(s-it)$$



Damit wird auch:

$$\arctan \frac{x-\xi}{z+2u-\zeta_1} = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+i \frac{x-\xi}{z+2u-\zeta_1}}{1-i \frac{x-\xi}{z+2u-\zeta_1}} = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+\frac{1}{2u}[z-\zeta_1+i(x-\xi)]}{1+\frac{1}{2u}[z-\zeta_1-i(x-\xi)]}$$

Nun führen wir die Übereinanderschichtung der Winkalebene z-x mit den Abkürzungen

$$z-\zeta_1+i(x-\xi) = \varphi$$

$$z-\zeta_1-i(x-\xi) = \psi$$

durch und erhalten:

$$\sum_{u=-\infty}^{+\infty} \arctan \frac{x-\xi}{z+2u-\zeta_1} = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2i} \ln \frac{1+\frac{\varphi}{2u}}{1+\frac{\psi}{2u}}$$

Für die Ebene  $u=0$  gilt:

$$\ln \frac{1+\frac{\varphi}{2u}}{1+\frac{\psi}{2u}} = \ln \frac{\varphi}{\psi}$$

sowie für die Ebenen  $+u$  und  $-u$

$$\ln \frac{1+\frac{\varphi}{2u}}{1+\frac{\psi}{2u}} + \ln \frac{1-\frac{\varphi}{2u}}{1-\frac{\psi}{2u}} = \ln \frac{1-\frac{\varphi^2}{4u^2}}{1-\frac{\psi^2}{4u^2}}$$

Mit diesen Ausdrücken ist:

$$\sum_{u=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2i} \ln \frac{1+\frac{\varphi}{2u}}{1+\frac{\psi}{2u}} = \frac{1}{2i} \left[ \ln \frac{\varphi}{\psi} + \sum_{u=1}^{+\infty} \ln \frac{1-\frac{\varphi^2}{4u^2}}{1-\frac{\psi^2}{4u^2}} \right] = \frac{1}{2i} \ln \frac{\frac{\pi}{2} \varphi \prod_{u=1}^{+\infty} \left(1-\frac{\varphi^2}{4u^2}\right)}{\frac{\pi}{2} \psi \prod_{u=1}^{+\infty} \left(1-\frac{\psi^2}{4u^2}\right)}$$

wobei gleichzeitig eine Erweiterung mit  $\frac{\pi}{2}$  vorgenommen wurde.

^Nach /42/ ist:

$$\sin z = z \prod_{u=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2 u^2}\right)$$

mit  $z = \frac{\pi}{2} \varphi$  bzw.  $z = \frac{\pi}{2} \psi$  wird dann:

$$\sum_{u=-\infty}^{+\infty} \arctan \frac{x-\xi}{z+2u-\zeta_1} = -\frac{1}{2i} \ln \frac{\sin \left\{ \frac{\pi}{2} [z-\zeta_1+i(x-\xi)] \right\}}{\sin \left\{ \frac{\pi}{2} [z-\zeta_1-i(x-\xi)] \right\}}$$

Setzen wir noch

$$\sin(x \pm iy) = \sin x \cosh y \pm i \cos x \sinh y$$

analog ein. So erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \arctan \frac{x-\xi}{z+2u-\zeta_1} &= -\frac{1}{2i} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2}(z-\zeta_1) \cosh \frac{\pi}{2}(x-\xi) + i \cos \frac{\pi}{2}(z-\zeta_1) \sinh \frac{\pi}{2}(x-\xi)}{\sin \frac{\pi}{2}(z-\zeta_1) \cosh \frac{\pi}{2}(x-\xi) - i \cos \frac{\pi}{2}(z-\zeta_1) \sinh \frac{\pi}{2}(x-\xi)} \\ &= -\frac{1}{2i} \ln \frac{1 + \cot \operatorname{an} \frac{\pi}{2}(z-\zeta_1) i \tanh \frac{\pi}{2}(x-\xi)}{1 - \cot \operatorname{an} \frac{\pi}{2}(z-\zeta_1) i \tanh \frac{\pi}{2}(x-\xi)} \end{aligned}$$

Da nun  $\operatorname{arc} \tan t = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+it}{1-it}$  ist, folgt auch:

$$\sum_{u=-\infty}^{+\infty} \arctan \frac{x-\xi}{z+2u-\zeta_1} = -\operatorname{arctan} \left[ \cot \operatorname{an} \frac{\pi}{2}(z-\zeta_1) \tanh \frac{\pi}{2}(x-\xi) \right] \quad 5.2.12a \text{ u. } 5.2.13a$$

Analog zum vorhergehenden Rechnungsgang erhält man:

$$\sum_{u=-\infty}^{+\infty} \arctan \frac{z+2u-\zeta_1}{x} = \operatorname{arctan} \left[ \cot \operatorname{an} \frac{\pi}{2}(z-\zeta_1) \tanh \frac{\pi}{2}x \right] \quad 5.2.13b$$

Es ist:

$$\begin{aligned} \ln [(x-\xi)^2 + (z+2u-\zeta_1)^2] &= \ln \left\{ [(z+2u-\zeta_1) + i(x-\xi)][(z+2u-\zeta_1) - i(x-\xi)] \right\} \\ &= \ln \left\{ 2u \left[ 1 + \frac{1}{2u} [(z-\zeta_1) + i(x-\xi)] \right] 2u \left[ 1 + \frac{1}{2u} (z-\zeta_1) - i(x-\xi) \right] \right\} \\ &= 2 \ln 2u + \ln \left\{ 1 + \frac{1}{2u} [(z-\zeta_1) - i(x-\xi)] \right\} \end{aligned}$$

Für die Summe gilt dann

$$\begin{aligned} &\sum_{u=-\infty}^{+\infty} \ln [(x-\xi)^2 + (z+2u-\zeta_1)^2] = \\ &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} 2 \ln 2u + \ln \sin \frac{\pi}{2} [(z-\zeta_1) + i(x-\xi)] + \ln \sin \frac{\pi}{2} [(z-\zeta_1) - i(x-\xi)] \\ &= \sum_{u=-\infty}^{+\infty} 2 \ln 2u + \ln \left\{ \sin \frac{\pi}{2} [(z-\zeta_1) + i(x-\xi)] \sin \frac{\pi}{2} [(z-\zeta_1) - i(x-\xi)] \right\} \end{aligned}$$

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, führen wir eine weitere Zwischenrechnung durch. Mit  $\sin ix = \sinh x$  wird dann:

$$\left[ \sin \frac{\pi}{2}(z-\zeta_1) + i \sinh(x-\xi) \right] \left[ \sin \frac{\pi}{2}(z-\zeta_1) - i \sinh(x-\xi) \right]$$

Setzen wir

$$\frac{\pi}{2}(z-\zeta_1) = \frac{\alpha}{2}$$

und

$$\frac{\pi}{2}(x-\xi) = \frac{\beta}{2}$$

dann wird:

$$\left[ \sin \frac{\alpha}{2} + i \sinh \frac{\beta}{2} \right] \left[ \sin \frac{\alpha}{2} - i \sinh \frac{\beta}{2} \right] = \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sinh^2 \frac{\beta}{2}$$

Nun ist  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)$  und  $\sinh^2 \frac{\beta}{2} = -\frac{1}{2}(1 - \cosh \beta)$

Dann wird aber auch:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \ln[(x-\xi)^2 + (z+2u-\zeta_1)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2 \ln 2u + \ln \left\{ \frac{1}{2} [-\cos \pi(z-\zeta_1) + \cosh(x-\xi)] \right\} \quad 5.214a$$

Mit den angegebenen Gleichungen 5.2.12a; 5.2.13a; 5.2.13b und 5.2.14a erhalten die Komponenten der induzierten Geschwindigkeiten  $v_x, v_y$  und  $v_z$  im Punkt P (siehe Abb.: 5.2.3)

Nach den Gleichungen 5.2.12 bis 5.2.14 nach Einsetzen der Integrationsgrenzen  $\xi$  folgende Form:

$$v_x = \frac{\gamma}{2\pi} \cot \beta \left\{ 2 \left[ \arctan \left[ \cot an \frac{\pi}{2} (z-\zeta_1) \right]_* + \arctan \left[ \cot an \frac{\pi}{2} (z-\zeta_1) \tanh \frac{\pi}{2} x \right]_* \right. \right. \\ \left. \left. - \arctan \left[ \cot an \frac{\pi}{2} (z-\zeta_1) \right] - \arctan \left[ \cot an \frac{\pi}{2} (z-\zeta_1) \tanh \frac{\pi}{2} x \right] \right\} \quad 5.2.15$$

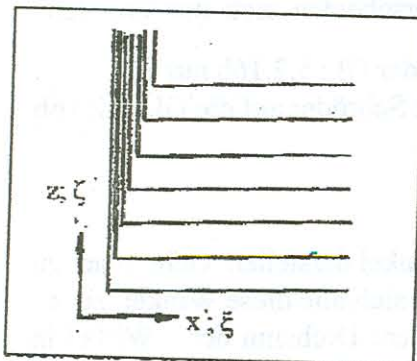
$$v_y = \frac{\gamma}{2\pi} \left\{ 2 \left[ \arctan \left[ \cot an \frac{\pi}{2} (z-1) \tanh \frac{\pi}{2} x \right] - \arctan \left[ \cot an \frac{\pi}{2} (z-\zeta_1) \tanh \frac{\pi}{2} x \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \arctan \left[ \cot an \frac{\pi}{2} (z-\zeta_1) \right]_* + \arctan \left[ \cot \frac{\pi}{2} (z-\zeta_1) \tanh \frac{\pi}{2} x \right]_* \right. \right. \\ \left. \left. - \arctan \left[ \cot an \frac{\pi}{2} (z+1) \tanh \frac{\pi}{2} x \right] + \arctan \left[ \cot an \frac{\pi}{2} (z+\zeta_1) \tanh \frac{\pi}{2} x \right] \right\} \quad 5.2.16$$

$$v_z = \frac{\gamma}{2\pi} \cot \beta \ln \frac{-\cos \pi(z-\zeta_1) + \cosh \pi x}{-\cos \pi(z+\zeta_1) + \cosh \pi x} \quad 5.2.17$$

Die Glieder mit den Stern machen bei  $z-\zeta_1=0$  einen Sprung um den Betrag  $\pi$ . Das Einsetzen der Grenzen  $+\zeta_1$  und  $-\zeta_1$  hat seine Ursache in der Spiegelung.

Der vollständig mit freien Wirbeln ausgefüllte ebene Kanal.

An dieser Stelle soll daran erinnert werden, dass in jedem Kanal der Abb.: 5.2.4 erst eine Wirbelebene enthalten ist. Die horizontalen Halbebenen sollen aber jeden Kanal gleichmäßig ausfüllen und die Gitterebene mit entsprechenden Streifen dachziegelartig bedeckt sein. (Abb.: 5.2.5). Die senkrechten Flächen liegen dann in der Ebene  $x=0$  und ergeben eine



dachziegelähnlich angelegte Kanal.

Resultierende Wirbelintensität von linearen Verlauf.

Die Gleichungen 5.2.15 bis 5.2.17 müssen nochmals über  $\zeta_1$  in den Grenzen  $0 < \zeta_1 < 1$  integriert werden. Dabei lassen sich nicht alle Glieder der Gleichungen 5.2.15 bis und 5.2.16 in geschlossener Form integrieren. Die in nicht geschlossener Form integrierbaren Glieder integrierte Schröder durch eine Umformung an Hand von graphischen Darstellungen der einzelnen Glieder.

Die Integration wird in Form einer Zwischenrechnung durchgeführt. Wir betrachten zunächst die Glieder:

$$\int_{\zeta=0}^1 \left\{ \arctan \left[ \cot an \frac{\pi}{2} (z-\zeta_1) \right]_* - \arctan \left[ \cot an \frac{\pi}{2} (z+\zeta_1) \right] \right\} d\zeta$$

Da mit  $x = \cotan \frac{\pi}{2}(z - \zeta_1)$

$$\arctan x + \operatorname{arc} \cot \operatorname{an} x = \frac{\pi}{2}$$

ist, folgt daraus:

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \left[ \cot \operatorname{an} \frac{\pi}{2}(z - \zeta_1) \right]$$

bzw.

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - (z - \zeta_1)$$

Damit wird dann unter Beachtung, dass die Glieder mit \* bei  $(z - \zeta_1) = 0$  einen Sprung machen:

$$\begin{aligned} & \int_0^z \left\{ \arctan \frac{\pi}{2} [z - \zeta_1]_* - \arctan \left[ \cot \operatorname{an} \frac{\pi}{2}(z + \zeta_1) \right] \right\} d\zeta = \\ & = \int_0^z \frac{\pi}{2} (1 - z + \zeta_1) d\zeta + \int_z^1 -\frac{\pi}{2} (1 + z - \zeta_1) d\zeta - \int_0^1 \frac{\pi}{2} (1 - z + \zeta_1) d\zeta = \\ & = \frac{\pi}{2} \left( z - \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi}{2} \left( z - \frac{1}{2} \right) = \pi \left( z - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad \text{5.2.15a und 5.2.16a}$$

Jedes der zwei betrachteten Anteile entspricht einem Gitter aus Wirbelschichten das von  $\xi = -\infty$  bis  $\xi = +\infty$  reicht. Für  $z=1/2$  verschwinden beide Anteile und bei  $z=0$  und  $z=1$  ergeben beide Anteile gleiche Werte mit gleichem Vorzeichen.

Weiterhin ist:

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta=0}^1 \left\{ \arctan \left[ \cot \operatorname{an} \frac{\pi}{2}(z-1) \tanh \frac{\pi}{2} x \right] - \arctan \left[ \cot \operatorname{an} \frac{\pi}{2}(z+1) \tanh \frac{\pi}{2} x \right] \right\} d\zeta \\ & = \int_{\zeta=0}^1 k \pi d\zeta = k \pi \end{aligned} \quad \text{5.2.16b}$$

Da  $\cotan \frac{\pi}{2}(z-1) = \cot \operatorname{an} \frac{\pi}{2}(z+1)$  ist ( die Argumente unterscheiden sich nur um den Faktor  $\pi$  ), kann der Ausdruck in der geschwungenen Klammer der Gl.: 5.2.16b nur ein vielfaches von  $\pi$  sein. Um den Wert von  $k$  zu bestimmen, greift Schröder auf die Gl.: 5.2.16b zurück. Der Ausdruck

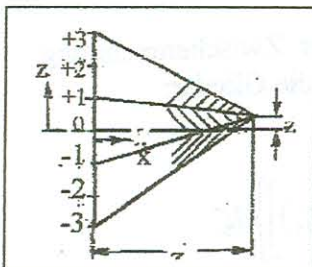
$$-\arctan \frac{z-1}{x} + \arctan \frac{z+1}{x}$$

lässt sich durch den mittleren der in Abb.: 5.2.6 schraffierten Winkel darstellen. Geht man zu unendlichen Gitter über, ergänzen sich alle diese Winkel zu  $\pi$ . Das Pluszeichen ergibt sich aus dem Drehsinn der Wirbel in der Ebene  $x=0$ . Für  $x < 0$  dreht sich das Vorzeichen um.

Bei  $v_y$  heben sich die Ausdrücke

$$\arctan \left[ \cot \operatorname{an} \frac{\pi}{2}(z - \zeta_1) \tanh \frac{\pi}{2} x \right] \quad \text{usw.}$$

im Bereich  $0 < \zeta_1 < 1$  auf. Im Bereich  $z < \zeta_1 < 1$  bleibt von dem Glied mit den Index \* ein Betrag von  $-\pi$  übrig.



Gl.: 5.2.16b

$$\int_{\zeta=z}^1 (-\pi) d\zeta_1 = -\pi(1-z)$$

Für  $x < 0$  dreht sich das Vorzeichen um.

Die Gleichungen für die induzierten Geschwindigkeiten erhalten dann nach Schröder folgende Form:

$$v_x = \frac{\gamma}{2\pi} \cot \alpha n \beta 2\pi \text{ (mal)}$$

$$\left\{ \left( z - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\pi} \int_{\zeta=0}^1 \arctan \left[ \cot \alpha n \frac{\pi}{2} (z - \zeta) \tanh \frac{\pi}{2} x \right] d\zeta_1 - \frac{1}{\pi} \int_{\zeta=0}^1 \arctan \left[ \cot \alpha n \frac{\pi}{2} (z + 1) \tanh \frac{\pi}{2} x \right] d\zeta_1 \right\} \quad 5.2.18$$

$$v_y = \frac{\gamma}{2\pi} \left[ \pm \pi \left( z - \frac{1}{2} \right) \right] - \frac{\gamma}{2\pi} [\pm \pi(1-z)] = \frac{\gamma}{2\pi} \left[ z \pm \left( z - \frac{1}{2} \right) \right] \quad 5.2.19$$

-  $z$  für  $x > 0$   
+  $z$  für  $x < 0$

$$v_z = \frac{\gamma}{2\pi} \cot \alpha n \beta \int_{\zeta=0}^1 \ln \frac{\cos \pi(z + \zeta_1) + \cosh \pi x}{-\cos \pi(z - \zeta) + \cosh \pi x} d\zeta_1 \quad 5.2.20$$

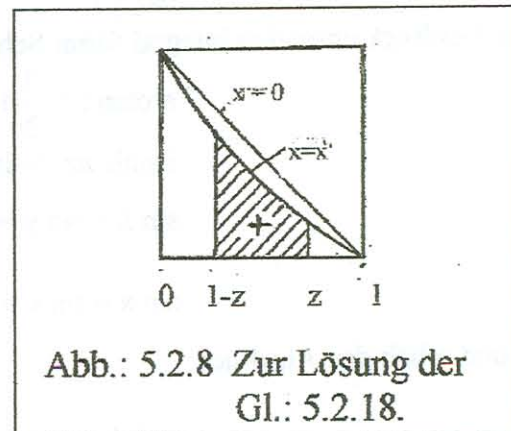
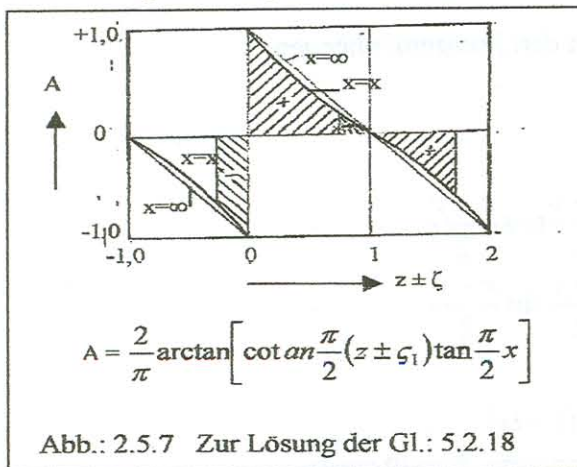
Der Wert  $\frac{\gamma}{2\pi}$  stellt die auf die Flächeneinheit bezogene Zirkulation dar. Anhand der

Gl.: 5.2.19 zeigt sich, dass  $v_y$  bei  $z=1$  in der Ebene  $x=0$  einen Sprung um den Wert  $\frac{\gamma}{2\pi} 2\pi$  macht. Dieser Sprung entspricht nach Abb.: 5.2.1 einer Umlenkung von  $\Delta c_{ua}$ .

Deshalb ist: 
$$\gamma = \frac{\Delta c_{ua}}{2}$$

Die noch in den Gleichungen 5.2.18 bis 5.2.20 enthaltenen Integrale lassen sich nach Schröder am einfachsten durch quadrieren von Diagrammflächen ermitteln.

Zur Lösung der Integrale in Gl.: 5.2.18 benutzte er die Abbildungen 5.2.7 und 5.2.8.



Dort ist der Ausdruck

$$\frac{\pi}{2} \arctan \left[ \cot \alpha n \frac{\pi}{2} (z \pm \zeta_1) \tanh \frac{\pi}{2} x \right]$$

über  $z \pm \zeta$  aufgetragen. Die Vorzeichen der Abb.:5.2.7 entsprechen den geometrischen Vorstellungen der Abb.:5.2.3. Wenn man die Schraffierten Flächen von Abb.: 5.2.7 zusammenlegt, entsteht das Doppelte der schraffierten Fläche der Abb.:5,2,8. Da jedoch in Abb.:5.2.7 und Abb.:5.2.8 die Ordinaten

Mit den Faktor  $\frac{\pi}{2}$  versehen sind, während der entsprechende Faktor in Gl.: 5.2.18  $\frac{1}{\pi}$  lautet, ist nur der einmalige Wert der Fläche zu nehmen. Für das Vorzeichen der Fläche gilt:

	$z > 1/2$	$z < 1/2$
$x > 0$	+	-
$x < 0$	-	+

Für  $x \longrightarrow +\infty$  erhält man den Ausdruck  $+\pi\left(z - \frac{1}{2}\right)$

Für  $x \longrightarrow -\infty$  erhält man den Ausdruck  $-\pi\left(z - \frac{1}{2}\right)$

Für  $x = 0$  erhält man den Wert  $0$

Mit  $\zeta_1 = 1$  und  $\cotan\left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi\right) = \tan \varphi$  erhält man für den Ausdruck in Gl.: 5.2.18:

$$\arctan\left[\cot an \frac{\pi}{2} z \tanh \frac{\pi}{2} x\right] + \arctan\left[\tan \frac{\pi}{2} z \tanh \frac{\pi}{2} x\right]$$

oder mit dem Additionstheorem der inversen trigonometrischen Funktion

$$\arctan \frac{\tanh \frac{\pi}{2} x \left( \cot an \frac{\pi}{2} z + \tan \frac{\pi}{2} z \right)}{1 - \tanh^2 \frac{\pi}{2} x} = \arctan \frac{\sinh \frac{\pi}{2} x \cosh \frac{\pi}{2} x}{\sin \frac{\pi}{2} z \cos \frac{\pi}{2} z}$$

Mit  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  und  $\sinh 2\alpha = 2 \sinh \alpha \cosh \alpha$  erhalten die Ausdrücke von Gl.: 5.2.18 folgende Form:

$$\arctan\left[\cot an \frac{\pi}{2} (z + \zeta_1) \tanh \frac{\pi}{2} x\right] + \arctan\left[\cot an \frac{\pi}{2} (\zeta_1 - z) \tanh \frac{\pi}{2} x\right] = \arctan \frac{\sinh \pi x}{\sin \pi z}$$

Für die schraffierte Fläche der Abb.: 5.2.8 gilt dann:

$$\frac{2}{\pi} \int_{z=1/2}^{\bar{z}} \arctan \frac{\sinh \pi x}{\sin \pi z} dz$$

Den Ausdruck unter den Integral formt Schröder mit den Zusammenhängen

$$\arctan t = \frac{1}{2i} \ln \frac{1+it}{1-it}$$

$$i \sinh \pi x = \sin i \pi x$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{y+x}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x-y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

um und erhält den Ausdruck:

$$f_1(x, z) = \arctan \frac{\sinh \pi x}{\sin \pi z} = \frac{1}{2i} \ln \frac{\tan \frac{\pi}{2} (z + ix)}{\tan \frac{\pi}{2} (z - ix)} = \frac{1}{2i} \ln \frac{\tan \varphi}{\tan \bar{\varphi}}$$

mit  $\bar{\varphi}$  und  $\varphi$  als Abkürzungen. Über den Zusammenhang  $\tan \varphi = -i \tanh i \varphi$  erhält man auch:

$$f_1(x, z) = \frac{1}{2i} \left[ \ln(-1) - \ln \frac{1 + e^{2i\varphi}}{1 - e^{2i\varphi}} + \ln \frac{e^{2i\bar{\varphi}} + 1}{e^{2i\bar{\varphi}} - 1} \right]$$

Mit  $\ln(-1) = i\pi$  folgt mit der Reihenentwicklung für die logarithmischen Glieder:

$$\begin{aligned} f_1(x, z) &= \frac{1}{2i} \left[ \pm i\pi - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{(2k+1)2i\varphi}}{2k+1} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-(2k+1)2i\varphi}}{2k+1} \right] \\ &= \pm \frac{\pi}{2} - \frac{2}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \left[ e^{-\pi x(2k+1)} (e^{i\pi(2k+1)} - e^{-i\pi(2k+1)}) \right] \end{aligned}$$

Mit  $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2 \sin i\varphi = -\frac{2}{i} \sin \varphi$  wird:

$$f_1(x, z) = \pm \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2k+1} e^{-\pi x(2k+1)} \sin(2k+1)\pi z \right\}$$

Führt man noch die Integration durch

$$\int_{\frac{1}{2}}^z f_1(x, z) dz = \pm \frac{\pi}{2} \left( z - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-\pi x(2k+1)} \cos(2k+1)\pi z \right\}$$

so sind die Ausdrücke der Gl.: 5.2.18 bekannt

Zur Lösung der Gl.: 5.2.20 betrachtet Schröder die Abbildungen 5.2.9 und 5.2.10.

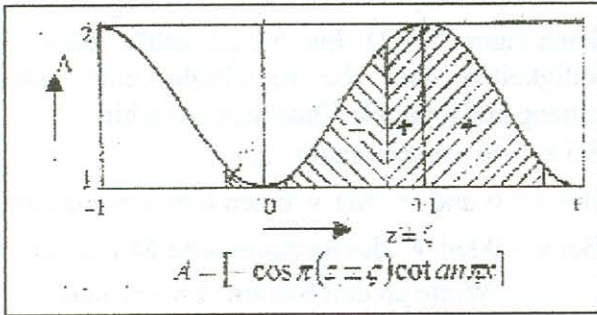


Abb.: 5.2.9 Zur Lösung der Gl.: 5.2.20

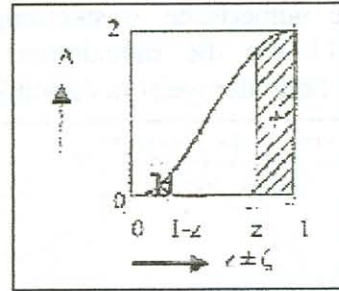


Abb.: 5.2.10 Zur Lösung der Gl.: 5.2.29

Dort ist der Ausdruck

$$- \cos \pi (z \pm \zeta_1) + \cosh \pi x$$

über  $z \pm \zeta_1$  aufgetragen. Analog zu den Bildern 5.2.7 und 5.2.8 ergibt die Zusammenlegung der Flächen der Abb.: 5.2.9 das Doppelte der Fläche von Abb.: 5.2.10.

Für  $z = 0$  erhält man  $v_z = 0$

Für  $z = 1$  erhält man  $v_z = 0$

Für  $z = \frac{1}{2}$  erhält man  $v_z = v_{\max}$

Für  $z=1$  erhält man das gleiche Resultat wie für  $z$ .

Die resultierende Diagrammfläche lässt sich durch den Ausdruck

$$\frac{1}{\pi} \int_{z=z}^1 \ln \frac{\cos \pi z + \cosh \pi x}{-\cos \pi z + \cosh \pi x} dz = \frac{2}{\pi} \int_z^1 \arctan h \frac{\cos \pi z}{\cosh \pi x} dz = \frac{2}{\pi} \int_z^1 f_2(x, z) dz$$

darstellen. Da dieses Integral in geschlossener Form nicht lösbar ist, verwendet Schröder den Ausdruck:

$$f_2(x, z) = \frac{1}{2} \ln \frac{\cosh \pi x + \cos \pi z}{\cosh \pi x - \cos \pi z} = \frac{1}{2} \ln \frac{(e^{\pi(x+iz)} + 1)(e^{\pi(x-iz)} + 1)}{(e^{\pi(x+iz)} - 1)(e^{\pi(x-iz)} - 1)}$$

und 
$$\sum_{k=0}^{\infty} f_2(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} e^{-\pi(2k+1)z} \cos(2k+1)\pi z$$

Die Integration über die Kanalhöhe ergibt:

$$\int_{z=z}^1 f_2(x, z) = -\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-\pi(2k+1)z} \sin(2k+1)\pi z \right]$$

Mit den Zwischenrechnungen von Schröder können die induzierten Geschwindigkeiten in einem ebenen Kanal angegeben werden:

$$\frac{2v_x}{\Delta c_{ua} \cot \alpha \beta} = z - \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{2}}^z \arctan \left( \frac{\sinh \pi x}{\sin \pi z} \right) dz =$$

$$2z - 1 + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-\pi(2k+1)z} \cos(2k+1)\pi z \right] \quad 5.2.21$$

$$\frac{2v_y}{\Delta c_{ua}} = z \pm z - \frac{1}{2} \quad (\pm \text{ für } x > \text{ oder } < 0)$$

5.2.22

$$\frac{2v_z}{\Delta c_{ua} \cot \alpha \beta} = -\frac{\pi}{2} \int_z^1 \frac{\tanh \frac{\cos \pi z}{\sinh \pi x}}{\cosh \pi x} dz = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-\pi(2k+1)z} \sin(2k+1)\pi z \right] \quad 5.2.23$$

Durch eine numerische Auswertung der Gleichungen 5.2.21 bis 5.2.23 erhält man die Abb.; 5.2.11 die die induzierten Geschwindigkeiten über die Kanalhöhe einer Stufe wiedergibt. Schröder weist in diesen Zusammenhang auf folgende Charakteristika hin.

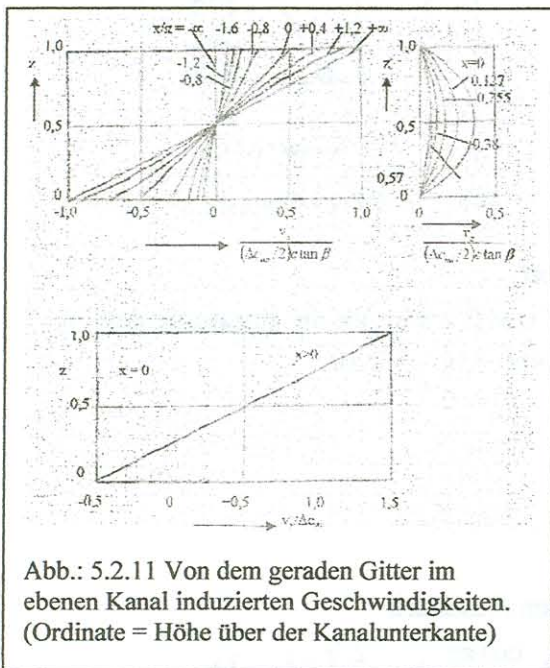


Abb.: 5.2.11 Von dem geraden Gitter im ebenen Kanal induzierten Geschwindigkeiten. (Ordinate = Höhe über der Kanalunterkante)

Bei  $x = -\infty$  verschwindet  $v_x$

Bei  $x = 0$  und  $\infty$  hat  $v_x$  einen linearen Verlauf

Bei  $x = 0$  hat  $v_x$  das arithmetische Mittel der Werte an den Stellen  $x = -\infty$  und  $x = +\infty$

Bei  $z = 0$  bis  $1$  linearer Verlauf von  $v_y$  (entspricht der Umlenkung  $\Delta c_{ua}$ )

Bei  $z = 0 = 1$   $v_z$  verschwindet an den Kanalwänden

Bei  $z = 0,5$   $v_z$  hat in der Kanalmitte einen Maximalwert.

Die Abb.: 5.2.12 zeigt nochmals die Geschwindigkeiten  $v_x$  und  $v_z$  in Abhängigkeit von der Gitterachse mit der Kanalhöhe als Parameter. Die Abb.: 5.2.12 zeigt nochmals die von der Gitterachse mit der Kanalhöhe als Parameter. Dieses Bild veranschaulicht folgendes:

- Knickfreier Verlauf von  $v_x$  und Antisymmetrie bezüglich des Punktes, in dem die Kurven die Gitterebene  $x = 0$  durchstoßen.
- Symmetrischer Verlauf von  $v_z$  zur Gitterebene  $x = 0$  mit einem Knick in dieser Gitterebene.



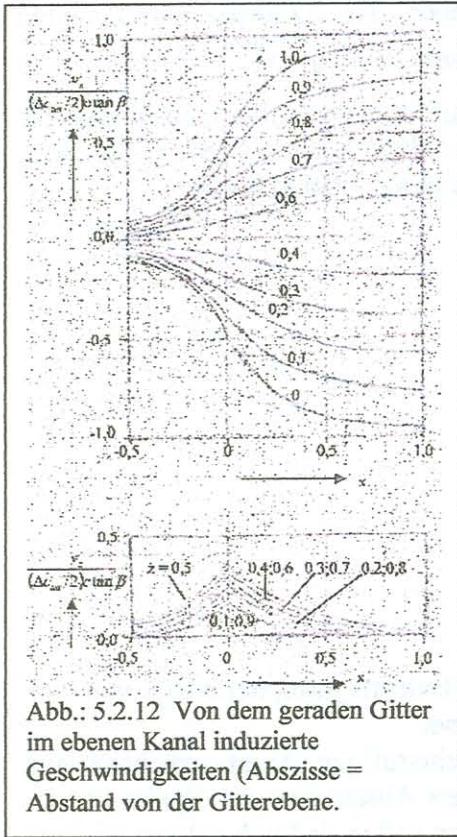


Abb.: 5.2.12 Von dem geraden Gitter im ebenen Kanal induzierte Geschwindigkeiten (Abszisse = Abstand von der Gitterebene).

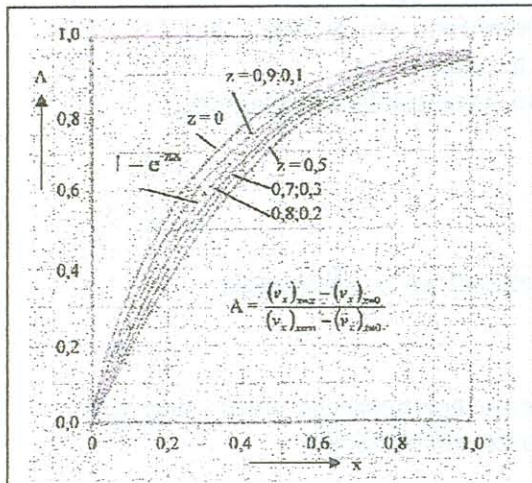


Abb.: 5.2.13 Nachweis, dass die Näherungsfunktion  $e^{-\pi x}$  die Kurven im Bild 5.2.12 oben gut wiedergibt. Alle Kurven fallen hier in ein schmales Band zusammen (zwischen den Kurven  $z=0$  und  $z=0,5$ ).

Um die Ähnlichkeit aller Kurven  $v_x = f(x, z = \text{konst.})$  zu zeigen, betrachtet Schröder das Verhältnis:

$$\frac{v_x(x=x; z=\text{konst.}) - v_x(x=0; z=\text{konst.})}{v_x(x=\infty; z=\text{konst.}) - v_x(x=0; z=\text{konst.})} \quad 5.2.24$$

Alle diese Kurven verlaufen nach Abb.: 5.2.13 in einem schmalen Band und lassen sich durch die Näherungsfunktion  $1 - e^{-\pi x}$  ersetzen. Bei der Untersuchung des ebenen Kanals war die Längeneinheit, auf die sich die Koordinaten beziehen, die Kanalhöhe  $h$ .

Deshalb muss für die Näherungsfunktion  $1 - e^{-\pi \frac{x}{h}}$  gesetzt werden.

Das einfache radiale Gleichgewicht.

Wir wollen nun die Schröder'schen Betrachtungen auf die Axialgeschwindigkeitsverteilung einer Stufe nach Gl.:5.17 anwenden. Setzen wir die Umfangskomponenten, der absoluten Geschwindigkeiten in der Gl.: 5.1.17 Null, erhält man in Verbindung mit dem Temperaturglied und der dabei gemachten Voraussetzung die Geschwindigkeitsverteilung unendlich weit vor dem Gitter:

$$\varphi^2 = \varphi_a^2 - \frac{2c_p}{u_a^2} (T_{Ia}^* - T_I^*) \quad 5.2.25$$

wobei das Temperaturglied nur in der Strömungsebene vor dem Laufgitter gilt.

Da das Näherungsgesetz  $1 - e^{-\pi \frac{x}{h}}$  lediglich durch die Zirkulationsverteilung im Gitter begründet ist, kann dieses auch nur auf das der Zirkulation im Gitter entsprechende Glied der Gleichung 5.1.17 bei der Axialgeschwindigkeitsermittlung angewendet werden. Dabei gehen wir vom Vorleitgitter aus. Unter Einführung eines

Korrekturfaktors  $\alpha = \alpha \left( \frac{x}{h} \right)$  entsteht für die

Axialgeschwindigkeitsverteilung:

$$\varphi = \varphi_a + \alpha(A - B) - C \quad 5.2.26$$

Über die Größen  $A$ ,  $B$  und  $C$  siehe die Gleichungen 5.1.17a bis 5.1.17c. Da weit vor dem Gitter die Axialgeschwindigkeit nach Gl.: 5.2.25 ( $\alpha = 0$ ) und weit hinter dem Gitter durch die

Gleichung 5.2.26 ( $\alpha = 1$ ) gegeben ist, gelten folgende Werte:

$$\text{Für } -\infty \leq x \leq 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi x}{h}}$$

$$\text{Für } 0 \leq x \leq +\infty \rightarrow \alpha = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi x}{h}}$$

In der Gitterebene muss das Mittel aus den Verteilungen der Axialgeschwindigkeiten unendlich weit vor und unendlich weit hinter dem Gitter sein, d.h.  $\alpha = 1/2$ . Wird in einem Strömungskanal in einem endlichen vom Leitgitter das Laufgitter angeordnet, so überlagern sich die vom Laufgitter hervorgerufenen Zusatzgeschwindigkeiten zu denen die vom Leitgitter herrühren. Zur Gl.: 5.2.26 kommt somit noch ein additives Glied hinzu.

$$\varphi^2 = \varphi_a^2 + \alpha(A-B) + bB - C \quad 5.2.27$$

Dann muss sein:

$$b = 0 \text{ für } \frac{x}{h} = -\infty$$

$$b = 1 \text{ für } \frac{x}{h} = 0$$

$$b = 2 \text{ für } \frac{x}{h} = +\infty$$

oder 
$$-\infty \leq x \leq 0 \rightarrow b = e^{-\pi \frac{x}{h}}$$

$$0 \leq x \leq +\infty \rightarrow b = 2 - e^{-\pi \frac{x}{h}}$$

Bei  $\alpha$  ist  $x$  von der jeweiligen Messebene bis zur Ebene des Eintrittsgitters, bei  $b$  ist  $x$  von der jeweiligen Messebene bis zur Ebene des Laufgitters zu rechnen.

Abb.: 5.2.14 zeigt schematisch den Eintrittsteil eines mehrstufigen Axialverdichters aus homogenen Stufen mit der Kanalhöhe  $h = 1$  und gleichen Abständen von Spaltmitte zu Spaltmitte der einzelnen Gitterreihen. Die homogenen Stufen sollen dadurch gekennzeichnet sein, dass sich die Verteilungen der Umfangskomponenten der Strömung auf gleichem Radius unverändert wiederholen. Deshalb ist der Drallverteilung ein weiteres dem Faktor  $b$  gleichlaufendes Glied, jedoch mit negativen Vorzeichen, hinzuzufügen.

Fassen wir die einzelnen Glieder zusammen, so gilt für die Axialgeschwindigkeitsverteilung (siehe hierzu die Gl.: 5.1.17):

$$\left( \frac{c_{ax}}{u_a} \right)^2 = \varphi_a^2 + \alpha A \pm |\beta| B - C \quad 5.2.28$$

Hinsichtlich der Vorzeichen gelten die im Abschnitt 5.1 gemachten Ausführungen.

Für den Korrekturfaktor gilt dann:

$$\beta = \sum b - \alpha \quad 5.2.29$$

Entsprechend der Abb.: 5.2.14 stellen die Faktoren  $b$  eine geometrische Reihe dar, deren Summe eine besonders einfache Form bei unendlicher Stufenzahl annimmt.

Mit  $x = \frac{l_{ax}}{2}$  wird:

Im Spalt 0 wird:

$$b_0 = \left( e^{-3\pi \frac{l}{2h}} + e^{-7\pi \frac{l}{2h}} + e^{-11\pi \frac{l}{2h}} + e^{-15\pi \frac{l}{2h}} + \dots \right) - \left( e^{-5\pi \frac{l}{2h}} + e^{-9\pi \frac{l}{2h}} + e^{-13\pi \frac{l}{2h}} + e^{-17\pi \frac{l}{2h}} + \dots \right)$$

$$= \left( 1 - e^{-2\pi \frac{l}{2h}} \right) \frac{1 - e^{-2\pi \frac{l}{2h}}}{1 - e^{-4\pi \frac{l}{2h}}} = e^{-3\pi \frac{l}{2h}} \frac{1}{1 + e^{-2\pi \frac{l}{2h}}} \quad \text{bzw.}:$$

$$b_0 = e^{-2\pi \frac{l}{2h}} * b_{1/l}$$

Im Spalt 1/I wird:

$$b_{1/I} = \left( e^{-\frac{\pi l}{2h}} + e^{-\frac{5\pi l}{2h}} + e^{-\frac{9\pi l}{2h}} + \dots \right) - \left( e^{-\frac{3\pi l}{2h}} + e^{-\frac{7\pi l}{2h}} + e^{-\frac{11\pi l}{2h}} + \dots \right)$$

$$= e^{-\frac{\pi l}{2h}} \frac{1 - e^{-\frac{2\pi l}{2h}}}{1 - e^{-\frac{4\pi l}{2h}}} = \frac{e^{-\frac{\pi l}{2h}}}{1 + e^{-\frac{2\pi l}{2h}}} \quad \text{da } 2\coth\varphi = e^\varphi + e^{-\varphi} \text{ ist, folgt:}$$

$$b_{1/I} = \frac{1}{2 \cosh \frac{\pi l}{2h}}$$

Im Spalt 1/II wird:

$$b_{1/II} = \left( 2 - e^{-\frac{\pi l}{2h}} \right) + \left( e^{-\frac{3\pi l}{2h}} + e^{-\frac{7\pi l}{2h}} + e^{-\frac{11\pi l}{2h}} + \dots \right) - \left( e^{-\frac{\pi l}{2h}} + e^{-\frac{5\pi l}{2h}} + e^{-\frac{9\pi l}{2h}} + \dots \right)$$

$$b_{1/II} = 2e^{-\frac{\pi l}{2h}} - b_{1/I}$$

Im Spalt 2/I wird:

$$b_{2/I} = \left( 2 - e^{-\frac{3\pi l}{2h}} \right) + \left( e^{-\frac{\pi l}{2h}} + e^{-\frac{5\pi l}{2h}} + e^{-\frac{9\pi l}{2h}} + \dots \right) - \left( 2 - e^{-\frac{\pi l}{2h}} \right) - \left( e^{-\frac{3\pi l}{2h}} + e^{-\frac{7\pi l}{2h}} + e^{-\frac{11\pi l}{2h}} + \dots \right)$$

$$b_{2/I} = 2 - e^{-\frac{3\pi l}{2h}} - b_{1/I}$$

Im Spalt 2/II wird:

$$b_{2/II} = \left( 2 - e^{-\frac{5\pi l}{2h}} \right) + \left( 2 - e^{-\frac{\pi l}{2h}} \right) + \left( e^{-\frac{3\pi l}{2h}} + e^{-\frac{7\pi l}{2h}} + \dots \right) - \left( 2 - e^{-\frac{3\pi l}{2h}} \right) - \left( e^{-\frac{\pi l}{2h}} + e^{-\frac{5\pi l}{2h}} + e^{-\frac{9\pi l}{2h}} + \dots \right)$$

$$b_{2/II} = 2 - e^{-\frac{5\pi l}{2h}} - b_{2/I}$$

Diese Betrachtung setzt sich für die einzelnen Stufen fort.

Für die Spalten  $\infty_{II}$  und  $\infty_I$  ist:

$$\alpha_{\infty II} = 1 - \frac{1}{\cosh \frac{\pi l}{2h}} \quad \text{und} \quad b_{\infty II} = 2 - \frac{1}{\cosh \frac{\pi l}{2h}}$$

und somit gilt auch:

$$\beta_{\infty II} = -\beta_{\infty I} = 1 - \frac{1}{\cosh \frac{\pi l}{2h}}$$

Die sich aus Gl.: 5.2.29 ergebenden Korrekturfaktoren der Drallströmung sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst und auf den Abbildungen 5.2.14 und 5.2.15 in eine für die Praxis sehr bequemen Form dargestellt. Sie gelten für mehrstufige Axialverdichter mit Vorleitgitter.

Für mehrstufige Axialverdichter ohne Vorleitgitter sind analoge Überlegungen hinsichtlich des Korrekturfaktors  $\beta$  anzustellen.

Es ist bemerkenswert, dass der Korrekturfaktor  $\alpha$  praktisch bereits nach der dritten Verdichterstufe den Wert 1 und der Korrekturfaktor  $\beta$  die asymmetrische Näherung für eine unendliche Anzahl von Verdichterstufen annimmt.

Obwohl die Ableitungen von Schröder eine Reihe von Vereinfachungen enthält und keinen großen Anspruch auf hohe Genauigkeit erhebt, ist die Anwendung denkbar einfach. Dieses Verfahren hat sich in der Praxis gut bewährt.

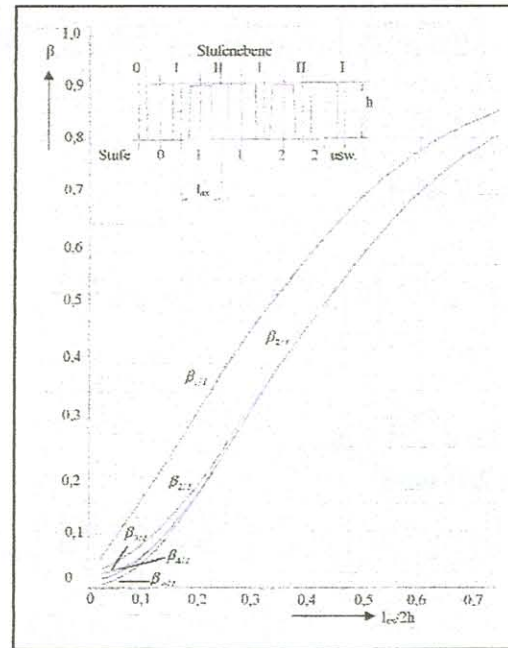
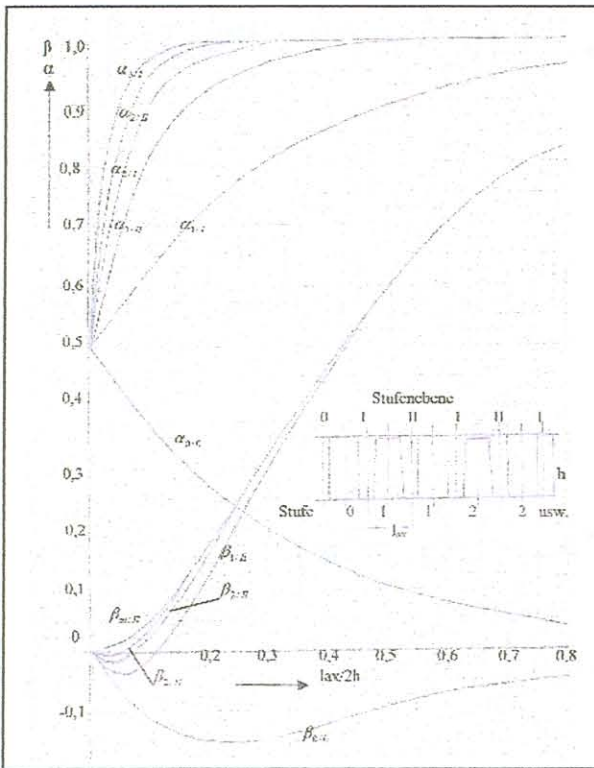


Abb.: 5.2.15 Korrekturfaktoren nach Schröder.

Abb.: 5.2.14 Korrekturfaktoren nach Schröder.

1	$\lambda = \frac{\pi l}{2h}$	0,1	0,2	0,3	0,5	0,8	1,2	2,0	$\pi$
2	$l/2h$	0,0318	0,06336	0,09555	0,15925	0,2548	0,3820	0,6365	1,0
3	$\alpha_{0/I} = \frac{1}{2} e^{-\lambda}$	0,45242	0,40936	0,3704	0,30326	0,22466	0,15059	0,06767	0,021625
4	$\alpha_{1/II} = 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda}$	0,5475	0,5906	0,6295	0,6967	0,7753	0,8494	0,9323	0,9783
5	$\alpha_{1/III} = 1 - e^{-3\lambda}$	0,6296	0,07256	0,07967	0,08884	0,9546	0,8863	0,0087	0,9999
6	$\alpha_{2/II} = 1 - e^{-5\lambda}$	0,6967	0,8161	0,8884	0,9589	0,9908	0,9987	0,9990	1,0
7	$\alpha_{2/III} = 1 - e^{-7\lambda}$	0,7517	0,8767	0,9387	0,9849	0,9977	0,99988	1,0	1,0
8	$\alpha_{3/II} = 1 - e^{-9\lambda}$	0,7967	0,9173	0,9664	0,9944	0,9996	0,9998	1,0	1,0

Fortsetzung siehe folgende Seite.

1	$\lambda = \pi/2h$	0,1	0,2	0,3	0,5	0,8	1,2	2,0	$\pi$
2	$\lambda/2h$	0,0318	0,06336	0,09555	0,15925	0,2548	0,3820	0,6365	1,0
9	$\alpha_{3/II} = 1 - e^{-11\lambda}$	0,83356	0,9446	0,98156	0,9979	0,9999	1,0	1,0	1,0
10	$\alpha_{4/I} = 1 - e^{-13\lambda}$	0,8637	0,9628	0,9899	0,9992	1,0	1,0	1,0	1,0
11	$\beta_{o/o} = b_0 - \alpha_{0/0}$	-0,04509	-0,0808	-0,10996	-0,15576	-0,14921	-0,1255	-0,06523	-0,02154
12	$\beta_{1/I} = b_{1/I} - \alpha_{1/I}$	-0,0500	-0,1005	-0,15159	-0,0253	-0,40143	-0,5733	-0,7995	-0,93517
13	$\beta_{1/II} = b_{1/II} - \alpha_{1/II}$	-0,03194	-0,03448	-0,01553	0,06174	0,22213	0,43637	0,73138	0,91355
14	$\beta_{2/I} = b_{2/I} - \alpha_{2/I}$	-0,03521	-0,05599	-0,07618	-0,1322	-0,2583	-0,44879	-0,7342	-0,91363
15	$\beta_{2/II} = b_{2/II} - \alpha_{2/II}$	-0,01976	-0,00465	0,02585	0,10633	0,25143	0,44767	0,73424	0,91363
16	$\beta_{3/I} = b_{3/I} - \alpha_{3/I}$	-0,02525	-0,0360	-0,05347	-0,11587	-0,25331	-0,4477	-0,7324	-0,91363
17	$\beta_{3/II} = b_{3/II} - \alpha_{3/II}$	-0,0109	0,00875	0,03811	0,11236	0,25294	0,4477	0,7324	0,91363
18	$\beta_{4/I} = b_{4/I} - \alpha_{4/I}$	-0,01867	-0,02701	-0,04665	-0,11364	-0,2531	-0,4428	-0,73245	-0,91363
19	$1/[\cosh(\pi/2h)]$	0,99504	0,9803	0,956	0,8866	0,7478	0,5522	0,2657	0,0864
20	$\beta_{\infty/I} = \beta_{\infty/I} =$ $= 1 - 1/[\cosh(\pi/2h)]$	0,00496	0,0197	0,044	0,1134	0,2522	0,4478	0,7341	0,9136

Tabelle 5.2.1 Korrekturfaktoren der Drallströmung nach Schröder für mehrstufige Axialverdichter mit Vorleitgitter bei Unterschallanströmung der Laufgitter.

Hinweise zur Drallströmung für Axialverdichterstufen ohne Vorleitgitter aber mit Überschallanströmung der Laufgitter werden im Abschnitt „Grenzleistungsstufen“ gegeben.

### 5.3 Der Kontinuitätsradius.

In den Abschnitten 5.1 und 5.2 wurde der Axialgeschwindigkeitsverlauf über der Schaufelhöhe einer Axialverdichterstufe in den Ebenen I vor und II hinter dem Laufgitter ermittelt. Als Bezugsgrößen wurden die Werte am Außenradius der Stufe gewählt. Dieser Abschnitt soll den Zusammenhang zwischen der Axialgeschwindigkeitsverteilung über der Schaufelhöhe und der Kontinuität des Gases in einer Verdichterstufe zeigen. Wir beziehen uns dabei auf die Strömungsebene  $\infty$  der Stufe. In dieser Ebene wird der Radius gesucht, an dem die dort vorhandene Axialgeschwindigkeit multipliziert mit der Kreisringfläche der Stufe gerade auf den Volumenstrom des Querschnittes führt.

$$\dot{V} = \hat{c}_{ax} r_a^2 (1 - v_i^2) = 2\pi r r_a^2 \int c_{ax} v dv \quad 5.3.1$$

Aus dieser Gleichung erhält man auch:

$$\frac{\dot{V}}{2\pi r_a^2} = \int_{v_i}^1 c_{ax} v dv \quad 5.3.1a$$

Die Gleichung 5.3.1 gilt allgemein sowohl für Verdichterstufen mit über den Stufenradius konstanter und auch variabler Energiezufuhr an das Gas über den Radius des Laufgitters (siehe auch Gl.: 5.1.20). Da die variable Energiezufuhr an das Gas im Laufgitter beliebig sein kann, lassen sich die Gleichungen 5.3.1 und 5.3.1a nicht weiter vereinfachen.

Für Laufgitter mit konstanter Energiezufuhr an das Gas ist dies jedoch mit geringen Vereinfachungen möglich.

Unter Vernachlässigung des geringfügigen Pseudo-Stromlinieneinflusses ( $\varepsilon = -1$ ) auf die Axialgeschwindigkeitsverteilung in einer Axialverdichterstufe mit konstanter Energieübertragung an das Gas über den Radius des Laufgitters ( $K = 0$ ) gilt die Gl.: 5.1.17a. Da weiterhin am Kontinuitätsradius  $\hat{v}$

$$\frac{\hat{c}_{ax\infty}}{u_a} = \frac{c_{ax1}}{u_a} = \frac{c_{ax2}}{u_a}$$

bzw.

$$\hat{\varphi} = \varphi_1 = \varphi_2$$

ist, kann mit der Axialgeschwindigkeitsverteilung in der Strömungsebene  $\infty$  des Laufgitters gerechnet werden. Die Gl.: 5.1.17a erhält damit die Form:

$$\frac{c_{ax\infty}}{c_{ax\infty a}} = \sqrt{1 + \frac{q+1}{q} \frac{(1-\rho_k)^2}{\varphi_{\infty a}^2} (1-v^{2q})} \quad 5.3.2$$

Entwickeln wir diese Beziehung in eine Potenzreihe

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$$

so wird:

$$\frac{c_{ax\infty}}{c_{ax\infty a}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{q+1}{\varphi_{\infty a}^2} (1-\rho_k)^2 (1-v^{2q}) \quad 5.3.3$$

Da die Reihe stark konvergent ist, wurde sie nach dem zweiten Glied abgebrochen. Damit erhält man für die Ausdrücke der Gl.: 5.3.1 wenn sie durch  $u_a$  dividiert werden:

$$\frac{\hat{c}_{ax}}{u_a} (1-v_i^2) = \left[ \varphi_{\infty a}^2 + \frac{q+1}{q} (1-\rho_k)^2 (1-\hat{v}^{2q}) \right] \quad 5.3.4$$

und:

$$2 \int_{v_i}^1 \frac{c_{ax}}{u_a} v dv = 2 \varphi_{\infty a}^2 \int_{v_i}^1 \left[ 1 + \frac{q+1}{q} \left( \frac{1-\rho_k}{\varphi_{\infty a}} \right)^2 (1-v^{2q}) \right] v dv$$

Die Integration dieser Gleichung ergibt:

$$2 \int_{v_i}^1 \frac{c_{ax}}{u_a} v dv = (1-v_i^2) \varphi_{\infty a}^2 \left[ 1 + \frac{q+1}{q} \left( \frac{1-\rho_k}{\varphi_{\infty a}} \right)^2 - \frac{1}{q} \left( \frac{1-\rho_k}{\varphi_{\infty a}} \right)^2 \frac{1-v_i^{2q+2}}{1-v_i^2} \right] \quad 5.3.5$$

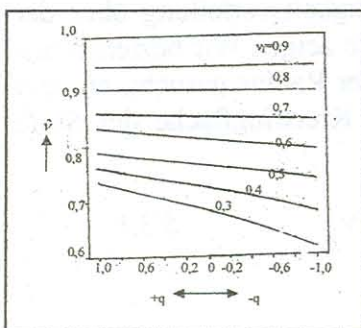


Abb.: 5.3.1 Der Kontinuitätsradius einer Verdichterstufe.

Setzt man entsprechend der Gl.: 5.3.1 die Ausdrücke 5.3.4 und 5.3.5 gleich, erhält man nach einer Umformung den Ausdruck für den Kontinuitätsradius:

$$\hat{v} = \frac{\hat{r}}{r_a} = \left[ \frac{1}{q+1} \frac{1-v_i^{2(q+1)}}{1-v_i^2} \right]^{\frac{1}{2q}} \quad 5.3.6$$

Die einzelnen Werte sind auf der Abb.: 5.3.1 in Abhängigkeit von den Drallverteilungsexponenten und mit dem Nabenverhältnis als Parameter dargestellt.

Für die einzelnen Spezialfälle der Kinematik bei über den Radius der Stufe konstanter Energieübertragung an das Gas folgt:

a) für das kinematische Schema der konstanten kinematischen Reaktion ( $q = +1$ ):

$$\hat{v} = \sqrt{\frac{1+v_i^2}{2}} \quad 5.3.7$$

b) für das kinematische Schema des Potentialwirbels ( $q = -1$ )  
 Unter Verwendung des Grenzwertes

$$\lim_{q \rightarrow -1} f(q) = \frac{1 - v_i^{2q+2}}{(q+1)'} = -2 \ln v_i$$

erhält man:

$$\hat{v} = \frac{1}{\sqrt{\frac{-2 \ln v_i}{1 - v_i}}} \quad 5.3.8$$

c) für das kinematische Schema der konstanten Umfangskomponente der absoluten Geschwindigkeit.

Aus Gl.: 5.3.6 folgt:

$$\ln \hat{v} = \frac{1}{2q} \ln \left[ \frac{1 - v_i^{2q+2}}{q+1} \frac{1}{1 - v_i^2} \right]$$

Mit

$$\frac{u}{v} = \frac{1 - v_i^{2q+2}}{1 - v_i^2}$$

erhält man den Grenzwert zu:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \ln \hat{v} = \frac{-2 \left[ \ln v_i (q+1) (1 - v_i^2) \right]^{2q+2} - (1 - v_i^{2q+2}) (1 - v_i^2)}{\left[ (q+1) (1 - v_i^2) \right]} \cdot \frac{1}{2 \left[ \frac{1 - v_i^{2q+2}}{q+1} \frac{1}{1 - v_i^2} \right]}$$

oder:

$$\ln \hat{v} = \frac{1 + v_i^2 (2 \ln v_i - 1)}{2(v_i^2 - 1)}$$

Der Kontinuitätsradius ist dann:

$$\hat{v} = e^{\frac{1 + v_i^2 (2 \ln v_i - 1)}{2(v_i^2 - 1)}} \quad 5.3.9$$

Die Wert der Gleichungen 5.3.6 bis 5.3.9 lassen sich einfach und übersichtlich für den Gebrauch in der Praxis in ein Diagramm (siehe Abb.: 5.3.1) darstellen.

#### 5.4 Der Einfluss der Zähigkeit des strömenden Gases auf den Axialgeschwindigkeitsverlauf in einer Axialverdichterstufe.

Die Axialgeschwindigkeitsverteilung über die Schaufelhöhe einer Verdichterstufe bei reibungsfreier Strömung kann nach den Beziehungen der Abschnitte 5.1 bis 5.3 ermittelt werden. Messungen an den Stufen mehrstufiger Axialverdichter zeigen, dass der tatsächliche Verlauf der Axialgeschwindigkeiten über den Stufenradius von der reibungsfreien theoretischen Geschwindigkeitsverteilung abweicht. Der theoretischen Grundverteilung ist eine Störfunktion überlagert, die näherungsweise den Gesetzen der turbulenten Rohrströmung unter Einbeziehung eines aus Versuchen ermittelten Korrekturfaktors folgt.

In den Wandgebieten des Strömungskanals wird die Axialgeschwindigkeit infolge der Zähigkeitseinflüsse des Gases stark herabgesetzt und in den mittleren Gebieten der Schaufelgitter beschleunigt. Schaufelgitter, die für die reibungsfreie Strömung aerodynamisch stoßfrei ausgelegt sind, werden dadurch in den Randgebieten mit druckseitiger (Bauchstoß)

und im mittleren Bereich der Kanalhöhe mit saugseitiger Falschanströmung (Rückenstoß) beaufschlagt. Druckseitige Falschanströmung der Gitterprofile verschiebt den Betriebspunkt eines Laufgitters in Richtung eines Arbeitspunktes, bei dem eine saugseitige Ablösung der Strömung von der Profilkontur auftritt und saugseitige Falschanströmung bewirkt eine Verschiebung des Betriebspunktes in Richtung des Arbeitspunktes mit druckseitiger Strömungsablösung an der Profilkontur. Die Falschanströmungen der Profile sowie eine eventuell von der Profilkontur abgelöste Strömung in den Randgebieten eines Laufgitters bedingen Verluste, die durch eine Anpassung der Profile an die in einer Stufe praktisch auftretende Geschwindigkeitsverteilung reduziert werden können.

Wie wollen eine Axialverdichterstufe betrachten, deren Gitter für eine reibungsfreie Geschwindigkeitsverteilung ausgelegt ist. In der Praxis werden diese Gitter mit dem zähigkeitsbehafteten Gas beaufschlagt. Entsprechend dem Geschwindigkeitsvektoren-

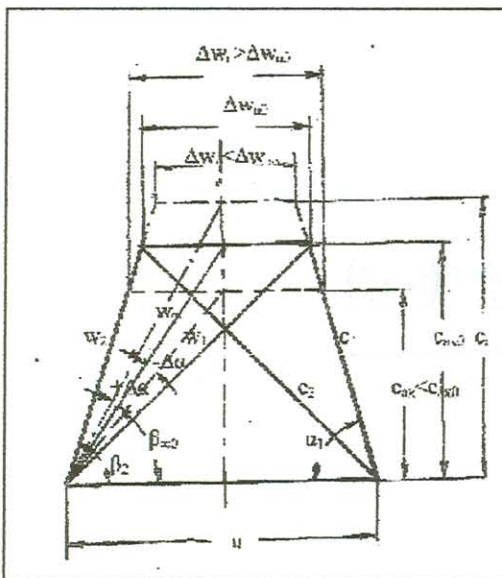
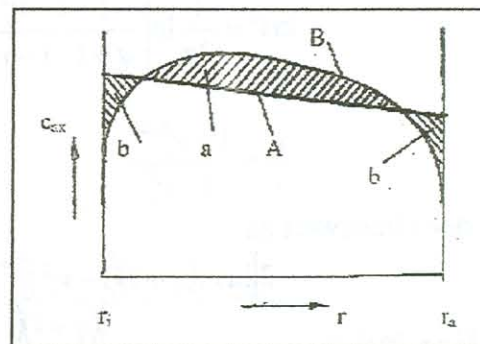


Abb.: 5.4.1 Schematische Darstellung der Geschwindigkeits- und Richtungsänderung in einem Geschwindigkeitsvektordiagramm  
Bei  $c_{ax} <$  und  $> c_{ax0}$  ( $c_{ax0}$  entspricht Dem Auslegungszustand)



- A theoretischer Geschwindigkeitsverlauf
- B Profil der überlagerten Rohrreibungsströmung
- a Gebiet vermindertener Energieumsetzung im Laufgitter
- b Gebiet vergrößerter Energieumsetzung im Laufgitter

Abb.: 5.4.2 Schematische Darstellung einer theoretischen Axialgeschwindigkeitsverteilung mit überlagerter Rohrreibungsströmung.

diagramm nach Abb.:5.4.1 wird im mittleren Teil der Stufe, wo durch die Zähigkeitseinflüsse die Strömung beschleunigt ist, eine kleinere Energieumsetzung und in den Randgebieten mit der durch Zähigkeitseinflüsse verzögerter Strömung eine größere Energieumsetzung erreicht. Dies drückt sich unmittelbar in ein Temperaturprofil über den Radius einer Stufe aus auch wenn die Stufe mit konstanter Energieübertragung über den Radius des Laufgitters ausgelegt wurde. Entsprechend den Beziehungen des Abschnittes 5.1 bewirkt ein Temperaturprofil auch ein entsprechendes Geschwindigkeitsprofil. Die Grenzschichten an den Kanalwänden werden durch die erhöhten Temperaturen in den Randgebieten beschleunigt. Verändert man die Umfangskomponenten entsprechend der durch die Zähigkeitseinflüsse bedingten Überlagerungsfunktion der Axialgeschwindigkeitsverteilung so, dass die Temperaturverteilung in der Stufe über den Radius konstant ist, dann entfällt die Grenzschichtbeschleunigung in den Randgebieten der Stufe durch das Temperaturprofil.



Die Verteilung der Axialgeschwindigkeiten über den Radius der Stufe würde eine zusätzliche Zuspitzung, wie bereits schon von Andrews, Jeffs und Hardley /43/ festgestellt wurde, und die Kinematik eine noch größere Abkehr von den theoretischen werten erfahren.

Wie bereits bemerkt, gehorchen die durch Zähigkeitseinflüsse hervorgerufenen und der reibungsfreien Axialgeschwindigkeiten überlagerten Zusatzgeschwindigkeiten näherungsweise der turbulenten Rohrströmung. In einer Axialverdichterstufe dürfte die Voraussetzung der turbulenten Strömungsform fast immer gegeben sein. Prandtl und v. Karman haben zuerst gezeigt, dass bei plausiblen Annahmen die turbulente Bewegungsform einer gewissen rechnerischen Behandlung zugänglich ist /44/.

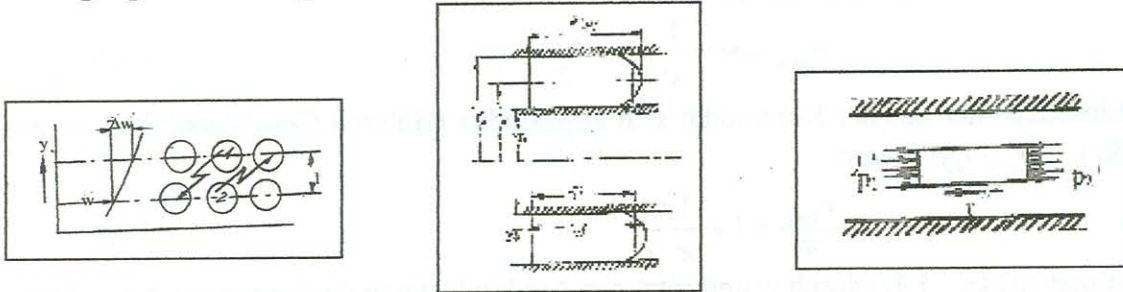


Abb.: 5.4.3 Zur Bestimmung der Rohrreibungsformel.

Wir nehmen an, dass das Geschwindigkeitsprofil  $w = f(y)$  gegeben sei. Die auf Abb.: 5.4.3a in zwei Schichten dargestellten Ballen des strömenden Gases seien gerade so groß, dass ihre Form bei der Querbewegung einer turbulenten Strömung erhalten bleibt. Für eine kleine Strecke  $l$  ist eine solche Bewegung denkbar. Trifft der Ballen 1 in die Bahn 2, so vermindert sich seine Geschwindigkeit um  $l \frac{dw}{dy}$ , während der Ballen 2 beim Eindringen in die Bahn 1 seine Geschwindigkeit um diesen Betrag vergrößert. Die Quergeschwindigkeit muss also die Größenordnung

$$w_y = l \frac{dw}{dy}$$

haben. Wendet man den Impulssatz auf die Fläche der Größenordnung  $l$  an, erhält man die äußere Kraft, die mit der Schubspannung identisch ist, zu:

$$\tau = \rho \left( l \frac{dw}{dy} \right)^2 \quad 5.4.1$$

Der Mischungsweg  $l$  muss an der Wand Null sein und dürfte mit zunehmenden Abstand wachsen. Macht man die einfache Annahme

$$l = \kappa y \quad 5.4.2$$

wo  $\kappa$  die Mischungswegkonstante darstellt und setzt diesen Ausdruck in die Beziehung 5.4.1 ein, so wird:

$$dw = \frac{dy}{y} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \frac{1}{\kappa}$$

Dieser Ausdruck lässt sich leicht integrieren wenn man voraussetzt, dass in Wandnähe die Schubspannung konstant ist.

$$w = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} [\ln y + C] \quad 5.4.3$$

Da der Ausdruck  $\sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$  die Dimension einer Geschwindigkeit hat, wurde er von Th. V. Karman als Schubspannungsgeschwindigkeit bezeichnet.

$$v_x = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \quad 5.4.4$$

Im Verdichterströmungskanal ist in der Schaufelgittermitte, also bei  $y = (r_a - r_i)/2$ , die maximale Geschwindigkeit vorhanden (Abb.: 5.4.3b).

$$w_{\max} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \left[ \ln \frac{r_a - r_i}{2} + C \right] \quad 5.4.5$$

Setzt man diesen Ausdruck von der Gl.: 5.4.3 ab, erhält man:

$$w_{\max} - w = \frac{1}{\kappa} v_x \ln \frac{r_a - r_i}{2y} \quad 5.4.6$$

Durch Einsetzen der aus der Kontinuität sich ergebenden mittleren Geschwindigkeit  $\bar{w}$  an der Stelle  $y = (r_a - r_i)/2$  wird:

$$\frac{w_{\max}}{\bar{w}} = 1 + \frac{1}{\kappa} \frac{v_x}{\bar{w}} \quad 5.4.7$$

Dividiert man die Gl.: 5.4.6 durch  $w$  und setzt den Ausdruck gleich der Beziehung 5.4.7, dann ergibt sich:

$$\frac{w}{\bar{w}} = 1 + \frac{1}{\kappa} \frac{v_x}{\bar{w}} \left[ 1 - \ln \frac{r_a - r_i}{2y} \right] \quad 5.4.8$$

Für die Bestimmung des Verhältnisses  $v_x/\bar{w}$  betrachtet man die Kräfte an einem Zylinder des strömenden Gases nach Abb.: 5.4.3c.

Aus dem Kräftegleichgewicht

$$(p_1 - p_2) \frac{d^2 \pi}{4} = \tau d \pi l$$

erhält man:

$$\Delta p = \frac{l}{d} 4\tau \quad 5.4.9$$

Geht man von der Vorstellung aus, dass an der von dem Gas benetzten inneren Wandfläche des Strömungskanals als Widerstandskraft eine Oberflächenspannung wirkt, die sich als Produkt einer mittleren Wandschubspannung

$$\tau = \psi \frac{\rho}{2} \bar{w}^2$$

ergibt und der benetzten Wandfläche des Rohres  $U l$ , so ergibt sich ein Druckverlust

$$\Delta p = \frac{W}{F} = \psi \frac{\rho}{2} \bar{w}^2 \frac{U}{F} l$$

oder mit  $U/F = 4/d$  und  $\lambda = 4\psi$  als Widerstandsziffer:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} \bar{w}^2 \quad 5.4.10$$

Setzt man die Gl.: 5.4.9 mit der Gl.: 5.4.10 gleich, so wird:

$$\tau = \lambda \frac{\rho}{8} \bar{w}^2 \quad 5.4.11$$

und nach Gl.: 5.4.4:

$$\frac{v_x}{\bar{w}} = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \quad 5.4.12$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Gl.: 5.4.8 ein, so gilt oberhalb des mittleren Radius  $r_m$

mit  $\frac{w}{\bar{w}} = \frac{c_{ax}}{c_{axoR}}$ :

$$\frac{c_{ax}}{c_{axoR}} = 1 + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \left[ 1 - \ln \frac{1 - \frac{r_i}{r_a}}{2 \left( 1 - \frac{r}{r_a} \right)} \right] \quad 5.4.13$$

und unterhalb des mittleren Radius:

$$\frac{c_{ax}}{c_{axoR}} = 1 + \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \left[ 1 - \ln \frac{1 - \frac{r_i}{r_a}}{2 \left( \frac{r}{r_a} - \frac{r_i}{r_a} \right)} \right] \quad 5.4.14$$

Mit Hilfe von Versuchen gelang es Prandtl das sogenannte Prandtl- Karman'sche Gesetz der Rohrreibungskoeffizienten für glatte Rohre

$$\frac{1}{\lambda_0} = 2 \lg(\text{Re} \sqrt{\lambda_0}) - 0,8 \quad 5.4.15$$

und für rauhe Rohre

$$\frac{1}{\lambda} = 1,14 - 2,0 \lg \frac{K}{d} \quad 5.4.16$$

abzuleiten. Colebrook gelang die Entwicklung einer Beziehung für den Reibungskoeffizienten in dem Übergangsbereich:

$$\frac{1}{\lambda} = 2,0 \lg \left[ \frac{K/d}{3,71} + \frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right] \quad 5.4.17$$

Dabei ist K die absolute Rauigkeit in Millimeter. Für den Axialverdichter kann man setzen:

$$K = 0,010 \text{ bis } 0,02$$

Für den Verdichter ist weiterhin der hydraulische Durchmesser einzusetzen:

$$d_{hydr} = \frac{4F}{U} = D_a \left( 1 - \frac{r_i}{r_a} \right) \quad 5.4.18$$

Für die angeführte Reynolds' zahl gilt:

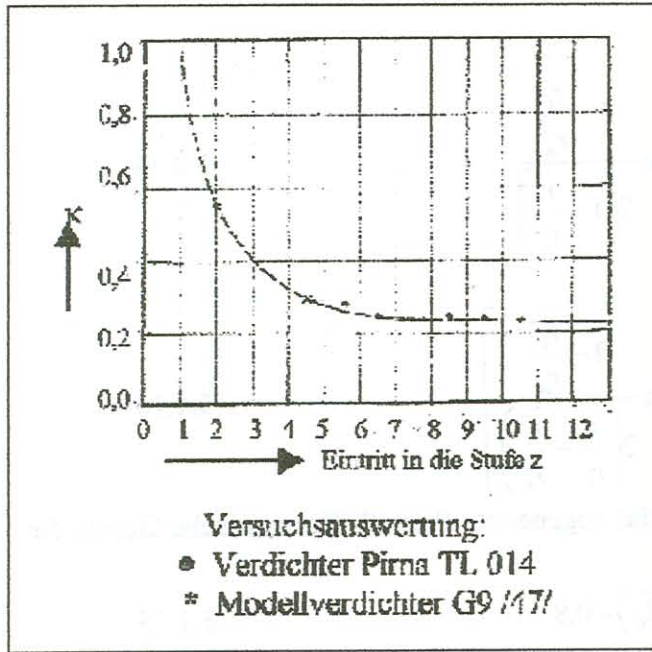
$$\text{Re} = \frac{w_\infty d_{hydr}}{\nu'} = \frac{w_\infty D_a \left( 1 - \frac{r_i}{r_a} \right)}{\nu'} \quad 5.4.19$$

Dabei ist  $\nu' = \frac{\mu}{\rho}$  ( $m^2/s$ ) die kinematische Zähigkeit des strömenden Gases Für die kinematische Zähigkeit der Luft kann man näherungsweise auch setzen:

$$\nu' = 17,65 \frac{T^2}{p} 10^{-6} \quad 5.4.20$$

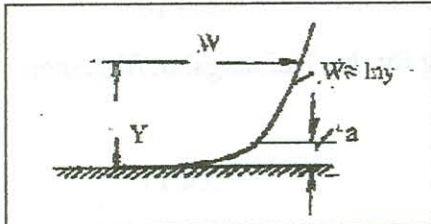
wobei die thermodynamischen Werte für den statischen Zustand des Gases einzusetzen sind (T in  $^{\circ}K$  und p in  $N/m^2$ ).

Für die Mischungswegkonstante bei ausgebildeter Rohrreibungsströmung gilt der Wert  $\kappa=0,4$ . Die Anwendung dieser Mischungswegkonstant ist für eine Verdichterstufe nicht zutreffend.



Die Abb.: 5.4.4 zeigt die aus Versuchen an mehrstufigen Axialverdichtern gewonnenen Werte Für die Mischungswegkonstante  $\kappa$ . Natürlich gelten diese Werte streng genommen nur für mittlere Stufenbelastungen. Die  $\kappa$ -Werte für Die Profilvergitter der ersten Stufe sind durch die Zulaufbedingungen des Gases im Verdichtereinlaufgebiet mit Vorsicht zu betrachten und deshalb auf Abb.: 5.4.4 gestrichelt gezeichnet. Unmittelbar an der Wand des Strömungskanals muss die Geschwindigkeit des Gases bei Reibungsbehafteter Strömung auf den Werte Null absinken. Eine Anpassung der Gitterprofile an diesen Stellen verbietet sich schon aus technologischen Gründen. Die Stellen

Abb.:5.4.4 Versuchsergebnisse zur Mischungswegkonstante.



in unmittelbarer Wandnähe lassen sich umgehen, indem man die wirkliche Kanalbegrenzung nach Abb.:5.4.5 in einem Abstand a von einer gedachten Wand gehen lässt. Da die Kontinuität dann nicht mehr gewährleistet ist, muss eine Korrektur durchgeführt werden. Nach Abb.: 5.4.6 gilt dann;

Abb.: 5.4.5 Zur Anwendung der Rohrreibungsformel.

$$\int_0^H y dh = y_1 H - F_1 \quad 5.4.21$$

Es soll aber sein:

$$\int_0^H y^* dh = y_1 (H - a) \quad 5.4.2.2$$

$$y^*(h) = \kappa y(h)$$

$$\kappa \int_0^H y(h) dh = y_1 (H - a) \quad 5.4.2.3$$

Dividiert man die Gl.:5.4.23 durch die Gl.: 5.4.21, so wird:

$$\kappa = \frac{y_1 (H - a)}{y_1 (H - F_1)} \quad 5.4.2.4$$

Entsprechend der Gl.: 5.4.13 folgt mit

$$C_1 = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}}$$

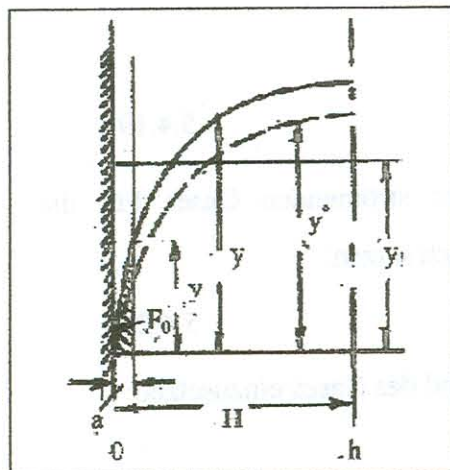


Abb.: 5.4.6 Zur Ermittlung des Korrekturfaktors.

$$y_0 = 1 + C_1 \left[ 1 + \ln \frac{a}{h} \right] \quad 5.4.25$$

und für die Fläche  $F_1$  :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_1 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^a y dh = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H \int_{\varepsilon}^a \left[ 1 + C_1 \left( 1 + \ln \frac{h}{H} \right) \right] d \frac{h}{H} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H \left[ \frac{h}{H} + C_1 \ln \frac{h}{H} - \frac{h}{H} + \frac{h}{H} \right]_{\varepsilon}^a \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \left[ a - \varepsilon + C_1 \ln \frac{a}{H} - C_1 \varepsilon \ln \frac{\varepsilon}{H} \right] \\ &= a \left[ 1 + C_1 \left( \ln \frac{a}{H} + 1 \right) \right] - a C_1 \end{aligned}$$

oder auch

$$F_1 = a(y_0 - C_1) \quad 5.4.26$$

Setzen wir den Ausdruck in die Gl.: 5.4.24 ein, erhält man:

$$k = \frac{y_1(H - a)}{y_1 H - a(y_0 - C_1)}$$

Für  $y = 1$  gilt:

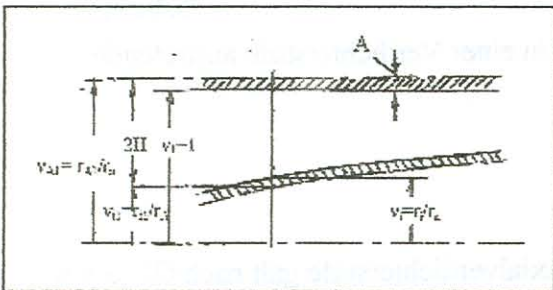


Abb.: 5.4.7 Zur Anwendung der Rohrreibungstformel auf den Axialverdichter.

$$k = \frac{1 - \frac{a}{H}}{1 - \frac{a}{H}(y_0 - C_1)}$$

Nun ist nach Abb.: 5.4.7

$$H = \frac{v_{A1} - v_{i2}}{2}$$

und somit

$$k = \frac{1 - \frac{2a}{v_{A1} - v_{i1}}}{1 - \frac{2a}{v_{A1} - v_{i1}} \left( y_0 - \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \right)} \quad 5.4.2$$

Es muss noch eine Aussage über den Abstand  $a$ , in welcher die gedachte Kanalwand vor der tatsächlichen liegen soll, gemacht werden. Nach Abb.: 5.4.6 muss die Größe  $H$  bei gleicher Geschwindigkeitsverteilung mit größer werdendem Nabenverhältnis  $v_i = r_i/r_a$  kleiner werden. Es muss also  $H \sim (1 - v_i)$  sein. Ein Ausdruck für die Form der Geschwindigkeitsverteilung ist die gemessene Mischungswegkonstante nach Abb.: 5.4.4. Bei Zuspitzung der Geschwindigkeitsverteilung muss der Wert  $H$  gegenüber  $(1 - v_i)$  wieder größer werden,  $H \sim \frac{K}{\kappa}$ .

Fasst man die Glieder zusammen, dann entsteht:

$$H \sim (1 - v_i) \left( 1 + \frac{K}{\kappa} \right)$$

Bei der Auslegung von Axialverdichterstufen hat sich ein Wert für die absolute Wandrauigkeit von  $K = 0,03$  mm als zweckmäßig erwiesen. Damit erhält man für die empirische Beziehung

$$v_{A1} - v_{i1} \approx (1 - v_i) \left( 1 + \frac{0,03}{\kappa} \right) \quad 5.4.28$$

Nach Abb.: 5.4.7 ist aber

$$v_{A1} - 1 = \frac{v_{A1} - v_{i1} - 1 + v_i}{2} = a \quad 5.4.29$$

und damit

$$v_{A1} = 1 + a = 1 + \frac{v_{A1} - v_{i1} - 1 + v_i}{2} \quad 5.4.30$$

$$v_{i1} = v_i - \frac{v_{A1} - v_{i1} - 1 + v_i}{2} \quad 5.4.31$$

Mit Hilfe der Gl.: 5.4.29 erhält der Korrekturfaktor den Ausdruck:

$$k = \frac{1 - 2 \frac{v_{A1} - 1}{v_{A1} - v_i}}{1 - \frac{2(v_{A1} - 1)}{v_{A1} - v_i} \left( y_0 - \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \right)} \quad 5.4.32$$

Entsprechend den gemachten Voraussetzungen muss die Axialgeschwindigkeit korrigiert werden.

$$c_{ax,korr} = k c_{ax} \quad 5.4.33$$

Mit den bisherigen Ausführungen ist es möglich, die in einer Verdichterstufe auftretende Axialgeschwindigkeitsverteilung abzuschätzen.

### 5.5 Der Wirkungsgrad einer Axialverdichterstufe.

Für den Wirkungsgrad eines Stufenelementes einer Axialverdichterstufe galt nach Gl.: 3.4.6 die bekannte Beziehung:

$$\eta_{isE} = 1 - \bar{\varepsilon} \left\{ 2\varphi_{\infty} + \frac{1}{\varphi_{\infty}} \left[ \rho_k^2 + (1 - \rho_k)^2 \right] \right\} \quad 5.5.01$$

mit den Optimalwerten

$$\varphi_{\infty} = 0,5 \quad \text{und} \quad \rho_k = 0,5$$

für den besten Wirkungsgrad des Stufenelementes. Unter einem Stufenelement war ein koaxial zur Verdichterachse gelegter Zylinderschnitt definiert worden. Eine Verdichterstufe selbst besteht aus vielen solchen durch die Beschaukelung gelegten Schnitten, die vom Radius  $r_i$  bis zum Radius  $r_a$ , also über die Schaufelhöhe, aufgefädelt sind. Entsprechend dem in der Stufe gewählten kinematischen Schema ist in der Stufe die Lieferzahl  $\varphi_{\infty}$ , der kinematische Reaktionsgrad  $\rho_k$  und der Gleitwinkel der Profile  $\bar{\varepsilon}$  (der die Verluste enthält) über den Stufenradius variabel. Aus diesem Grunde kann der in einem Stufenelement ermittelte Wirkungsgrad kaum eine Aussage über den Wirkungsgrad einer Verdichterstufe machen. Daraus ist weiterhin zu folgern, dass die für das Stufenelement ermittelten kinematischen Kenndaten für die Verdichterstufe nicht zutreffend sein können. Der isentrope Stufenwirkungsgrad ergibt sich aus den entsprechenden Integralwert über der Schaufelhöhe zu:

$$\eta_{is,St} = \frac{\int_{r_i}^{r_a} dN_{is}}{\int_{r_i}^{r_a} dN_{th}} = \frac{\int_{r_i}^{r_a} \eta_{is} h_{th} dm}{\int_{r_i}^{r_a} h_{th} dm}$$

und mit

$$dm = 2\pi\rho_{axo} r dr$$

$$\eta_{is,St} = \frac{\int_{r_i/r}^{r_a/r} \eta_{is} h_{th} \rho_{axo} \frac{r}{r} d\frac{r}{r}}{\int_{r_i/r}^{r_a/r} h_{th} \rho_{axo} \frac{r}{r} d\frac{r}{r}}$$

Unter dem Integral ist der isentrope Wirkungsgrad des Stufenelementes in Abhängigkeit vom Radienverhältnis einzusetzen. Die theoretische Energieumsetzung im Laufgitter bzw. die Förderhöhe kann eine beliebige Funktion über den Stufenradius sein. Würde man sich bereits auf den einfachen Fall einer über den Radius linear veränderlichen Energiezufuhr an das Gas nach Gl.: 5.1.17 beschränken, könnte der Wert  $K$  beliebige Werte annehmen. Axialverdichterstufen mit über der Schaufelhöhe veränderlicher Energiezufuhr an das Gas werden nur in Sonderfällen, z.B. bei Axialverdichtern für Zweistromstrahltriebwerke und Transsonic-Stufen der Luftfahrt, angewendet. Beschränkt man sich auf den in der Praxis bedeutendsten Fall der Kinematik mit über den Radius der Stufe konstanter Energiezufuhr an das Gas, so folgt mit

$$c_{axo} = \bar{u} \varphi_{\infty} \frac{r}{r}$$

und mit Gl.: 5.5.01:

$$1 - \eta_{is,St} = \frac{\int_{r_i/r}^{r_a/r} \bar{\varepsilon} \left\{ 2\varphi_{\infty}^2 + [\rho_k^2 + (1 - \rho_k)^2] \left( \frac{r}{r} \right)^2 \right\} d\frac{r}{r}}{\int_{r_i/r}^{r_a/r} \varphi_{\infty}^2 \left( \frac{r}{r} \right)^2 d\frac{r}{r}} \quad 5.5.02$$

$1 - \eta_{is,St}$  stellt den absoluten Verlust in der Verdichterstufe dar. Hält man den Gleitwinkel  $\bar{\varepsilon}$  über der Schaufelhöhe konstant, lässt sich der relative Stufenverlust in der Form

$$\frac{1 - \eta_{is,St}}{\bar{\varepsilon}} = \frac{\int_{r_i/r}^{r_a/r} \left\{ 2\varphi_{\infty}^2 + [\rho_k^2 + (1 - \rho_k)^2] \left( \frac{r}{r} \right)^2 \right\} d\frac{r}{r}}{\int_{r_i/r}^{r_a/r} \varphi_{\infty}^2 \left( \frac{r}{r} \right)^2 d\frac{r}{r}} \quad 5.5.03$$

angeben. Diese Gleichung geht für Stufen mit konstanter Axialgeschwindigkeit über der Schaufelhöhe in den von Eckert /27/ und Gut /48/ bekannten Ansatz über:

$$\frac{1 - \eta_{is,St}}{\bar{\varepsilon}} = \frac{2 \int_{\frac{r_i}{\bar{r}}}^{\frac{r_a}{\bar{r}}} \left\{ \varphi_{\infty} + \left[ \rho_k^2 + (1 - \rho_k)^2 \right] \frac{r}{\bar{r}} d \frac{r}{\bar{r}} \right\}}{\left( \frac{r_a}{\bar{r}} \right)^2 - \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^2}$$

Mit Ausnahme des Potentialwirbels ( $q = -1$ ) ist diese Betrachtung für die Praxis uninteressant. Will man alle kinematischen Schemata bei über den Radius konstanter Energieübertragung an das Gas nach Abschnitt 5.1 erfassen, muss auf die Gleichungen 5.5.02 und 5.5.03 zurückgegriffen werden.

Als Bezugsradius soll ein für die Mittelschnittsrechnung günstiger Radius eingeführt werden, der eine einfache mathematische Darstellung der einzelnen Funktionen zulässt. Nach den Untersuchungen über die Bildung strömungstechnischer und thermischer Mittelwerte an einer Turbomaschinenstufe nach Hoffmeister /49/ eignet sich dafür der die Durchströmfläche der Stufe halbierende Radius  $\bar{r}$ . Er steht mit dem Nabenverhältnis der Stufe in folgender Beziehung:

$$\frac{\bar{r}}{r_a} = \bar{v} = \sqrt{\frac{1 + v_i^2}{2}} \quad 5.5.04$$

Dieser Bezugsradius  $\bar{r}$  ist mit dem Kontinuitätsradius  $\hat{r}$  beim kinematischen Schema der konstanten kinematischen Reaktion identisch und liegt bei anderen Drallverteilungen in dessen Nähe.

### 5.5.1 Der relative Stufenverlust.

Der relative Stufenverlust gibt in anschaulicher Weise den Einfluss der Wahl des kinematischen Schemas auf den Wirkungsgrad einer Stufe wieder.

Die Veränderlichkeit des kinematischen Reaktionsgrades über den Radius einer Verdichterstufe erhält man nach den Ausführungen des Abschnittes 5.1 zu:

$$\rho_k = \frac{w_{\infty}}{u} = 1 - \frac{c_{w\infty}}{u} = 1 - (1 - \rho_{kt}) \left( \frac{r}{r_i} \right)^{q-1} \quad 5.5.1.1$$

Oder für das Glied mit den kinematischen Reaktionsgrad in Gl.: 5.5.03:

$$\rho_k^2 - (1 - \rho_k)^2 = 1 - 2(1 - \rho_{kt}) \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{1-q} \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^{q-1} + 2(1 - \rho_{kt})^2 \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{2(1-q)} \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^{2(q-1)} \quad 5.5.1.2$$

Entsprechend den Ausführungen des Abschnittes 3.3 wurde der kinematische Reaktionsgrad Am Innenschnitt der Stufe gewählt, da hier die größten Gitterbelastungen auftreten. Will man sowohl das Laufgitter als auch das Leitgitter einer Stufe aerodynamisch voll auslasten, muss man am Innenschnitt der Stufe einen kinematischen Reaktionsgrad von  $\rho_{kt} = 0,5$  verwirklichen. Lauf- und Leitgitter erhalten dann unter der Voraussetzung homogener Stufen im Verdichter gleiche Gitterbelastungszahlen.

Nach den Ausführungen des Abschnittes 5.1 erhält man für die Lieferzahl in der Ebene  $\infty$  der Stufe den Ausdruck:

$$\varphi_{\infty}^2 = \left\{ \bar{\varphi}_{\infty}^2 + \alpha \frac{q+1}{q} (1 - \rho_{kt})^2 \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{2(1-q)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^{2q} \right] \right\} \left( \frac{\bar{r}}{r} \right)^2 \quad 5.5.1.3$$

Da der Korrekturfaktor nach Schröder praktisch bei der dritten Verdichterstufe den Wert  $\alpha = 1$  aufweist, kann er für die allgemeinen Betrachtungen vernachlässigt werden. Für die



ersten zwei Verdichterstufen ist der Drallverteilungsexponent jedoch so zu korrigieren, dass die Axialgeschwindigkeiten mit und ohne den Schröder'schen Korrekturfaktoren übereinstimmen.

Mit den Gleichungen 5.5.1.2 und 5.5.13 erhält man den relativen Stufenverlust nach der Beziehung 5.5.03:

$$\frac{1 - \eta_{is,St}}{\bar{\varepsilon}} = \frac{2 \int_{r_i/\bar{r}}^{r_a/\bar{r}} \left\{ \bar{\varphi}_\infty^2 + \frac{q+1}{q} (1 - \rho_{ki})^2 \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{2(1-q)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^{2q} \right] \right\} d \frac{r}{\bar{r}}}{\int_{r_i/\bar{r}}^{r_a/\bar{r}} \sqrt{\left\{ \bar{\varphi}_\infty^2 + \frac{q+1}{q} (1 - \rho_{ki})^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^{2q} \right] \right\} \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^2} d \frac{r}{\bar{r}}} + \frac{\int_{r_i/\bar{r}}^{r_a/\bar{r}} \left\{ 1 - 2(1 - \rho_{ki}) \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{1-q} \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^{q-1} + 2(1 - \rho_{ki}) \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{2(1-q)} \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^{2(q-1)} \right\} \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^2 d \frac{r}{\bar{r}}}{\int_{r_i/\bar{r}}^{r_a/\bar{r}} \sqrt{\left\{ \bar{\varphi}_\infty^2 + \frac{q+1}{q} (1 - \rho_{ki})^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^{2q} \right] \right\} \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^2} d \frac{r}{\bar{r}}}$$

oder nach der Integration des Zählers:

$$\frac{1 - \eta_{is,St}}{\bar{\varepsilon}} = \frac{2 \left\{ \bar{\varphi}_\infty^2 \left[ \frac{r_a}{\bar{r}} - \frac{r_i}{\bar{r}} \right] + \frac{q+1}{q} (1 - \rho_{ki})^2 \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{2(1-q)} \left[ \frac{r_a}{\bar{r}} - \frac{r_i}{\bar{r}} - \frac{\left( \frac{r_a}{\bar{r}} \right)^{2q+1} - \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{2q+1}}{2q+1} \right] \right\}}{\int_{r_i/\bar{r}}^{r_a/\bar{r}} \sqrt{\left\{ \bar{\varphi}_\infty^2 + \frac{q+1}{q} (1 - \rho_{ki})^2 \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{2(1-q)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^{2q} \right] \right\} \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^2} d \frac{r}{\bar{r}}} +$$

$$\frac{\frac{1}{3} \left[ \left( \frac{r_a}{\bar{r}} \right)^3 - \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^3 \right] - \frac{2(1 - \rho_{ki})}{q+2} \left[ \left( \frac{r_a}{\bar{r}} \right)^{q+2} - \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{q+2} \right] + \frac{2(1 - \rho_{ki})}{2q+1} \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{2(1-q)} \left[ \left( \frac{r_a}{\bar{r}} \right)^{2q+1} - \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{2q+1} \right]}{\int_{r_i/\bar{r}}^{r_a/\bar{r}} \sqrt{\left\{ \bar{\varphi}_\infty^2 + \frac{q+1}{q} (1 - \rho_{ki})^2 \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{2(1-q)} \left[ 1 - \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^{2q} \right] \right\} \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^2} d \frac{r}{\bar{r}}}$$

#### 5.5.1.4

Geht man mit dem Nabenverhältnis dieser Gleichung auf den Grenzwert  $v_i = 1,0$  über, so muss sie den gleichen Wert für den relativen Stufenverlust liefern, wie sie aus der Gl.: 5.5.01 zu erhalten sind. Damit kann man unmittelbar die Grenzwerte der Gl.: 5.5.1.4 angeben.

$\bar{\varphi}_\infty$	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,2	1,4	1,6
$\frac{1 - \eta_{is,St}}{\bar{\varepsilon}}$	2,266	2,05	2,00	2,033	2,115	2,225	2,356	2,50	2,816	3,175	3,513

Entsprechen den Ausführungen des Abschnittes 3.4 liegt das Minimum der Verluste bei  $\bar{\varphi}_\infty = 0,5$ .

Da die größten Gitterbelastungszahlen in einer Axialverdichterstufe am Innenradius auftreten, ist eine maximale aerodynamische Auslastung der Schaufelgitter und damit größtmögliche Drucksteigerung in der Stufe nur bei einem kinematischen Reaktionsgrad von  $\rho_{ki} = 0,5$  am

Innenschnitt der Stufe möglich (siehe auch Abschnitt 3,3). Die Abhängigkeit des relativen Stufenverlustes von der Lieferzahl  $\bar{\varphi}$  im Mittelschnitt der Stufe ist ähnlich wie bei den Wirkungsgradbetrachtungen eines Stufenelementes und stimmt beim Nabenverhältnis  $v_i = r_i/r_a = 1$  mit diesen überein. Gegenüber den Betrachtungen beim Stufenelement erscheint hier die Abhängigkeit vom Nabenverhältnis der Stufe wie sie grundsätzlich von Eckert /34/ und Gut /48/ für zwei kinematische Spezialfälle bekannt geworden ist und als neuer Gesichtspunkt die Abhängigkeit vom Drallverteilungsexponenten  $q$ , oder anders ausgedrückt vom gewählten kinematischen Schema der Stufe.

Eine weitere Betrachtung des relativen Stufenverlustes, insbesondere hinsichtlich der Optimalwerte, lohnt sich für praktische Belange nicht, da sich durch die über der Schaufelhöhe einer Stufe veränderlichen Verluste die Optimalwerte der Stufenkinematik verändern.

### 5.5.2 Der absolute Stufenverlust.

Der absolute Stufenverlust wurde durch die Gleichung 5.5.02 definiert. Er enthält die unter dem Integral stehende und über den Stufenradius veränderliche Gleitzahl  $c_w/c_f$  der Gitterprofile.

Die Verteilung der Verluste längs der Schaufelhöhe eines geraden Profilgitters bei dreidimensionaler Strömung zeigt die Abb.: 4.2.3 im Prinzip. Die Verluste selbst werden vielfach in der Form des Verlustbeiwertes angegeben:

$$\xi_v = \frac{p_1^* - p_2^*(z)}{\frac{\rho}{2} c_1^2} = \frac{\Delta p}{q_1} \quad 5.5.2.1$$

Die längs der Schaufelhöhe zu den Schaufelenden hin auftretende Vergrößerung der Verluste ist unter Anderem insbesondere durch den Einfluss der Sekundärströmung im Schaufelgitter und der gegenseitigen Beeinflussung zwischen den Grenzschichten am Gitterprofil und an der Strömungskanalbegrenzung bedingt. Bei genügend großen Schaufelhöhen gibt es in der Mitte ein Gebiet, in dem die Strömung von den Randzonen nicht gestört wird. In diesen Gebieten treten die Verluste der ebenen Gitterströmung auf.

Der Verlustbeiwert für ein Gitter einschließlich der Randverluste sei entsprechend der Abb.:4.2.3:

$$\xi_v = \xi_{vE} + \xi_{vR} \quad 5.5.2.2$$

Die Definition des Verlustbeiwertes  $\xi_v$  wird vornehmlich bei Gitteruntersuchungen angewendet während bei der Auslegung von Axialverdichterstufen die Verluste meistens durch den Widerstandsbeiwert  $c_w$  ausgedrückt werden.

Zwischen den Verlustbeiwert  $\xi_v$  und den Widerstandsbeiwert  $c_w$  besteht folgender Zusammenhang:

$$c_w = \frac{W}{ql} = \frac{t \sin \beta_\infty \Delta p^*}{l q_\infty} = \frac{t}{l} \sin \beta_\infty \frac{q_1}{q_\infty} \xi_v \quad 5.5.2.2a$$

Somit kann für die Gl.:5.5.2.2 auch geschrieben werden:

$$c_w = c_{wP} + c_{wR} \quad 5.5.2.3$$

wobei  $c_{wP}$  nach Abschnitt 4.1 in den Grenzen  $0,5 < \frac{t}{l} < 1,5$  bei überkritischer Reynoldszahl und  $c_{wR}$  als Randverlust nach Abschnitt 4.2 gegeben ist.

Für die Untersuchungen soll weiterhin angenommen werden, dass die Spalten zwischen den Profilschaufeln und der Gehäuse- bzw. Nabenwand unendlich klein sind. Diese Vereinfachung wollen wir als zulässig erachten, da es hier weniger auf die absolute Größe der Verluste als vielmehr auf die kinematischen Kenndaten der Stufe, bei denen das Verlustminimum auftritt, ankommt und die Tendenz der Verluste über der Schaufelhöhe durch die angegebenen Gleichungen gegeben ist. Außerdem lässt sich eine Korrektur des absoluten Stufenverlustes nach Abschnitt 4.3 vornehmen. Die Umrechnung der Randverluste nach Gl.: 4.2.3 ergibt;

$$c_{wR} = C_S^{\bar{z}} \left[ \frac{1}{\left(\frac{z}{\delta_1^*}\right) + \frac{K}{e^{z/\delta_1^*}}} - \frac{1}{\left(\frac{b}{\delta_1^*}\right)^n + \frac{K}{e^{b/\delta_1^*}}} \right] \frac{t \sin^3 \beta_\infty}{l \sin^2 \beta_1} \quad 5.5.2.4$$

Für die trigonometrischen Ausdrücke kann man unter Beachtung der Beziehungen zwischen den Funktionen desselben Winkels und den Beziehungen am dimensionslosen Geschwindigkeitsvektordiagramm nach Abb.: 5.1.1 setzen:

$$\sin \beta_\infty = \frac{\frac{\varphi_\infty}{\rho_k}}{\sqrt{\left(\frac{\varphi_\infty}{\rho_k}\right)^2 + 1}} ; \quad \cos \beta_\infty = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\varphi_\infty}{\rho_k}\right)^2 + 1}}$$

$$\sin \beta_1 = \frac{\frac{\varphi_\infty}{\rho_k + \frac{\psi_{th}}{4}}}{\sqrt{\left(\frac{\varphi_\infty}{\rho_k + \frac{\psi_{th}}{4}}\right)^2 + 1}}$$

Für das Leitgitter ist an Stelle des kinematischen Reaktionsgrades der Ausdruck  $(1 - \rho_k)$  zu setzen.

Der im Randverlust enthaltene dimensionslose Abstand vom Außenradius bzw. von der Nabenwand enthält noch das Seitenverhältnis der Profilvergitter. Legt man in den Verdichterstufen ein Seitenverhältnis von

$$\frac{h}{l} = 7 \left( 1,1 - \sqrt{\frac{1 + v_i^2}{2}} \right) \quad 5.5.2.5$$

zugrunde, so kann man den dimensionslosen Abstand von den Seitenwänden auf die Radienverhältnisse der Verdichterstufe beziehen.

Für den dimensionslosen Abstand vom Außenradius gilt:

$$\frac{z}{\delta_1^*} = (1 - \nu) \frac{7 \left( 1,1 - \sqrt{\frac{1 + v_i^2}{2}} \right)}{\frac{\delta_1^*}{l} (1 - \nu_i)} \quad 5.5.2.6$$

und für den dimensionslosen Abstand von der Nabenwand:

$$\frac{z}{\delta_1^*} = (v - v_i) \frac{7 \left( 1,1 - \sqrt{\frac{1 + v_i^2}{2}} \right)}{\frac{\delta_1^*}{l} (1 - v_i)} \quad 5.5.2.7$$

Um eine allgemeingültige Aussage zu erhalten, wird nach den Ausführungen des Abschnittes 4.2 der Wert  $\frac{\delta_1^*}{l} = 0,04$  verwendet. Durch Einsetzen der Gl.: 4.2.4 in die Gl.: 5.5.2.4 sind somit alle Voraussetzungen zur Ermittlung des Widerstandsbeiwertes für die Randverluste gegeben.

Die Gleitzahl eines Profilvergitters erhält man, wenn man die Anteile der Widerstandsbeiwerte durch den Zirkulationsbeiwert dividiert.

$$\varepsilon = \frac{c_w}{c_\Gamma} \quad 5.5.2.8$$

Dabei wurde der geringfügige Einfluss des Widerstandsbeiwertes auf den Auftriebsbeiwert vernachlässigt. Das hat den Vorteil, dass sich der Zirkulationsbeiwert durch rein kinematische Größen einer Verdichterstufe darstellen lassen. Weiterhin soll die Betrachtungsweise einer homogenen Verdichterstufe angewendet werden die so definiert ist, dass das dem Laufgitter nachfolgende Leitgitter die Strömung in jedem koaxial gelegten Zylinderschnitt wieder auf die Eintrittswinkel zum Laufgitter zurück dreht und vor Eintritt in die nächste Stufe die gleichen kinematischen Verhältnisse herrschen wie nach Austritt der betrachteten Stufe.

Für den Zirkulationsbeiwert des Laufgitters gilt dann:

$$\frac{c_{\Gamma R}}{\left(\frac{t}{l}\right)_R} = \frac{\psi_{th}}{\varphi_\infty} \sin \beta_\infty = \frac{\psi_{th}}{\sqrt{\rho_k^2 + \varphi_\infty^2}} \quad 5.5.2.9$$

und analog für den Zirkulationsbeiwert des Leitgitters:

$$\frac{c_{\Gamma St}}{\left(\frac{t}{l}\right)_{St}} = \frac{\psi_{th}}{\sqrt{(1 - \rho_k)^2 + \varphi_\infty^2}} \quad 5.5.2.9a$$

Über die Bedeutung der theoretischen Druckzahl gibt die Abb.: 5.1.1 Auskunft. Setzt man konstante Energieübertragung an das Gas über den Radius des Laufgitters voraus, gilt:

$$\psi_{th} = \psi_{thi} \frac{\left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^2}{\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2} \quad 5.5.2.10$$

Die Lieferzahlverteilung über den Radius der Stufe ist durch Gl.:5.5.1.3 gegeben. Zur Vereinfachung der Schreibweise für die nachfolgenden Beziehungen sollen folgende Abkürzungen verwendet werden:

$$F = \frac{q+1}{q} (1 - \rho_{ki})^2 \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^{2(1-q)} \left[ 1 - \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^{2q} \right] \quad 5.5.2.11$$

$$F_a = \frac{q+1}{q} (1 - \rho_{ki})^2 \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^{2(1-q)} \left[ 1 - \left(\frac{r_a}{\bar{r}}\right)^{2q} \right] \quad 5.5.2.11a$$

$$F_i = \frac{q+1}{q} (1 - \rho_{ki})^2 \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^{2(1-q)} \left[ 1 - \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^{2q} \right] \quad 5.5.2.11b$$

Unter Berücksichtigung der Gl.: 5.5.1.1 gilt für den Zirkulationsbeiwert des Laufgitters:

$$c_{\Gamma R} = \frac{2 \frac{\Psi_{thi}}{2} \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^2}{\left(\frac{t}{l}\right)_R \frac{\bar{r}}{\bar{r}} \sqrt{\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2 \left[1 - (1 - \rho_{ki}) \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^{1-q} \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^{q-1} + \bar{\varphi}_\infty^2 + F\right]}} \quad 5.5.2.12$$

Für den Zirkulationsbeiwert des Leitgitters kann geschrieben werden:

$$c_{\Gamma St} = \frac{2 \frac{\Psi_{thi}}{2} \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^2}{\left(\frac{t}{l}\right)_{St} \frac{\bar{r}}{\bar{r}} \sqrt{(1 - \rho_{ki})^2 \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^{2(1-q)} \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^{2q} + \bar{\varphi}_\infty^2 + F}} \quad 5.5.2.13$$

Bei der Auslegung der Beschauelung von Axialverdichtern werden, wenn dem keine zwingenden Gründe entgegenstehen, die Sehnenlängen der Gitterprofile über den Radius konstant ausgeführt. Abweichungen hiervon können bei sehr kleinen Nabenverhältnissen  $\nu_i$  vorkommen. Bei konstanter Sehnenlänge der Profile über den Radius einer Stufe lässt sich mit dem Teilungsverhältnis

$$\frac{t}{l} = \left(\frac{t}{l}\right)_i \frac{\bar{r}}{r_i} \frac{r}{\bar{r}} \quad 5.5.2.14$$

leicht der Zirkulationsbeiwert angeben. Für den Außenschnitt des Laufgitters gilt dann:

$$c_{\Gamma aR} = \frac{2 \frac{\Psi_{thi}}{2} \frac{r_i}{\bar{r}} \left(\frac{t}{l}\right)_{iR}}{\sqrt{\left(\frac{r_a}{\bar{r}}\right)^2 \left[1 - (1 - \rho_{ki}) \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^{1-q} \left(\frac{r_a}{\bar{r}}\right)^{q-1}\right]^2 + \bar{\varphi}_\infty^2 + F_a}} \quad 5.5.2.15$$

und für den Nabenschnitt des Laufgitters:

$$c_{\Gamma iR} = \frac{2 \frac{\Psi_{thi}}{2} \frac{r_i}{\bar{r}} \left(\frac{t}{l}\right)_{iR}}{\sqrt{\rho_{ki}^2 \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^2 + \bar{\varphi}_\infty^2 + F_i}} \quad 5.5.2.16$$

Die hierfür analogen Zirkulationsbeiwerte des Leitgitters sind:

Für den Außenradius

$$c_{\Gamma aSt} = \frac{2 \frac{\Psi_{thi}}{2} \frac{r_i}{\bar{r}} \left(\frac{t}{l}\right)_{iSt}}{\sqrt{(1 - \rho_{ki})^2 \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^{2(1-q)} \left(\frac{r_a}{\bar{r}}\right)^{2q} + \bar{\varphi}_\infty^2 + F_a}} \quad 5.5.2.17$$

und für den Innenradius

$$c_{\Gamma iSt} = \frac{2 \frac{\Psi_{thi}}{2} \frac{r_i}{\bar{r}} \left(\frac{t}{l}\right)_{iSt}}{\sqrt{(1 - \rho_{ki})^2 \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^2 + \bar{\varphi}_\infty^2 + F_i}} \quad 5.5.2.18$$

Um die Gleitzahlen für das Lauf- und Leitgitter einer Axialverdichterstufe bestimmen zu

können, muss noch eine Aussage über die in einer Stufe anzuwendenden theoretische Druckzahl und über das Teilungsverhältnis der Profiligitter gemacht werden. Beide Größen dürfen nicht frei und unabhängig voneinander gewählt werden. Zur Erreichung eines großen Stufendruckverhältnisses ist man bemüht, den Wert  $\psi_{th}$  möglichst groß zu wählen. Neben dem Vorteil eines großen Stufendruckverhältnisses erhält man gleichzeitig einen größeren Betriebsbereich des Verdichters da sich mit größer werdender Druckzahl das Teillastverhalten der Stufe verbessert. Bei größeren Nabenvhältnissen  $v_1$  und größeren Umfangsgeschwindigkeiten am Innenradius eines Laufgitters können sich nach der Euler'schen Turbinengleichung Energieübertragungen an das Gas ergeben, die das Maß der zulässigen Gitterbelastungszahlen überschreiten oder für die Praxis zu kleine Teilungsverhältnisse der Profiligitter ergeben. In diesen Fällen muss die zulässige Druckzahl  $\psi_{th}$  nach bekannten Gitterbelastungszahlen begrenzt werden. Für die Begrenzung der theoretischen Druckzahl sollen die in Abschnitt 3.5 angegebenen, auf die Austrittsgeschwindigkeit aus dem Gitter bezogenen und vom Teilungsverhältnis der Schaufelgitter abhängigen Gitterbelastungszahlen von Howell /10/ verwendet werden. Alle diese Werte können durch die Beziehung

$$\frac{c_{r2}}{t/l} = \frac{(t/l - 1,61)^2}{1,3} + 0,85 \quad 5.5.2.19$$

erfasst werden. Rechnet man die Gitterbelastungszahl nach der G.: 5.5.2.9 mit der Beziehung

$$c_r = c_{r2} \frac{\sin^2 \beta_\infty}{\sin^2 \beta_2}$$

um, so erhält man mit den dimensionslosen Kennziffern einer Axialverdichterstufe den Ausdruck:

$$\frac{c_{r2}}{t/l} = \frac{2\sqrt{\rho_k^2 + \varphi_\infty^2} \frac{\psi_{th}}{2}}{\rho_k^2 - \rho_k \frac{\psi_{th}}{2} + \frac{1}{4} \left( \frac{\psi_{th}}{2} \right)^2 + \varphi_\infty^2} \quad 5.5.2.20$$

Da die Gleichungen 5.5.2.19 und 5.5.2.20 identisch sein müssen. Ergibt sich eine quadratische Gleichung für die zulässige theoretische Druckzahl der Stufe zu:

$$\left( \frac{\psi_{th}}{2} \right)^2 - 4 \frac{\psi_{th}}{2} \left[ \rho_k + \frac{2\sqrt{\rho_k^2 + \varphi_\infty^2}}{\frac{(t/l - 1,61)^2}{1,3} + 0,85} \right] + 4(\rho_k^2 + \varphi_\infty^2) = 0$$

mit der Lösung:

$$\frac{\psi_{th}}{2} = 2 \left[ \rho_k + \frac{2\sqrt{\rho_k^2 + \varphi_\infty^2}}{\frac{(t/l - 1,61)^2}{1,3} + 0,85} \right] - \sqrt{4 \left[ \rho_k + \frac{2\sqrt{\rho_k^2 + \varphi_\infty^2}}{\frac{(t/l - 1,61)^2}{1,3} + 0,85} \right]^2 - 4(\rho_k^2 + \varphi_\infty^2)} \quad 5.5.2.21$$

Da sich unter der Voraussetzung konstanter Energieübertragung an das Gas über den Radius der Stufe an den Nabenschnitten die größten Belastungen ergeben, wird die Gl.: 5.5.2.21 entsprechend auf den Nabenschnitt der Stufe angewendet.

Mit

$$\varphi_{\infty i}^2 = \left[ \bar{\varphi}_{\infty}^2 + F_i \left( \frac{\bar{r}}{r_i} \right)^2 \right]$$

folgt dann:

$$\frac{\psi_{thi}}{2} = 2 \left[ \rho_{ki} + \frac{2 \sqrt{\rho_{ki}^2 + \left[ \bar{\varphi}_{\infty}^2 + F_i \left( \frac{\bar{r}}{r_i} \right)^2 \right]}}{\left[ \left( \frac{t}{l} \right)_i - 1,61 \right]^2 + 0,85} \right] - 4 \left[ \rho_{ki} + \frac{2 \sqrt{\rho_{ki}^2 + \left[ \bar{\varphi}_{\infty}^2 + F_i \left( \frac{\bar{r}}{r_i} \right)^2 \right]}}{\left[ \left( \frac{t}{l} \right)_i - 1,61 \right]^2 + 0,85} \right] - 4 \left[ \rho_{ki}^2 + \left( \bar{\varphi}_{\infty} + F_i \right) \left( \frac{\bar{r}}{r_i} \right)^2 \right] \quad 5.5.2.22$$

Mit Hilfe dieser Beziehung ergibt sich eine ganz eindeutige Zuordnung der theoretischen Druckzahl zu der Kinematik und dem zu wählenden Teilungsverhältnis eines Schaufelgitters am Nabenschnitt einer Stufe.

Bei Axialverdichtern mit kleinen Nabenverhältnissen, wo die Umfangsgeschwindigkeiten der Laufgitter gegenüber denen am Außenradius klein sind, werden die zulässigen Gitterbelastungszahlen nicht erreicht. Die Größe der zulässigen Druckzahl hängt dann von den Stabilitätskriterien des Abschnittes 3.3 ab. Gesunde Strömungsverhältnisse sind bei reibungsfreier Strömung zu erwarten, solange  $\psi_{th} < 2$  ist. Wählt man in diesem Falle eine zweckmäßige theoretische Druckzahl am Innenradius einer Stufe, so erhält man das größte zulässige Teilungsverhältnis des Schaufelgitters durch die Umrechnung der Gl.: 5.5.2.20 auf die Strömungsebene Unendlich der Stufe und durch Gleichsetzen mit der Gl.: 5.5.2.9a für das Laufgitter zu:

$$\left( \frac{t}{l} \right)_{iR}^2 - 3,22 \left( \frac{t}{l} \right)_{iR} + 2,59 - 1,105 - \frac{2,6 \frac{\psi_{thi}}{2} \sqrt{\rho_{ki}^2 + \varphi_{\infty i}^2}}{\left( \rho_{ki} - \frac{\psi_{thi}}{4} \right)^2 + \varphi_{\infty i}^2} = 0$$

bzw.:

$$\left( \frac{t}{l} \right)_{iR} = 1,61 - \frac{2,6 \frac{\psi_{thi}}{2} \sqrt{\rho_{ki}^2 + \left( \bar{\varphi}_{\infty}^2 + F_i \right) \left( \frac{\bar{r}}{r_i} \right)^2}}{\left( \rho_{ki} - \frac{\psi_{thi}}{4} \right)^2 + \left( \bar{\varphi}_{\infty}^2 + F_i \right) \left( \frac{\bar{r}}{r_i} \right)^2} - 1,105 \quad 5.5.2.23$$

und für das Leitgitter:

$$\left( \frac{t}{l} \right)_{iSt} = 1,61 - \frac{2,6 \frac{\psi_{thi}}{2} \sqrt{(1 - \rho_{ki})^2 + \left( \bar{\varphi}_{\infty}^2 + F_i \right) \left( \frac{\bar{r}}{r_i} \right)^2}}{\left[ (1 - \rho_{ki}) - \frac{\psi_{thi}}{2} \right]^2 + \left( \bar{\varphi}_{\infty}^2 + F_i \right) \left( \frac{\bar{r}}{r_i} \right)^2} - 1,105 \quad 5.5.2.24 \quad 109$$

Damit sind alle Größen zur Bestimmung der mit Gl.: 5.5.2.8 angegebenen Gleitzahl bekannt. Die Auswertung der Gl.: 5.5.02 für den absoluten Stufenverlust unter Verwendung der Gleichungen 5.5.1.2 und 5.5.13 sowie unter Beachtung von

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_R + \varepsilon_{St}}{2}$$

und den Gleichungen 5.5.12 bis 5.5.24 erfolgte mit einem Rechenautomaten. Entsprechend den Erfordernissen der Praxis wurden noch folgende Bedingungen eingeführt:

a) Da nach Abschnitt 3.3 die theoretische Druckzahl für reibungsfreie Strömung den Wert  $\psi_{th\max} = 2$  nicht überschreiten darf und der maximal zulässige Wert bei Reibungsbehafteter Strömung nicht bekannt ist, wird er mit der in der Praxis erprobten Größe  $\psi_{th} \leq 1,7$  am Nabenschnitt der Verdichterstufen begrenzt.

b) Das Teilungsverhältnis der Profilhüter sei am Nabenschnitt mit  $\left(\frac{t}{l}\right)_{\min} = 0,6$  begrenzt. Dadurch werden einerseits die Verluste entsprechend der Abb.: 4.1.1 in tragbaren Grenzen gehalten und andererseits der Querschnitt zwischen zwei benachbarten Schaufelprofilen, der für das Machzahlverhalten mit verantwortlich ist, nicht zu stark verengt.

c) Bei zu großen Teilungsverhältnissen der Schaufelhüter an den Außenradien würde man nach Abb.: 4.1.1 zu große Verluste und damit zu schlechte Stufenwirkungsgrade erhalten. Aus diesem Grunde wird das Teilungsverhältnis des Profilhüters am Außenradius, mit Ausnahme jenes für das Nabenverhältnis  $v_i = 0,3$ , mit  $\left(\frac{t}{l}\right)_a = 1,5$  begrenzt. Für das Nabenverhältnis  $v_i = 0,3$  ergibt sich bei  $\left(\frac{t}{l}\right)_i = 0,6$  am Innenschnitt schon ein Teilungsverhältnis von  $\left(\frac{t}{l}\right)_a = 2,0$  am Außenradius der Stufe, wenn man die Sehnenlängen der Schaufelprofile über den Radius konstant hält. Für diese Betrachtungen mag die Festlegung dieser beiden Teilungsverhältnisse genügen, da die Mehrzahl der in der Praxis vorkommenden Fälle erfasst werden. Dagegen würde man bei der praktischen Stufenauslegung für den Fall  $v_i = 0,3$  eine über den Radius der Stufe variable Sehnenlänge der Profile wählen.

d) Die Sehnenlänge der Profile sei über den Stufenradius konstant.

e) Analog zu den Ausführungen des Abschnittes 3.4 sei der kinematische Reaktionsgrad am Innenradius der Stufe von  $\rho_{ki} = 0,5$  gewählt.

Die Ergebnisse der Auswertung der Gleichungen für den absoluten Stufenverlust sind anschaulich auf der Abb.: 5.5.2.1 dargestellt.

Die Abbildungen 5.5.2.2 und 5.5.2.3 zeigen die aus Abb.: 5.5.2.1 herausgegriffenen Ebenen für das kinematische Schema des Potentialwirbels ( $q = -1$ ) und der konstanten kinematischen Reaktion ( $q = +1$ ). Wie die Abbildungen zeigen, treten die Verlustminima beim absoluten Stufenverlust bei Lieferzahlen auf, mit kleiner werdenden Nabenverhältnis zunächst eine steigende Tendenz haben um dann wieder zu kleineren Werten für die Lieferzahlen am Mittelschnitt der Stufe überzugehen (Abb.: 5.5.2.2). Beim Verlauf des absoluten



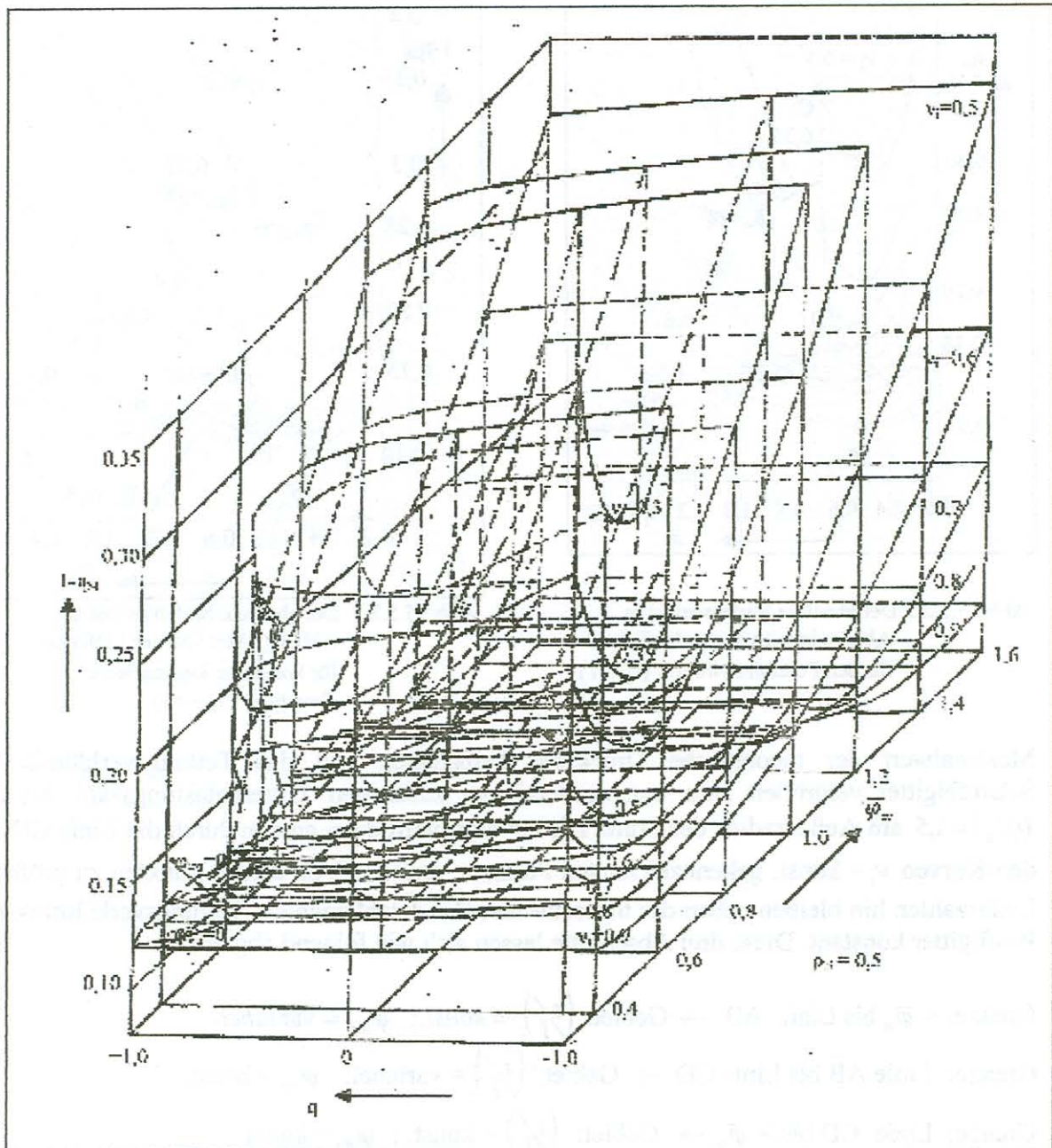


Abb.: 5.5.2.1 Absoluter Stufenverlust in Abhängigkeit vom Drallverteilungsexponenten, der Lieferzahl am Kontinuitätsradius und dem Radienverhältnis der Stufe.

Stufenverlustes in Abhängigkeit von der Lieferzahl fallen bei der Abbildung 5.5.2.2 und 5.5.2.3 besonders die Knickstellen auf. Diese sind durch die unter c) bezüglich des Teilungsverhältnisses der Profiligitter gemachten Voraussetzungen begründet. Anhand der Abb.:5.5.2.3 lassen sich die Verhältnisse übersichtlich zeigen. Entlang der Linien  $v_i = konst.$  von kleinen Lieferzahlen  $\bar{\varphi}_s$  beginnend bis zur Kurve AB sind die Teilungsverhältnisse der Profiligitter an den Innenradien mit  $(t/l)_i = 0,6$  konstant gehalten worden. Entsprechend den zulässigen Gitterbelastungszahlen ändert sich die zulässige Druckzahl am Innenradius der Stufe bis zu den unter a) gemachten Maximalwert, der an den durch die Kurve AB gekennzeichneten Knickstellen erreicht wird. Entlang den Kurven  $v_i = konstant$  zwischen den durch die Linien AB und CD gekennzeichneten Punkten wird der

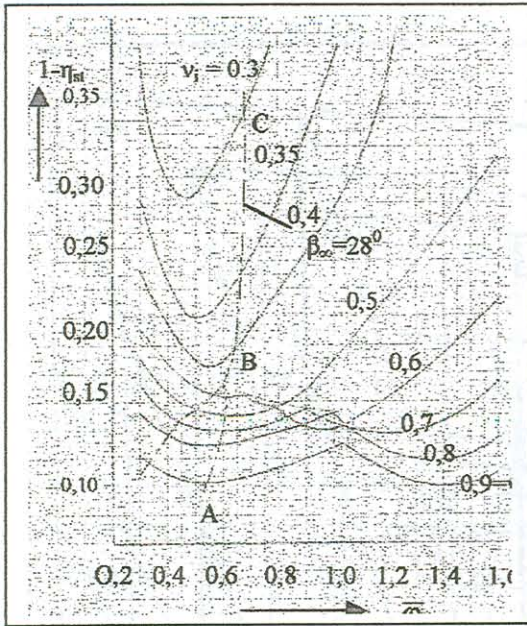


Abb.: 5.5.2.2 Der absolute Stufenverlust in Abhängigkeit von der Lieferzahl für den Potentialwirbel ( $q=-1$ ).

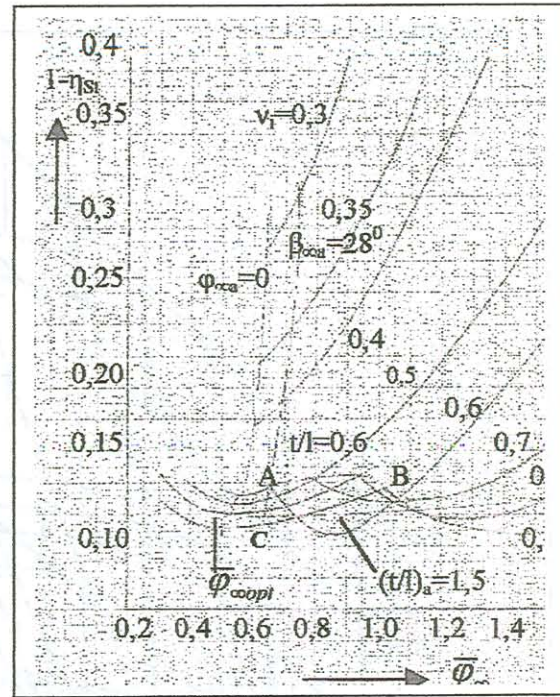


Abb.: 5.5.2.3 Der absolute Stufenverlust in Abhängigkeit von der Lieferzahl für konstante kinematische Reaktion ( $q=+1$ )

Maximalwert der theoretische Druckzahl beibehalten und das Teilungsverhältnis der Schaufelgitter vergrößert sich entsprechend der zulässigen Gitterbelastungszahl bis auf  $(t/l_a)=1,5$  am Außenradius der Stufe. Dieser Wert wird dann an den durch die Linie CD auf den Kurven  $v_i = \text{konst.}$  gekennzeichneten Punkten erreicht. Von diesen Punkten zu größeren Lieferzahlen hin bleiben neben der theoretischen Druckzahl auch die Teilungsverhältnisse der Profiligitter konstant. Diese drei Abschnitte lassen sich wie folgend abgrenzen:

Grenze:  $< \bar{\varphi}_\infty$  bis Linie AB  $\rightarrow$  Gebiet:  $(t/l)_i = \text{konst.}; \psi_{thi} = \text{variabel.}$

Grenze: Linie AB bis Linie CD  $\rightarrow$  Gebiet:  $(t/l)_i = \text{variabel}; \psi_{thi} = \text{konst.}$

Grenze: Linie CD bis  $> \bar{\varphi}_\infty$   $\rightarrow$  Gebiet:  $(t/l)_i = \text{konst.}; \psi_{thi} = \text{konst.}$

Diese Abschnitte gelten auch für alle anderen Drallverteilungsexponenten  $q$ , bei denen sich gegenüber der Abb.: 5.5.2.3 lediglich die Linien AB und CD zu anderen Lieferzahlen  $\bar{\varphi}_\infty$  verschieben. Bei den Kurvenzügen  $v_i = 0,3; 0,35; 0,4$  und  $0,5$  der Abb.: 5.5.2.3 treten diese Knickstellen, gekennzeichnet durch die Linie AB, nicht auf, da hier die maximal zulässigen Gitterbelastungszahlen nicht erreicht werden und die maximalen Werte der theoretischen Druckzahl und die Teilungsverhältnisse der Profiligitter nach denn Voraussetzungen a) und c) bei allen Lieferzahlen konstant sind. In die Abb.: 5.5.2.3 wurde die Grenze  $\varphi_{\infty a} = 0$  eingetragen. Sie schließt die bei den kleinen Lieferzahlen  $\bar{\varphi}_\infty$  liegenden Minima des Stufenverlustes für Stufen mit kleinen Nabenverhältnissen in der Nähe des Drallverteilungsexponenten  $q = +1,0$  aus den Betrachtungen aus.

Die Grenze  $\varphi_{\infty a} = 0$  besagt für die Praxis, dass die Staffelungswinkel bei Profiligittern am Außenschnitt der Stufen den Wert Null haben müssten. Dies ist eine Forderung, die sich an einer auszuführenden Verdichterstufe nicht erfüllen lässt. Daraus ergibt sich unmittelbar die Frage nach einem zweckmäßigen Staffelungswinkel am Außenradius einer Stufe. Bei den Betrachtungen der Verluste im Profiligitter (siehe hierzu den Hauptabschnitt „Das Profiligitter“) zeigt sich, dass mit kleiner werdenden Staffelungswinkel der Gitterprofile der zulässige Stoßwinkelbereich (Abweichungen von der aerodynamisch stoßfreien Anströmung der Profile) beträchtlich eingeengt wird. Mit zunehmenden Anströmmachzahlen bis zu Werten, wie sie in den ersten Stufen hochbelasteter Axialverdichter vorkommen, können die zulässigen Stoßwinkelbereiche der Gitterprofile weiterhin beträchtlich eingeengt werden. Da man den grenzschichtbedingten Abfall der Geschwindigkeiten an der inneren und äußeren Kanalwand einer Verdichterstufe beim derzeitigen Stand des Wissens noch nicht genau erfassen kann, muss man bei der theoretischen Abschätzung der Profiligitter, besonders an den Außenradien, diesen einen gewissen zulässigen Stoßwinkelbereich zubilligen. Bei größeren Anströmmachzahlen hat sich in der Praxis ein Wert von  $\beta_T \approx \beta_\infty \approx 28^\circ$  für den Staffelungswinkel gut bewährt. Setzt man mit guter Näherung

$$\tan \beta_{\infty a} = \frac{\varphi_{\infty a}}{\rho_{ka}}$$

gleich dem Tangens des Staffelungswinkels der Gitterprofile, so lassen sich in Abhängigkeit vom Drallverteilungsexponenten  $q$  und den Nebenverhältnissen  $v_i$  der Stufen jene Lieferzahlen  $\bar{\varphi}_\infty$  am Mittelschnitt bestimmen, die dem gewählten Staffelungswinkel am Außenradius der Stufe entsprechen. Mit

$$\varphi_{\infty a}^2 \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^2 = \bar{\varphi}_\infty^2 + \frac{q+1}{q} (1-\rho)^2 \left[ 1 - \left( \frac{r_a}{\bar{r}} \right)^{2q} \right]$$

und

$$\varphi_{\infty a} = \rho_{ka} \tan \beta_{\infty a}$$

sowie unter Verwendung der Gl.: 5.5.1.1 erhält man:

$$\bar{\varphi}_\infty^2 = \left\{ \left[ 1 - (1-\rho_{ki}) \left( \frac{r_a}{\bar{r}} \right)^{q-1} \right] \tan \beta_{\infty a} \right\}^2 \left( \frac{r_a}{\bar{r}} \right)^2 - \frac{q+1}{q} \frac{(1-\rho_{ki})^2}{\left( \frac{\bar{r}}{r_i} \right)^{2(1-q)}} \left[ 1 - \left( \frac{r_a}{\bar{r}} \right)^{2q} \right]$$

Die Auswertungen dieser Beziehung für den Winkel  $\beta_{\infty a} = 28^\circ$  sind auch in den Abbildungen 5.5.2.2 und 5.5.2.3 eingezeichnet.

Die Abb.: 5.5.2.4 zeigt unter Berücksichtigung der gemachten Einschränkungen hinsichtlich des Staffelungswinkels jene Lieferzahlen  $\bar{\varphi}_\infty$ , bei denen in den einzelnen Ebenen  $q = \text{konst.}$  der Abb.: 5.5.2.1 kleinste Stufenverluste auftreten. Als zweckmäßigste Lieferzahl  $\bar{\varphi}_\infty$  für die Auslegung von Axialverdichterstufen in den Ebenen  $q = \text{konst.}$  werden jene angesehen, die sich durch die Schnittpunkte der Kurven ABC (Abb.: 5.5.2.2) mit den Kurven  $v_i = \text{konst.}$  ergeben.

Auf Abb.: 5,5,2,2 kann festgestellt werden, dass die rechts der Linie AB liegenden Minima der absoluten Stufenverluste kleinere Werte aufweisen als die links der Kurve Ab bei kleineren Lieferzahlen  $\bar{\varphi}_\infty$  liegenden Minima. Die Ursache ist in der Belastung und den damit zusammenhängenden Verlusten zu suchen. Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn man die Gleichung des Wirkungsgrades eines Stufenelementes in der Form des Stufenverlustes

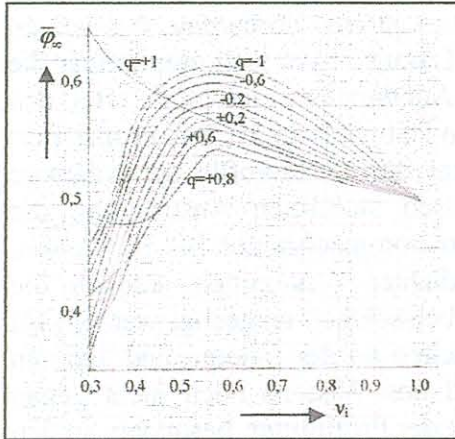


Abb.: 5.5.2.4 Optimale Lieferzahlen  $\bar{\varphi}_\infty$  in Abhängigkeit vom Nabenverhältnis  $v_i$  mit den Drallverteilungsexponenten  $q$  als Parameter.

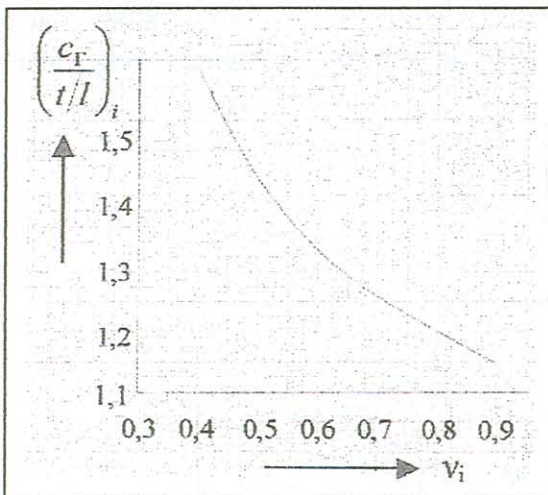


Abb.: 5.5.2.5 Gitterbelastungszahlen in Stufen mit Näherungsweise bestem Wirkungsgrad ( $\rho_k = 0,5$ )

$$1 - \eta_{isSt} = \frac{c_w f\left(\frac{c_r}{t/l}; \frac{t}{l}\right)}{\left[\frac{c_r}{t/l} f\left(\frac{t}{l}\right)\right] \frac{t}{l}} \left\{ \varphi_\infty + \frac{1}{\varphi_\infty} [\rho_k^2 - (1 - \rho_k)^2] \right\}$$

angibt. Der Faktor in der geschweiften Klammer ist dabei für die Werte des relative Stufenverlustes und das Produkt beider Faktoren für die Werte des absoluten Stufenverlustes verantwortlich. Der erste Faktor dieser Beziehung gibt den mittleren Gleitwinkel an den Gitterprofilen wieder. Da die Gitterbelastungszahl eine Funktion des

Teilungsverhältnisses der Gitterprofile und der Widerstandsbeiwert wiederum eine Funktion der Gitterbelastungszahl und des Teilungsverhältnisses ist, genügt zur Kennzeichnung der

interessierenden Minima der Abb.: 5.5.2.3 die Bestimmung der an diesen Stellen auftretenden Gitterbelastungszahlen. Die erfolgte Auswertung zeigt, dass alle auf die Austrittsgeschwindigkeit bezogenen Gitterbelastungszahlen an den Innenradien der Profilvergitter auf eine vom Nabenverhältnis abhängige Kurve zusammenfallen und unabhängig vom Drallverteilungsexponenten  $q$  sind.

Die Abb.: 5.5.2.5 zeigt diese interessanten Auswertungsergebnisse. Die den

Gitterbelastungszahlen zugeordneten Teilungsverhältnisse der Gitterprofile können aus der Gl.: 5.5.2.19 bzw. 5.5.2.23 ermittelt werden. Weitere Ausführungen zu diesen Abschnitt könnender Quelle /50/ entnommen werden.

## 5.6 Zur Wahl der Stufenkinematik.

### 5.6.1 Allgemeine Grundsätze

Die Stufen von Axialverdichtern werden allgemein, sofern keine anderen zwingenden Gründe entgegenstehen, mit über den Stufenradius konstanter Energiezufuhr an das Gas ausgelegt. Aus dieser Voraussetzung werden auf Grund der Euler'schen Turbinengleichung die Profilvergitter an den Nabenschnitten am stärksten belastet. Die Belastung der Lauf- und Leitgitters kann mit einem kinematischen Reaktionsgrad von  $\rho_{ki} = 0,5$  am Innenradius einer Stufe annähernd gleich und maximal groß gehalten werden. Solange die maximale Gitterbelastung am Innenradius nicht erreicht wird,

Was bei Axialverdichterstufen mit kleinen Nabenverhältnissen auftreten kann, ist die Größe der Energieumsetzung im Laufgitter von der maximalen Druckzahl und der Umfangsgeschwindigkeit am Innenradius der Stufe abhängig. Wie die Beziehung

$$h_{th} = \psi_{th} \frac{u^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} RT_1^* \left[ \left( \frac{p_2^*}{p_1^*} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \quad 5.6.1.1$$

zeigt, ist die Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters die entscheidende Größe zur Erhöhung des Stufendruckverhältnisses. Soll eine gesunde Umströmung der Gitterprofile vorausgesetzt werden, so ist nach Abschnitt 3.3 die Bedingung

$$\psi_{th} < 2$$

einzuhalten.

Umfangsgeschwindigkeit, Axialgeschwindigkeit, Drallverteilungsexponent und Energieumsetzung in einer Verdichterstufe stehen in einer bestimmten Wechselbeziehung zueinander, wenn an den Gitterprofilen bestimmte Anströmmachzahlen eingehalten werden sollen. Die Abb.: 1.18 zeigt z.B. die Abhängigkeit der Anströmmachzahlen des Lauf- und Leitgitters am Innen- und Außenradius einer Axialverdichterstufe vom Drallverteilungsexponenten. Der kinematische Reaktionsgrad wurde zur Erreichung annähernd gleicher Gitterbelastungszahlen des Lauf- und Leitgitters am Innenradius mit  $\rho_{kt} = 0,5$  angesetzt. Es zeigt sich, dass die Anströmmachzahlen an den Profilen des Leitgitters am inneren und äußeren Radius immer kleiner sind als die Anströmmachzahlen der Profile des Laufgitters. Neben der annähernd gleichmäßigen Auslastung des Lauf- und Leitgitters am Innenradius kann bei einer derartigen Auslegung einer Axialverdichterstufe die Erfahrungstatsache, dass ein rotierendes Gitter auf Grund der Grenzschichtabschleuderung an den Profilschaufeln eine höhere Anströmmachzahl bei gesunder Umströmung vertragen kann als ein stehendes Gitter, ausgenutzt werden. Die Abb.: 1.18 lässt auch erkennen, dass die Anströmmachzahlen des Laufgitters am Außenradius mit abnehmenden Drallverteilungsexponenten  $q$  stark ansteigt, während sie sich am Innenradius verringert. Der Schnittpunkt der Kurven  $M_{wa}$  und  $M_{wi}$  ergibt den Drallverteilungsexponenten  $q$ , bei dem über den Stufenradius eine annähernd konstante Anströmmachzahl der Profile vorhanden ist. Es ist jedoch günstiger, die Machzahlen am Außenradius etwas größer zu halten als man Innenradius da dünnere Profile mit kleineren Wölbungswinkeln unempfindlicher gegen hohe Anströmmachzahlen sind als dickere mit größeren Wölbungswinkeln und letztere aus Festigkeits- und Stufenauslastungsgründen am Innenradius zur Anwendung kommen. Würde man die erste Stufe eines Axialverdichters unter Einhaltung einer vorgeschriebenen maximalen Anströmmachzahl des Laufgitters nach dem kinematischen Schema des Potentialwirbels oder der konstanten kinematischen Reaktion auslegen, so würde die strömungstechnisch optimale Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters nicht erreicht werden. Dies gilt sowohl für Axialverdichterstufen mit optimalen Wirkungsgrad als auch für Axialverdichtergrenzleistungsstufen. Unter Grenzleistungsstufen sollen dabei jene verstanden werden, bei denen unabhängig von Wirkungsgradbetrachtungen unter Vorgabe maximal zulässiger Anströmmachzahlen für den Innen- und Außenradius des Laufgitters die größtmöglichen Stufenkenndaten, wie Druckzahl und Umfangsgeschwindigkeit, erreicht werden. Die beste Drallverteilung unter Einhaltung vorgeschriebener, maximal zulässiger Anströmmachzahlen am Innen- und Außenradius des Laufgitters einer Grenzleistungsstufe und auch bei Stufen optimalen Wirkungsgrades unter Vorgabe einer maximalen Anströmmachzahl am Außenradius liegt demnach zwischen dem kinematischen Schema der konstanten kinematischen Reaktion und dem des Potentialwirbels.

Dies stimmt nicht mehr ganz mit den Untersuchungen über den absoluten Stufenverlust bei den technisch interessanten Lieferzahlen  $\bar{\varphi}_\infty$  nach Abb.: 5.6.1.1 überein. Hier liegt bei

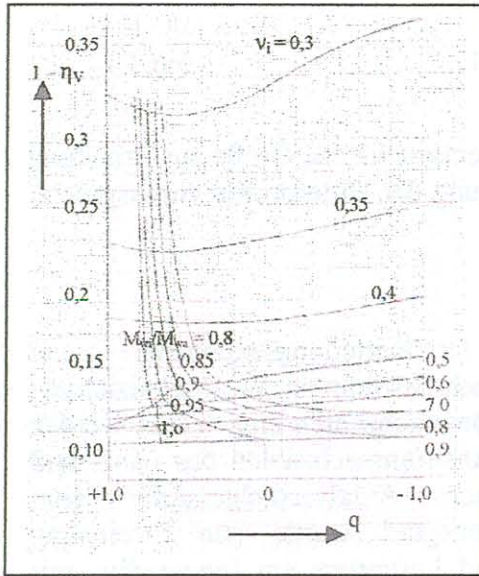


Abb.: 5.6.1.1 Optimaler Stufenverlust in Abhängigkeit vom Drall-Verteilungsexponenten  $q$

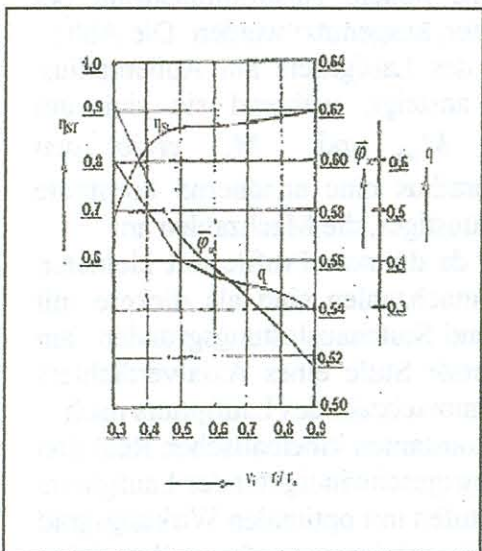


Abb.: 5.6.1.2 Optimalwerte der Stufen

größeren Nabenvhältnissen ( $v_i \geq 0,5$ ) der beste Stufenwirkungsgrad bei dem kinematischen Schema  $q = + 1,0$ . Die in Abb.: 5.6.1.1 eingezeichneten Linien konstanter Machzahlverhältnisse zeigen, dass in dem interessierenden Gebiet kaum eine nennenswerte Änderung des absoluten Stufenverlustes in Abhängigkeit vom Drallverteilungsexponenten  $q$  auftritt. Günstige Machzahlverhältnisse an den Außen- und Innenradius der Profilhüter mehrstufiger Axialverdichter erhält man, wenn man sie mit den gewählten Drallverteilungsexponenten  $q$  auslegt, die durch die Schnittpunkte der in der Abb.: 5.6.1.1 der Machzahllinien mit den Linien  $v_i = konst.$  gegeben sind. Die Abb.: 5.6.1.2 zeigt z.B. die Abhängigkeit dieser Drallverteilungsexponenten  $q$  in Abhängigkeit vom Nabenvhältnis  $v_i$  mit den zugehörigen

Lieferzahlen  $\bar{\varphi}_\infty$  und den integralen Stufenwirkungsgraden. Natürlich kann nach Abb.: 5.6.1.1 auch ein anderer Verlauf gewählt werden. Die Größe der maximalen Anströmmachzahl ist abhängig von den Parametern und der Güte des jeweiligen Profilhüters und kann durch Versuche auf einem Gitterblasprüfstand ermittelt werden. Gibt man sich bei Stufen mit optimalem Stufenwirkungsgrad (z.B. nach Abb.: 5.6.1.2) die maximale Anströmmachzahl am Außenradius einer Stufe vor, so ist eine volle aerodynamische Auslastung der Gitter in Hinblick auf die zulässige Anströmmachzahl nicht mehr möglich, da die Anströmmachzahl am Innenradius durch die Vorgabe der optimalen Stufenkenndaten aus den Betrachtungen über den absoluten Stufenverlust bereits festgelegt ist. Allgemein ist man bei der Wahl der Stufen- und Gitterparameter noch einigen Begrenzungen unterworfen. Auf Grund experimenteller Untersuchungen stellte P.d Haller /51/ fest, dass das Verhältnis der Austrittsgeschwindigkeit zur

Eintrittsgeschwindigkeit eines Profilhüters nicht unter den Wert von etwa  $\frac{w_2}{w_1} = 0,75$

absinken darf, wenn eine Ablösung der Strömung von der Oberfläche der Gitterprofile vermieden werden soll. Becht (siehe hierzu auch /52/) empfiehlt einen auf Messungen

basierenden Grenzwert für mehrstufige Maschinen an den Nabenschnitten von  $\frac{w_2}{w_1} = 0.7$

(Die Messungen wurden bekannt gemacht im strömungstechnischen Seminar an der

T.H. Karlsruhe bei dem Vortrag von W.Becht „Grenzbedingungen bei Axialverdichterstufen“ am 8.12.1959). Wie die eigenen Erfahrungen zeigen und von Marcinowsky /52/ bestätigt wird, liegt man oberhalb des von Becht angegebenen Grenzwertes durchaus auf der sicheren Seite.

Weitere Begrenzungen für Axialverdichterstufen wurden bei den Untersuchungen des absoluten Stufenverlustes (Abschnitt 5.5.2) angegeben. Mit Hilfe der bei der Behandlung des Absoluten Stufenverlustes ermittelten Optimalwerte der Stufenkinematik (z.B. Abb.: 5.6.1.2) lassen sich Axialverdichterstufen mit optimalen Stufenwirkungsgrad besonders einfach bestimmen.

### 5.6.2 Die Kinematik für Stufen optimalen Wirkungsgrades.

Für Axialverdichterstufen mit über den Radius konstanter Energieübertragung an das Gas im Laufgitter galt nach Abschnitt 5.1 für die Axialgeschwindigkeitsverteilung:

$$\frac{c_{ax}}{\bar{u}} = \bar{\varphi} + \alpha \frac{q+1}{q} (1-\rho_k)^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^{2q} \right] \pm \beta \frac{q+1}{q-1} \frac{1-\rho_k}{2} \bar{\psi}_{th} \left[ 1 - \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^{q-1} \right] \quad 5.6.2.1$$

wobei  $\alpha$  und  $\beta$  die Korrekturfaktoren nach Schröder (siehe Abschnitt 5.2) darstellen.

Für das Vorzeichen galt:

- Ebene vor Laufgitter
- + Ebene hinter Laufgitter

Als Bezugsgrößen wurden die Werte am flächenhalbierenden Radius (siehe Gl.: 5.3.7) gewählt.

Legt man fest, dass entsprechend der Gl.: 5.6.1.1 die Differenz der Umfangskomponenten der absoluten Strömungsgeschwindigkeiten am Innenradius einer Stufe der Wert  $\Delta c_{ui} = \frac{\psi_{thi}}{2} u_i$

verwirklicht werden soll, ergibt sich nach der Euler'schen Turbinengleichung:

$$h_{th} = \Delta c_u u = \psi_{thi} u_i^2 \quad 5.6.2.2$$

Für die theoretische Druckzahl am mittleren Stufenradius gilt dann der Ausdruck:

$$\bar{\psi}_{th} = \frac{2h_{th}}{\bar{u}^2} = \psi_{thi} \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^2 \quad 5.6.2.3$$

Verwendet man zur Ausnutzung einer annähernd gleichmäßigen Auslastung der Lauf- und Leitgitter am Innenradius einen kinematischen Reaktionsgrad von  $\rho_{ki} = 0,5$ , so lässt sich unter Verwendung des Ansatzes

$$c_{u\infty} = \bar{c}_{u\infty} \left( \frac{r}{\bar{r}} \right)^q$$

der kinematische Reaktionsgrad am mittleren Radius der Stufe angeben:

$$1 - \bar{\rho}_k = 0,5 \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{1-q} \quad 5.6.2.4$$

Unter Anwendung dieser Ausdrücke erhält man für die Axialgeschwindigkeiten am Innen- und

Außenradius einer Stufe in den Ebenen I und II vor und hinter dem Laufgitter.

$$\left( \frac{c_{axi}}{\bar{u}} \right)^2 = \bar{\varphi}_{I,II} + f_i(q)_{I,II} \quad 5.6.2.5$$

$$\left( \frac{c_{axa}}{\bar{u}} \right)^2 = \bar{\varphi}_{I,II} + f_a(q)_{I,II} \quad 5.6.2.6 \quad 117$$

Mit

$$f_i(q)_{I,II} = \bar{\varphi}_{I,II}^2 \left[ \left( \frac{c_{axi}}{\bar{u}} \right)^2 - 1 \right] = \alpha_{I,II} 0,25 \frac{q+1}{q} \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{2(q+1)} \left[ 1 - \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{2q} \right] \\ \pm \beta_{I,II} 0,5 \frac{\psi_{thi}}{2} \frac{q+1}{q-1} \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{3-q} \left[ 1 - \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{q-1} \right] \quad 5.6.2.7$$

und

$$f_a(q)_{I,II} = \bar{\varphi}_{I,II}^2 \left[ \left( \frac{c_{axa}}{\bar{u}} \right)^2 - 1 \right] = \alpha_{I,II} 0,25 \frac{q+1}{q} \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{2(1-q)} \left[ 1 - \left( \frac{r_a}{\bar{r}} \right)^{2q} \right] \\ \pm \beta_{I,II} 0,5 \frac{\psi_{thi}}{2} \frac{q+1}{q-1} \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^{3-q} \left[ 1 - \left( \frac{r_a}{\bar{r}} \right)^{q-1} \right] \quad 5.6.2.8$$

Für die Anströmmachzahl des Laufgitters am Außenradius gilt:

$$M_{wa} = \frac{w_{1a}}{a_1} \quad 5.6.2.9$$

Dabei ist  $w_1$  die relative Anströmgeschwindigkeit zum Laufgitter und  $a_1$  die auf die statische Temperatur des Gases bezogene Schallgeschwindigkeit. Entsprechend dem Geschwindigkeitsvektordiagramm im koaxialen Zylinderschnitt einer Axialverdichterstufe (siehe Abb.: 5.1.1) gilt für die Absolutgeschwindigkeit

$$c_1^2 = c_{ax}^2 + \left( c_{u\infty} - \frac{\Delta c_u}{2} \right)^2 \quad 5.6.2.10$$

und für die Relativgeschwindigkeit

$$w_1^2 = c_{ax}^2 + \left( w_{u\infty} + \frac{\Delta c_u}{2} \right)^2 \quad 5.6.2.11$$

Entsprechend den Gleichungen 5.6.2.2 und 5.6.2.3 erhält man für die Differenz der Umfangskomponenten der absoluten Strömungsgeschwindigkeiten

$$\Delta c_u = \psi_{thi} \bar{u} \frac{v_i^2}{1+v_i^2} \sqrt{\frac{1+v_i^2}{2}}$$

Für den kinematischen Reaktionsgrad am Außenradius der Stufe kann gesetzt werden:

$$1 - \rho_{ka} = 0,5 v_i^{q-1}$$

Aus dieser Beziehung folgt unmittelbar die Umfangskomponente der absoluten und relativen Strömungsgeschwindigkeit am Außenradius einer Stufe in der Stufenebene Unendlich.

$$c_{u\infty a} = 0,5 v_i^{1-q} \bar{u} \sqrt{\frac{2}{1+v_i^2}} \\ w_{u\infty a} = \bar{u} \left[ 1 - 0,5 v_i^{1-q} \right] \sqrt{\frac{2}{1+v_i^2}}$$

Mit diesen Beziehungen und den Gleichungen 5.6.2.8; 5.6.2.10 und 5.6.2.11 folgt dann für die absolute und relative Strömungsgeschwindigkeit am Außenradius der Stufe:



$$c_{1a} = \bar{u}^2 \left[ \bar{\varphi}^2 + f_a(q)_I + \frac{\left( 0,707v_i^{1-q} - \frac{\psi_{thi} v_i^2}{2\sqrt{2}} \right)^2}{1+v_i^2} \right] \quad 5.6.2.12$$

$$w_{1a}^2 = \bar{u}^2 \left[ \bar{\varphi}^2 + f_a(q)_I + \frac{\left( 1,414 - 0,707v_i^{1-q} + \frac{\psi_{thi} v_i^2}{2\sqrt{2}} \right)^2}{1+v_i^2} \right] \quad 5.6.2.13$$

Mit Hilfe der angegebenen Beziehungen für die Geschwindigkeiten lässt sich leicht die Schallgeschwindigkeit des Gases und die Anströmmachzahl am Außenradius einer Stufe angeben.

Für die Schallgeschwindigkeit gilt:

$$a_1^2 = \kappa R \left( T_1^* - \frac{c_1^2}{2c_p} \right) = \kappa R \left\{ T_1^* - \frac{\bar{u}^2}{2c_p} \left[ \bar{\varphi}^2 + f_a(q)_I + \frac{\left( 0,707v_i^{1-q} - \frac{\psi_{thi} v_i^2}{2\sqrt{2}} \right)^2}{1+v_i^2} \right] \right\} \quad 5.6.2.14$$

und für die Machzahl:

$$M_{w1a}^2 = \frac{\left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{T_1^*}} \right)^2 \left[ \bar{\varphi}^2 + f_a(q)_I + \frac{\left( 1,414 - 0,707v_i^{1-q} + \frac{\psi_{thi} v_i^2}{2\sqrt{2}} \right)^2}{1+v_i^2} \right]}{\kappa R - \frac{\kappa-1}{2} \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{T_1^*}} \right)^2 \left[ \bar{\varphi}^2 + f_a(q)_I + \frac{\left( 0,707v_i^{1-q} + \frac{\psi_{thi} v_i^2}{2\sqrt{2}} \right)^2}{1+v_i^2} \right]} \quad 5.6.2.15$$

Aus dieser Beziehung erhält man direkt die Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters am mittleren Stufenradius, wenn die Anströmmachzahl am Außenradius des Laufgitters vorgegeben wird.

$$\left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{T_1^*}} \right)^2 = \frac{\kappa R M_{w1a}^2}{\bar{\varphi}_\infty^2 + f_a(q)_I + \frac{\left( 1,414 - 0,707v_i^{1-q} + \frac{\psi_{thi} v_i^2}{2\sqrt{2}} \right)^2}{1+v_i^2}} + \frac{\kappa R M_{w1a}^2}{\frac{\kappa-1}{\kappa} M_{w1a}^2 \left[ \bar{\varphi}^2 + f_a(q)_I + \frac{\left( 0,707v_i^{1-q} - \frac{\psi_{thi} v_i^2}{2\sqrt{2}} \right)^2}{1+v_i^2} \right]} \quad 5.6.2.16$$

In dieser Gleichung ist unmittelbar der Zusammenhang zwischen der Lieferzahl  $\bar{\varphi}$  und der Umfangsgeschwindigkeit am mittleren Stufenradius gegeben, wenn die Temperatur des Gases am Eintritt in das Laufgitter und die Anströmmachzahl der Profile am Außenradius gegeben ist. Für Stufen mit optimalem Wirkungsgrad erhält man mit den Werten  $\bar{\varphi}_{opt}$  und  $q_{opt}$  aus den Stufenuntersuchungen die auf die Eintrittstemperatur des Gases bezogene Umfangsgeschwindigkeit am mittleren Radius in Abhängigkeit vom Nebenverhältnis  $v_i$  der Stufe, wenn man die Anströmmachzahl am Außenradius als Parameter wählt.

Analog zu den Gleichungen 5.6.2.12 bis 5.6.2.15 lässt sich für den Innenschnitt die relative Strömungsgeschwindigkeit und die Anströmmachzahl angeben.

$$\begin{aligned}
 w_{ii}^2 &= \bar{u}^2 \left[ \bar{\varphi}^2 + f_i(q)_I + \frac{v_i^2}{1+v_i^2} \left( 0,707 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\psi_{thi}}{2} \right)^2 \right] \\
 c_{ii}^2 &= \bar{u}^2 \left[ \bar{\varphi}^2 + f_i(q)_I + \frac{v_i^2}{1+v_i^2} \left( 0,707 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\psi_{thi}}{2} \right)^2 \right] \\
 M_{wi}^2 &= \frac{\left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{T_1^*}} \right)^2 \left[ \bar{\varphi}^2 + f_i(q)_I + \frac{v_i^2}{1+v_i^2} \left( 0,707 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\psi_{thi}}{2} \right)^2 \right]}{\kappa R - \frac{\kappa-1}{2} \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{T_1^*}} \right)^2 \left[ \bar{\varphi}^2 + f_i(q)_I + \frac{v_i^2}{1+v_i^2} \left( 0,707 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\psi_{thi}}{2} \right)^2 \right]}
 \end{aligned} \tag{5.6.2.17}$$

Für Stufen mit optimalem Wirkungsgrad kann man mit den bekannten  $\frac{\bar{u}}{\sqrt{T_1^*}}$ -Werten nach der Gl.: 5.6.2.16 unmittelbar mit der Gl.: 5.6.2.17 die Anströmmachzahlen am Innenradius einer Stufe bestimmen. Der sich aus der Gl.: 5.6.2.17 ergebende Wert für die Umfangsgeschwindigkeit am mittleren Stufenradius

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{T_1^*}} \right)^2 &= \frac{\kappa R M_{wi}^2}{\frac{\kappa-1}{2} M_{wi}^2 \left[ \bar{\varphi}^2 + f_i(q)_I + \frac{v_i^2}{1+v_i^2} \left( 0,707 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\psi_{thi}}{2} \right)^2 \right] +} \\
 &\quad + \frac{\kappa R M_{wi}^2}{\bar{\varphi}^2 + f_i(w)_I + \frac{v_i^2}{1+v_i^2} \left( 0,707 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\psi_{thi}}{2} \right)^2}
 \end{aligned} \tag{5.6.2.18}$$

muss mit dem der Gl.: 5.6.2.16 identisch sein. Die Gl.: 5.6.2.18 gewinnt bei den späteren Betrachtungen noch an Bedeutung.

Zur Bestimmung der zulässigen Stufenbelastungen für Axialverdichterstufen mit optimalen Wirkungsgraden kann auf die Beziehungen 5.6.2.22 und 5.6.2.23 zurückgegriffen werden. Für

die in einem Laufgitter umgesetzte Energieübertragung an das Gas kann mit  $u_i = \bar{u} \frac{r_i}{\bar{r}}$  geschrieben werden:

$$\frac{h_{th}}{T_1^*} = \frac{\psi_{thi}}{2} \left( \frac{\bar{u}}{\sqrt{T_1^*}} \right)^2 \left( \frac{r_i}{\bar{r}} \right)^2 \tag{5.6.2.19}$$

Die größte Verzögerung der Strömungsgeschwindigkeiten in einer Stufe tritt am Innenradius

der Beschauelung auf. Mit den Geschwindigkeiten am Innenschnitt einer Stufe folgt:

$$\left(\frac{w_2}{w_1}\right)^2 = \frac{\bar{\varphi}^2 + f_i(q)_I + \frac{v_i^2}{1+v_i^2} \left(0,707 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\psi_{thi}}{2}\right)^2}{\bar{\varphi}^2 + f_i(q)_I + \frac{v_i^2}{1+v_i^2} \left(0,707 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\psi_{thi}}{2}\right)^2} \quad 5.6.2.20$$

Damit eine Ablösung der Strömung von den Schaufelprofilen vermieden wird, soll die Verzögerung der Geschwindigkeiten, entsprechend den in Abschnitt 6.2.1 gemachten Ausführungen, nicht unter  $w_2/w_1 = 0,7$  gehalten werden.

Setzt man die Kontinuitätsbeziehung unter Beachtung des mittleren Stufenradius am Eintritt des Laufgitters an, erhält man den auf den Außenradius bezogenen Volumendurchsatz der Stufe zu:

$$\frac{V^*}{\sqrt{T_1^*}} \frac{1}{r_a^2} = \pi(1-v_i^2) \bar{\varphi} \frac{\bar{u}}{\sqrt{T_1^*}} \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}^*} \quad 5.6.2.21$$

Das Verhältnis der Dichten des Gases kann nach der allgemein bekannten gasdynamischen Beziehung angegeben werden:

$$\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}^*} = \frac{1}{\left[1 + \frac{\kappa-1}{2} \left(\frac{\bar{c}_1}{a}\right)^2\right]^{\frac{1}{\kappa-1}}} = \frac{1}{\left[1 + \frac{\kappa-1}{2} \frac{\left(\frac{\bar{c}_1}{\sqrt{T_1^*}}\right)^2}{2R \left[1 - \frac{1}{2c_p} \left(\frac{\bar{c}_1}{\sqrt{T_1^*}}\right)^2\right]}\right]^{\frac{1}{\kappa-1}}} \quad 5.6.2.22$$

Für die auf die Temperatur des Gases am Eintritt eines Laufgitters bezogene absolute Strömungsgeschwindigkeit kann nach dem Geschwindigkeitsvektordiagramm einer Verdichterstufe (siehe Abb.: 5.1.1) gesetzt werden:

$$\left(\frac{\bar{c}_1}{\sqrt{T_1^*}}\right)^2 = \left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{T_1^*}}\right)^2 \left\{ \bar{\varphi}^2 + \left[ (1-\bar{\rho}_k) - \frac{\bar{\psi}_{th}}{4} \right]^2 \right\}$$

Mit den Ausdrücken

$$1 - \bar{\rho}_k = \frac{1 - \rho_{ki}}{v_i^{q-1} \left(\frac{\bar{r}}{r_a}\right)^{1-q}} \quad \text{und} \quad \bar{\psi}_{th} = \psi_{thi} \frac{v_i^2}{\left(\frac{\bar{r}}{r_a}\right)^2}$$

folgt dann:

$$\left(\frac{\bar{c}_1}{\sqrt{T_1^*}}\right)^2 = \left(\frac{\bar{u}}{\sqrt{T_1^*}}\right)^2 \left\{ \bar{\varphi}^2 + \left[ \frac{1 - \rho_{ki}}{v_i^{q-1} \left(\frac{\bar{r}}{r_a}\right)^{1-q}} - \frac{\psi_{thi} v_i^2}{4 \left(\frac{\bar{r}}{r_a}\right)^2} \right]^2 \right\} \quad 5.6.2.23$$

Für den Ausdruck  $\frac{\bar{r}}{r_a}$  ist die Beziehung 5.3.7 einzusetzen.

Die Ergebnisse einer Auswertung dieser Gleichungen in Verbindung mit ABB.: 5.6.1.2 für Axialverdichterstufen mit annähernd optimalen Wirkungsgraden zeigen die Abbildungen 5.6.2.1 bis 5.6.2.6.

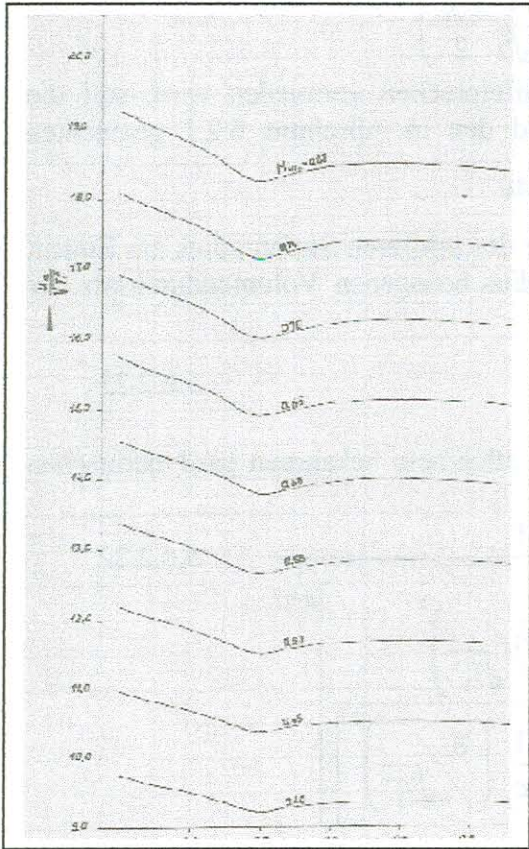


Abb.: 5.6.2.1  $u_a / \sqrt{T_0^*} = f(v_i)$  mit  $M_{w1a}$  als Parameter.

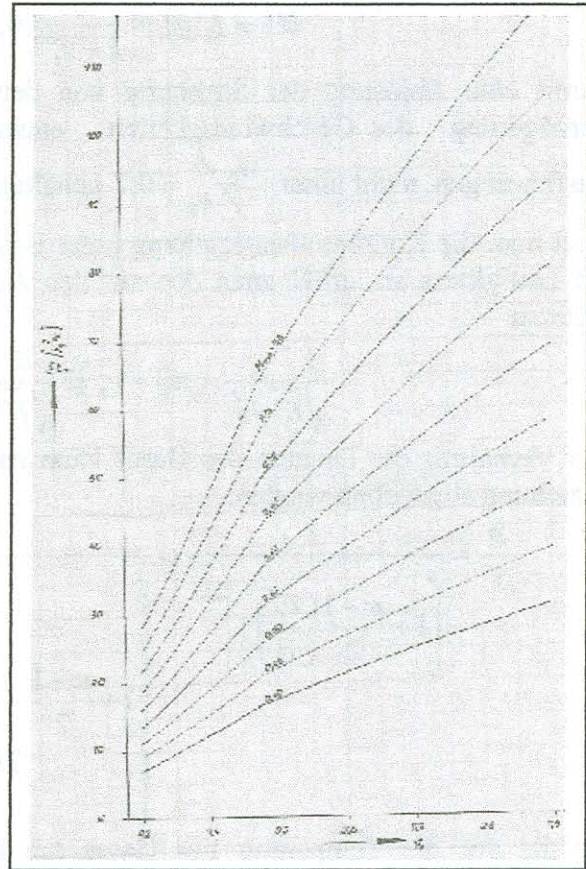


Abb.: 5.6.2.2  $h_{th} / T_0^* = f(v_i)$  mit  $M_{w1a}$  als Parameter.

Zur Auswertung der in Gl.: 5.6.2.1 enthaltenen Korrekturfaktoren der Drallströmung wurde ein Seitenverhältnis der Stufenebenen von

$$\frac{h}{l} \approx 7 \left( 1,1 - \sqrt{\frac{1 + v_i^2}{2}} \right) \quad 5.6.2.24$$

vorausgesetzt. Um Allgemeingültigkeit zu erreichen, wurde der Korrekturfaktor für eine unendliche Stufenzahl, der in den überwiegenden Fällen schon bei der dritten Stufe eines mehrstufigen Axialverdichters erreicht wird verwendet.

Die Abb.: 5.6.2.1 zeigt die auf die Temperatur des Gases bezogene Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters in Abhängigkeit vom Nabenverhältnis. Als Parameter wurde die Anströmmachzahl der Profiligitter im relativen Strömungssystem am Außenradius gewählt

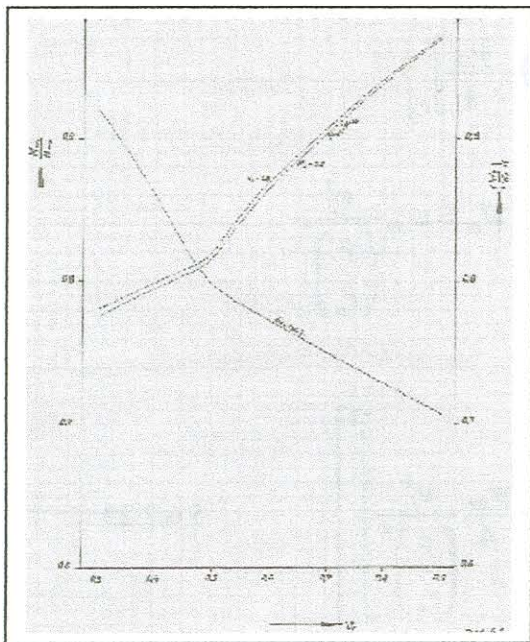


Abb.: 5.6.2.3  $w_2/w_1 = f(v_i)$  und  $M_{wi}/M_{wa} = f(v_i)$

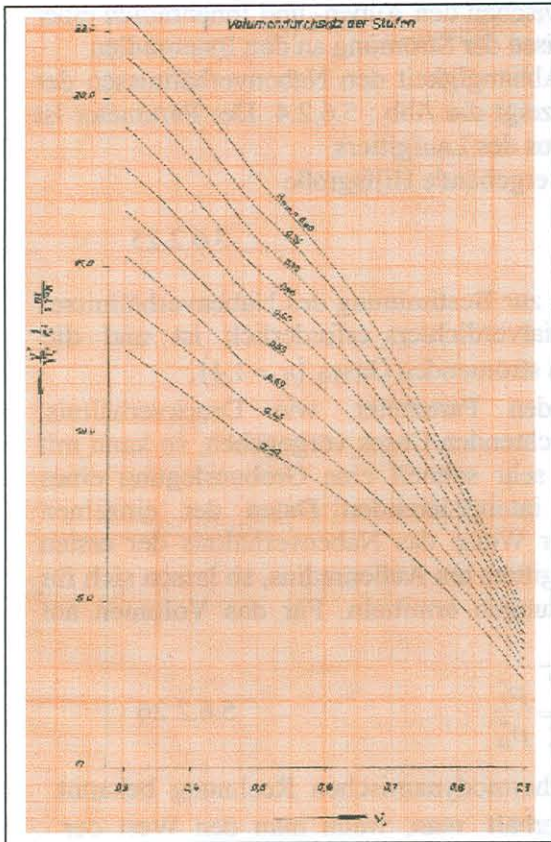


Abb.: 5.6.2.4  $V^* / r_a^2 T_0^* = f(v_i)$  mit  $M_{wa}$  als Parameter.

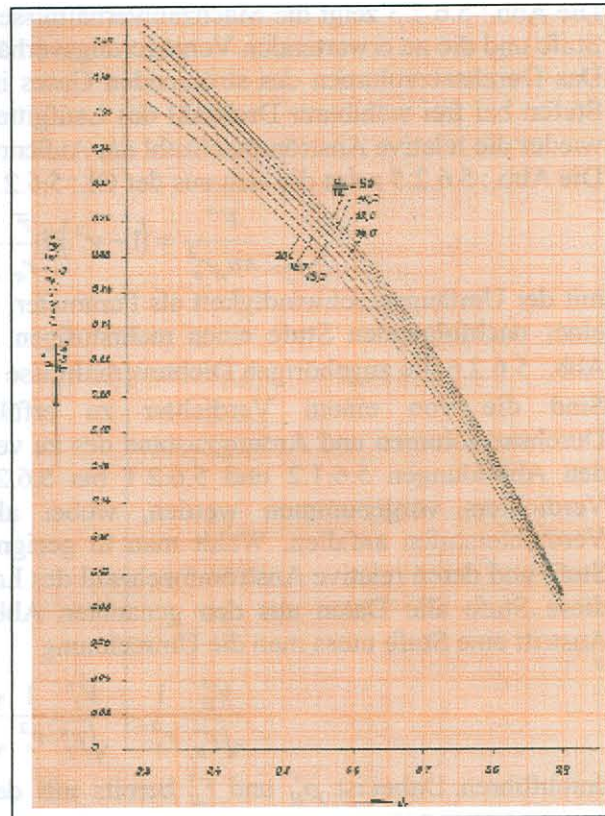


Abb.: 5.6.2.5  $V^* / (\pi r_a^2 u_a) = f(v_i)$  mit  $u_a / \sqrt{T_0^*}$  als

als Parameter

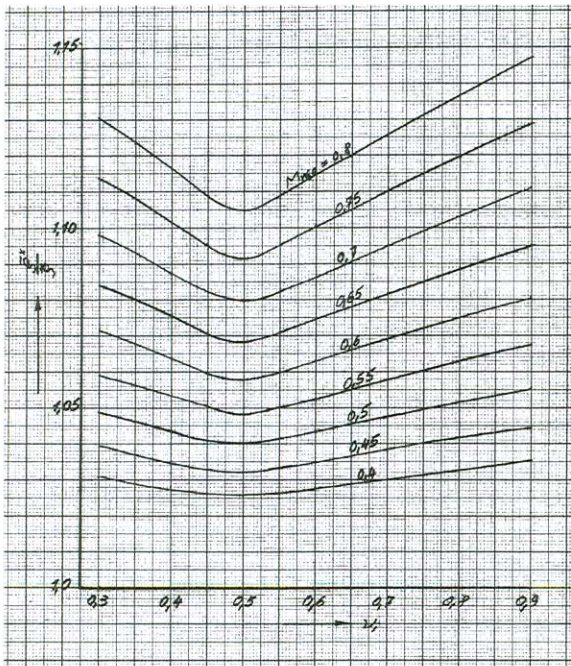


Abb.: 5.6.2.6  $\bar{p}\bar{\gamma} = f(v_i)$  mit  $M_{wa}$  als Parameter.  
( $\kappa=1,4$ )

$v_i = 0,475$  den Wert  $(t/l)_i = 0,6$ . Bei den Nabenverhältnissen  $v_i \geq 0,475$  ist das Teilungsverhältnis des Profilgitters am Innenradius mit  $(t/l)_i = 0,6$  konstant. Die Druckzahl verkleinert sich entsprechend den zulässigen Gitterbelastungszahlen.

Bei konstanter Anströmmachzahl ist die Zunahme der Umfangsgeschwindigkeit bei kleiner werdendem Nabenverhältnis  $v_i$ , auf die optimalen Lieferzahlen  $\bar{\rho}$  und auf die optimalen Drallverteilungsexponenten  $q$  nach Abb.: 5.6.1.2 zurückzuführen.

Die Abhängigkeit der nach den Gitterbelastungszahlen, entsprechend der Gl.:5.5.2.19, zulässigen Energieumsetzungen im Laufgitter vom Nabenverhältnis der Stufe zeigt die Abb.: 5.6.2.2. Als Parameter wurde wieder die Anströmmachzahl im Relativsystem am Außenradius des Laufgitters angegeben. Zwischen den Nabenverhältnissen  $v_i = 0,3$  und  $v_i = 0,475$  ist die Druckzahl am Innenradius des Laufgitters mit  $\psi_{th} = 1,7$  begrenzt. Das zulässige Teilungsverhältnis der Gitterprofile

Am Innenradius verringert sich mit größer werdendem Nabenverhältnis und erreicht bei

Am Innenradius verringert sich mit größer werdendem Nabenverhältnis und erreicht bei

Am Innenradius verringert sich mit größer werdendem Nabenverhältnis und erreicht bei

Am Innenradius verringert sich mit größer werdendem Nabenverhältnis und erreicht bei

Die Abb.: 5.6.2.3 zeigt die Machzahlverhältnisse zwischen den Außen- und Innenradien einer Stufe und die zu erwartenden Verzögerungsverhältnisse der Strömung an den Innenradien.

Das Durchsatzvolumen des strömenden Gases in Abhängigkeit den Nabenverhältnissen der Stufen bei frei wählbarer Drehzahl des Laufgitters zeigt die Abb.: 5.6.2.4. Der Parameter ist wieder die relative Anströmmachzahl am Außenradius des Laufgitters.

Die Abb.: 5.6.2.5 zeigt die sich aus der Gl.: 5.6.2.21 ergebende Hilfsgröße

$$\frac{V^*}{\pi u_a r_a^2} = (1 - v_i^2) \bar{p} \frac{\bar{r}}{r_a} \frac{\bar{\rho}}{\rho^*} \quad 5.6.2.25$$

mit der Umfangsgeschwindigkeit als Parameter, die zur Bestimmung des Nabenverhältnisses einer nachfolgenden Stufe eines mehrstufigen Axialverdichters erforderlich ist und die Abb.: 5.6.2.6 die zugehörigen Dichteverhältnisse des strömenden Gases ( $\kappa = 1,4$ ).

Sind die von einem Verdichter zu erfüllenden Parameter, wie Druckverhältnis, Durchsatzvolumen und Ansaugzustand des zu verdichtenden Gases vorgegeben, so kann mit den Abbildungen 5.6.1.2 und 5.6.2.1 bis 5.6.2.6 sehr schnell eine Grobauslegung eines Verdichters vorgenommen werden, wobei alle interessierenden Daten der einzelnen Verdichterstufen anfallen. Wählt man in geeigneter Weise das Nabenverhältnis der ersten Stufe und deren relative Anströmmachzahl des Laufgitters am Außenradius, so lassen sich für diese Stufe alle Daten aus den genannten Abbildungen ermitteln. Für das Volumen am Austritt eine Stufe muss man die Umrechnung

$$\frac{V_{II}^*}{\sqrt{T_{II}^*}} \frac{1}{r_a^2} = \frac{V_I^*}{\sqrt{T_I^*}} \frac{1}{r_a^2} \frac{\sqrt{T_I^*}}{\sqrt{T_{II}^*}} \frac{\rho_I^*}{\rho_{II}^*} \quad 5.6.2.26$$

durchführen. Dabei ist  $\rho_{II}^*$  und  $T_{II}^*$  bereits aus der thermodynamischen Rechnung bekannt. Das Nabenverhältnis einer nachfolgenden Stufe erhält man, wenn man den Wert der Gl.: 5.6.2.26 auf die Beziehung 5.6.2.25 umrechnet. Mit diesem Wert kann auf Abb.: 5.6.2.5 Das Nabenverhältnis einer nachfolgenden Stufe abgelesen werden.

Die Projektrechnung mit den angegebenen Unterlagen ist denkbar einfach und soll an einem Beispiel verdeutlicht werden.

### Beispiel:

Gefordert wird ein Axialverdichter mit folgenden Werten:

Luftmassendurchsatz:	$\dot{m} = 60 \text{ kg/s}$
Druckverhältnis:	$\pi = \frac{P_{2*}}{P_1^*} = 7,0$
Drehzahl:	frei wählbar
Zustand der Luft am Eintritt in die erste Stufe:	
Temperatur:	$T_1^* = 288^\circ \text{K}$
Druck:	$P_1^* = 100000 \text{ N/m}^2$
Gewählte Werte für die erste Stufe:	
Nabenverhältnis	$v_i = \frac{r_i}{r_a} = 0,45$
Anströmmachzahl	$M_{wla} = 0,8$

Die Rechnung wird tabellarisch durchgeführt.

Bei der Tabellenrechnung werden aus Platzgründen die benutzten Abbildungen mit folgender Bezeichnung angegeben:

Abb.: 5.6.1.2 → I<    Abb.: 5.6.2.1 → II<    Abb.: 5.6.2.2 → III<    Abb.: 5.6.2.3 → IV<

Abb.: 5.6.2.4 → V<    Abb.: 5.6.2.5 → VI<    Abb.: 5.6.2. → VII<

Diagrammwerte:  $\frac{V_1^*}{\sqrt{T_1^*}} \frac{1}{r_a^2} = \frac{m}{s\sqrt{K}}$  )V<    ;     $\frac{u_a}{\sqrt{T_1^*}} = 18,5 \frac{m}{s\sqrt{K}}$  )II<

Errechnete Werte  $\frac{V_1^*}{\sqrt{T_1^*}} = 2,925 \frac{m^3}{s\sqrt{K}}$      $r_a = \sqrt{\frac{V_1^*}{\sqrt{T_1^*}} \frac{\sqrt{T_1^*}}{V_1^*} r_a^2} = 0,394 \text{ m}$

$$n = \frac{30 u_a / \sqrt{T_1^*}}{30} = 7610 \text{ min}^{-1}$$

(1) Stufe n:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
(2) $v_{in}$	0,45	0,542	0,636	0,704	0,76	0,805	0,8325	0,86	0,88
(3) $M_{wa}$	0,80	0,783	0,750	0,721	0,694	0,669	0,645	0,624	0,60
(4) $M_{wi}/M_{wa}$ )IV<	0,804	0,842	0,881	0,905	0,926	0,941	0,95	0,958	0,963
(5) $M_{wi} = (3) \times (4)$	0,643	0,6595	0,6605	0,652	0,643	0,6296	0,613	0,598	0,578
(6) $q$ )I<	0,44	0,382	0,361	0,35	0,34	0,325	0,322	0,316	0,305
(7) $\bar{\varphi}$ )I<	0,581	0,5648	0,5525	0,544	0,5361	0,53	0,526	0,5225	0,5185
(8) $u_a / \sqrt{T_1^*}$ )II<	18,5	17,69	17,35	16,74	16,125	15,525	14,96	14,44	13,98
(9) $h_{th}/T_1^*$ )III<	58,7	71,0	77,2	78,0	78,5	76,5	73,2	71,0	67,5
(10) $T_1^* = T_{2(n-1)}^0 K$	288	304,84	326,32	351,42	378,6	408,03	438,83	470,38	502,53
(11) $\sqrt{T_1^*} \sqrt{K}$	16,96	17,45	18,06	18,74	19,45	20,2	20,95	21,7	22,41
(12) $u_a = (8) \times (11) \text{ m/s}$	313,6				→				313,6
(13) $u_i = (2) \times (12) \text{ m/s}$	141	173	195,9	220,9	238,3	252,2	261	268	276,5
(14) $v_i^2 = (2)^2$	0,2025	0,2938	0,4045	0,4958	0,5775	0,648	0,693	0,731	0,778
(15) $\frac{1}{2} [1 + (14)]$	0,60125	0,6469	0,70225	0,7479	0,78875	0,824	0,8465	0,8655	0,8840
(16) $\bar{r}/r_a = \sqrt{(15)}$	0,775	0,801	0,838	0,864	0,888	0,907	0,92	0,93	0,94
(17) $\bar{u} = (12) \times (16) \text{ m/s}$	243	252	262,8	271	278,3	284,6	288,5	291,5	294,8
(18) $\bar{c}_{ax} = (7) \times (17)$	141,2	142,3	145,2	147,4	149,2	150,7	151,75	152,3	152,7
(19) $h_{th} = (9) \times (10) \text{ J/kg}$	16900	21630	25200	27400	29720	31220	32100	32900	33900
(20) $c_p \text{ J/kg}^0 K$	1003,4	1004,2	1005,7	1008,0	1010,5	1014,2	1018,2	1023,5	1029,3

(1) Stufe n	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
(21) $\kappa$	1,4008	1,4002	1,3993	1,398	1,3967	1,3947	1,3925	1,3897	1,3867
(22) $\frac{\kappa}{\kappa-1}$	3,5	3,5	3,503	3,51	3,522	3,535	3,546	3,565	3,588
(23) $\Delta T^* = (19)/(20)$	16,48	21,53	25,05	27,18	29,43	30,8	31,55	32,15	32,95
(24) $T_2^* = (10) + (23)$	304,84	326,37	351,42	378,6	408,03	438,83	470,38	502,53	535,48
(25) $\eta_{is} \rangle I \langle$	0,847	0,865	0,874	0,877	0,881	0,885	0,887	0,890	0,895
(26) $1 + \frac{(19)x(25)}{(10)x(20)}$	1,04955	1,06118	1,066	1,0678	1,0685	1,0668	1,063	1,0608	1,05865
(27) $\pi_{St} = (26)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$	1,1842	1,2309	1,251	1,259	1,2628	1,2569	1,2418	1,234	1,227
(28) (27)-1	0,1842	0,2309	0,251	0,259	0,2628	0,2569	0,2418	0,234	0,227
(29) $p_1^* \text{ N/m}^2$	100000	118420	146740	183560	231080	291738	366588	455208	561708
(30) $\Delta p^* = (28)x(29)$	18420	27320	36820	47520	60658	74850	88620	106500	150150
(31) $p_2^* = (29) + (30)$	118420	146740	183560	231080	291738	366588	455208	561708	711858
(32) $\rho_1^* = \frac{(29)}{R(10)}$	1,21	1,3548	1,568	1,82	2,127	2,49	2,912	3,372	3,875
(33) $\rho_2^* = \frac{(31)}{R(24)}$	1,3548	1,568	1,82	2,127	2,49	2,912	3,372	3,875	4,63
(34) $\frac{V_1^*}{\sqrt{T_1^*}} x \frac{1}{r_a^2}$	18,85	16,375	13,66	11,34	9,36	7,96	6,34	5,29	4,455
(35) $\frac{V_2^*}{\sqrt{T_2^*}} x \frac{1}{r_a^2} =$	16,375	13,66	11,34	9,36	7,96	6,34	5,29	4,455	3,753
(34) $\frac{(11)}{(11)_{n+1}} \frac{(32)}{(33)}$									
(36) $\frac{V^*}{r_a^2 \pi u_a} = \frac{(35)}{\pi} \frac{(11)_{n+1}}{(12)}$	0,29	0,2505	0,2158	0,185	0,1577	0,1349	0,12105	0,10148	0,0882
(37) $v_{n+1} = f((36); (8)_{n+1})$									
$\rangle VII \langle$	0,542	0,636	0,704	0,76	0,805	0,8325	0,86	0,88	0,898
(38) $\pi_{ges}$	1,1842	1,4674	1,8356	2,3108	2,91738	3,66588	4,55208	5,61708	7,11858
(39) 1,1-(16)	0,325	0,296	0,262	0,236	0,212	0,193	0,18	0,17	0,16
(40) $\frac{h}{l_{ax}} = 7x(39)$	2,275	2,97	1,835	1,625	1,485	1,35	1,26	1,19	1,12
(41) $r_i = r_a x(2)$ m	0,1773	0,2135	0,2505	0,2775	0,2995	0,317	0,328	0,3385	0,3465
(42) $h = r_a - r_i$ m	0,2167	0,1805	0,1435	0,1165	0,0945	0,077	0,066	0,0555	0,0475
(43) $l_{ax} \approx (42)/(40)$ mm	95,3	87,2	78,2	70,5	63,6	57,1	52,4	46,7	42,4
(44) (16)/(2)	1,772	1,485	1,3175	1,247	1,196	1,127	1,105	1,081	1,069
(45) 1-q	0,56	0,618	0,639	0,65	0,66	0,675	0,678	0,684	0,695
(46) $(44)^{1-q}$	1,356	1,2768	1,1925	1,1545	1,1085	1,084	1,070	1,0548	1,0474
(47) $1 - \bar{\rho}_k = \frac{1 - \rho_{ki}}{(46)}$	0,3686	0,3915	0,4192	0,433	0,451	0,461	0,467	0,474	0,477
(48) $\bar{\rho}_k = 1 - (47)$	0,6314	0,6085	0,5808	0,567	0,549	0,539	0,533	0,526	0,523



(1) Stufe n	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
(49) $\tan \beta_\infty (7)/(48)$	0,92	0,928	0,952	0,963	0,977	0,983	0,987	0,9935	0,9952
(50) $\beta_\infty$ grad	42,6	42,85	43,6	43,9	44,3	44,5	44,6	44,8	44,75
(51) $\sin \beta_\infty$	0,677	0,681	0,69	0,694	0,699	0,701	0,7025	0,705	0,704
(52) $\cot \alpha_\infty = (48)/(7)$	0,634	0,693	0,759	0,795	0,841	0,87	0,888	0,907	0,92
(53) $\alpha_\infty$ grad.	57,6	55,3	52,8	51,55	49,95	49,0	48,4	47,8	47,4
(54) $\sin \alpha_\infty$	0,845	0,8225	0,797	0,748	0,765	0,755	0,748	0,741	0,736
(55) $l_R \approx (43)/(51)$ mm	140,5	128	113,5	101	91	81,4	74,6	66,2	60,2
(56) $l_{St} \approx (43)/(54)$ mm	113	106	98	90	83	75,6	70	63	57,6
(57) $l_R = l_{St}$ (gewählt)	110	110	90	90	80	80	60	60	60
(58) $h/l = (42)/(57)$	1,968	1,64	1,595	1,295	1,182	0,963	1,1	0,24	0,792
(59) $l_{axR} = (57) \times (51)$ mm	74,45	74,9	62,1	62,5	55,9	56,1	42,15	42,3	42,25
(60) $l_{axSt} = (57) \times (54)$ mm	93,0	90,5	71,7	70,6	61,2	60,4	44,9	44,5	44,2
(61) $s \approx (57)/4$ mm	27,5	27,5	22,5	22,5	20	20	15	15	15
(62) $s$ gewählt mm	25	25	20	20	15	15	12	12	12
(63) $2s$ mm	50	50	40	40	30	30	24	24	24
(64) $l_{St} = (59) + (60) + (63)$	217,45	215,4	173,8	173,1	147,1	146,5	111,05	110,8	110,45
(65) $l_{axR} + s = (59) + (62)$	99,95	99,9	82,1	82,5	70,9	71,1	54,15	54,3	54,25

Für den 9-stufigen Axialverdichter ist eine Länge von:

$$L_{Verd} = L_{Vorleitg.} + \sum_{n=1}^9 (64) = L_{Vorleitg.} + 1405,65 \text{ mm}$$

und ein Wirkungsgrad von:

$$\eta_{Vis} = \frac{T_{11}^* \left[ \pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right]}{T_{2n}^* - T_{11}^*} = \frac{288 \times 0,7405}{247,48} = 0,862$$

zu erwarten.

Die schematische Darstellung des Verdichterströmungskanals zeigt die Abb.: 5.6.2.7.

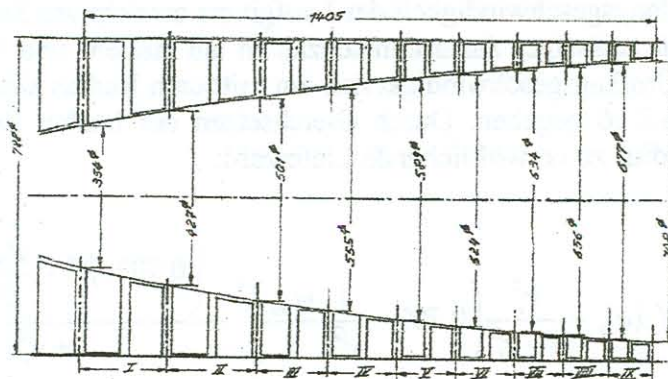


Abb.: 5.6.2.7 Verdichterströmungskanal nach der Beispielrechnung

An dieser Stelle sei nochmals daran erinnert, dass die dargelegten Unterlagen dieses Abschnittes hinsichtlich der Korrekturfaktoren nach Schröder (siehe Abschnitt 5.2) für eine Stufenzahl  $\infty$  des Verdichters gelten und die entsprechenden Bedingungen praktisch schon

ab etwa der dritten Stufe erfüllt sind (siehe Abschnitt 5.2). Deshalb ist für die ersten drei Stufen der Drallverteilungsexponent  $q$  so zu verändern, dass bei den vorgegebenen Anströmmachzahlen des Laufgitters die Bedingung

$$\begin{aligned} \left(\frac{c_{ax}}{\bar{u}}\right)^2 &= \bar{\varphi}_\infty^2 + \alpha \frac{q+1}{q} (1-\bar{\rho}_k)^2 \left[1 - \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^{2q}\right] - \beta \frac{q+1}{q-1} \frac{1-\bar{\rho}_k}{2} \bar{\psi}_{th} \left[1 - \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^{q-1}\right] \\ &= \bar{\varphi}_\infty^2 + \frac{q+1}{q} (1-\bar{\rho}_k)^2 \left[1 - \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^{2q}\right] - \frac{q+1}{q-1} \frac{1-\bar{\rho}_k}{2} \bar{\psi}_{th} \left[1 - \left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^{q-1}\right] \end{aligned}$$

eingehalten wird.

### 5.6.3 Die Kinematik für Grenzleistungsstufen bei Unterschallanströmung der Laufgitter.

Im vorhergehenden Abschnitt 5.6.2 wurde der Zusammenhang zwischen der Lieferzahl, der Umfangsgeschwindigkeit der Laufgitter, dem Drallverteilungsexponenten und der maximal zulässigen Energieumsetzung in einer Axialverdichterstufe unter Vorgabe einer relativen Anströmmachzahl am Außenradius eines Laufgitters dargelegt. Zur Erreichung optimaler Stufenwirkungsgrade wurden die aus den Wirkungsgradbetrachtungen gewonnenen optimalen Lieferzahlen und Drallverteilungsexponenten verwendet. Bei Vorgabe einer maximal zulässigen Anströmmachzahl am Außenradius eines Laufgitters war die Anströmmachzahl am Innenradius durch Verwendung eines optimalen Drallverteilungsexponenten festgelegt.

Die Anströmmachzahl am Innenradius, die sich durch Verwendung der optimalen Kenndaten ergab, ist kleiner als jene, die maximal am Innenradius eines Laufgitters verwirklicht werden kann. Die Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters und die zulässige Energieumsetzung lässt sich steigern, wenn man neben der zulässigen Anströmmachzahl am Außenradius auch die zulässige Anströmmachzahl am Innenradius des Laufgitters vorschreibt. Dabei muss auf die Erreichung eines optimalen Stufenwirkungsgrades verzichtet werden.

Für eine Grenzleistungsstufe ergibt sich dann folgende Definition:

Unter Grenzleistungsaxialverdichterstufen werden jene verstanden, bei denen, unabhängig von Wirkungsgradbetrachtungen, unter Vorgabe maximal zulässiger Anströmmachzahlen für die Innen- und Außenradien der Laufgitter die größtmöglichen Stufenkenndaten wie Energieumsetzung im und Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters erreicht werden.

Die sich bei Vorgabe maximal zulässiger Anströmmachzahlen am Außen- und Innenradius eines Laufgitters ergebenden Umfangsgeschwindigkeiten am mittleren Radius sind durch die Gleichungen 5.6.2.15 und 5.6.2.16 gegeben. Durch Gleichsetzen der beiden Beziehungen ergibt sich die am mittleren Radius zu verwirklichende Lieferzahl:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}^2 &= \frac{\kappa-1}{2} \frac{M_{wi}^2 M_{wa}^2}{M_{wi}^2 - M_{wa}^2} \left[ f_i(q)_1 - f_a(q)_1 + \frac{v_i^2}{1+v_i^2} \left(0,707 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\psi_{thi}}{2}\right)^2 - \frac{\left(0,707 v_i^{1-q} - \frac{\psi_{thi}}{2} \frac{v_i^2}{\sqrt{2}}\right)^2}{1+v_i^2} \right] \\ &+ \frac{M_{wa}^2}{M_{wi}^2 - M_{wa}^2} [f_i(q)_1] + \frac{1}{1+v_i^2} \left(0,707 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\psi_{thi}}{2}\right) \\ &- \frac{M_{wi}^2}{M_{wi}^2 - M_{wa}^2} \left[ f_a(q)_1 + \frac{1}{1+v_i^2} \left(1,414 - 0,708 v_i^{1-q} + \frac{v_i^2}{\sqrt{2}} \frac{\psi_{thi}}{2}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad 5.6.3.1$$

Führt man entsprechend den Beziehungen 5.6.2.7 und 5.6.2.8 die Schreibweise

$$f_i(q)_1 = z_1 - \frac{\Psi_{thi}}{2} z_2 \quad 5.6.3.2$$

$$f_a(q)_1 = z_3 - \frac{\Psi_{thi}}{2} z_4 \quad 5.6.3.3$$

mit

$$z_1 = \alpha 0,25 \frac{q+1}{q} \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^{2(1-q)} \left[1 - \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^{2q}\right] \quad 5.6.3.4$$

$$z_2 = \beta 0,5 \frac{q+1}{q-1} \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^{3-q} \left[1 - \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^{q-1}\right] \quad 5.6.3.5$$

$$z_3 = \alpha 0,25 \frac{q+1}{q} \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^{2(1-q)} \left[1 - \left(\frac{r_a}{\bar{r}}\right)^{2q}\right] \quad 5.6.3.6$$

$$z_4 = \beta 0,5 \frac{q+1}{q-1} \left(\frac{r_i}{\bar{r}}\right)^{3-q} \left[1 - \left(\frac{r_a}{\bar{r}}\right)^{q-1}\right] \quad 5.6.3.7$$

ein, so lässt sich die Lieferzahl auf die Form

$$\bar{\varphi}^2 = A_1 + A_2 \frac{\Psi_{thi}}{2} + A_3 \left(\frac{\Psi_{thi}}{2}\right)^2 \quad 5.6.3.8$$

bringen. Für die Abkürzungen erhält man:

$$A_1 = \frac{M_{wa}^2}{M_{wi}^2 - M_{wa}^2} \left\{ \frac{\kappa-1}{2} M_{wi}^2 \left[ z_1 - z_3 + \frac{v_i^2}{2(1+v_i^2)} (1 - v_i^{2q}) \right] + \frac{v_i^2}{1+v_i^2} \right\} + \frac{z_1 M_{wa}^2 - z_3 M_{wi}^2}{M_{wi}^2 - M_{wa}^2} \frac{M_{wi}^2}{M_{wi}^2 - M_{wa}^2} \frac{2 \left(1 - \frac{1}{2} v_i^{1-q}\right)^2}{1+v_i^2} \quad 5.6.3.9$$

$$A_2 = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{wa}^2\right) \frac{M_{wi}^2}{M_{wa}^2 - M_{wi}^2} z_4 - \left(1 - \frac{\kappa-1}{2} M_{wi}^2\right) \frac{M_{wa}^2}{M_{wi}^2 - M_{wa}^2} z_2 + \frac{v_i^2}{1+v_i^2} \left[ \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{wa}^2\right) \frac{M_{wi}^2}{M_{wi}^2 - M_{wa}^2} (v_i^{1-q} - 1) - 1 \right] \quad 5.6.3.10$$

$$A_3 = \frac{v_i^2}{2(1+v_i^2)} \left[ \frac{M_{wi}^2}{M_{wi}^2 - M_{wa}^2} \frac{\kappa-1}{2} M_{wa}^2 (1 - v_i^2) + \frac{M_{wa}^2 - M_{wi}^2 v_i^2}{M_{wi}^2 - M_{wa}^2} \right] \quad 5.6.3.11$$

Die in der Gleichung 5.6.3.8 enthaltene Druckzahl ist noch unbekannt und muss nach bekannten Gitterbelastungszahlen begrenzt werden.

Aus den Gleichungen 5.6.2.19 und 5.6.2.20 erhält man mit  $\varphi_{oi} \approx \varphi_{li}$  für den Innenradius einer Stufe den Ausdruck:

$$\frac{\Psi_{thi}}{2} = 2\sqrt{\varphi_{li}^2 + \rho_{ki}^2} = \left\{ \frac{\left[\left(\frac{t}{l}\right)_i - 1,61\right]^2}{1,3} + 0,85 \right\} \left[ \rho_{ki}^2 - \rho_{ki} \frac{\Psi_{thi}}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\varphi_{thi}}{2}\right)^2 \right]$$

Mit Hilfe der Beziehungen 5.6.3.4 bis 5.6.3.8 und unter Beachtung von

$$\varphi_{li}^2 = \left[ \bar{\varphi}^2 + z_1 - z_2 \frac{\Psi_{thi}}{2} \right] \left(\frac{\bar{r}}{r_i}\right)^2$$

erhält man für die theoretische Druckzahl am Innenradius des Laufgitters den Ausdruck:

$$\frac{\Psi_{thi}}{2} 2 \sqrt{\rho_{ki}^2 + \left[ A + A_2 \frac{\Psi_{thi}}{2} + A_3 \left( \frac{\Psi_{thi}}{2} \right)^2 + z_1 - z_2 \frac{\Psi_{thi}}{2} \right] \left( \frac{\bar{r}}{r_i} \right)^2} = \left\{ \frac{\left[ \left( \frac{t}{l} \right)_i - 1,61 \right]^2}{1,3} + 0,85 \right\} x$$

$$x \left\{ \rho_{ki}^2 - \rho_{ki} \frac{\Psi_{thi}}{2} + \frac{1}{4} \left( \frac{\Psi_{thi}}{2} \right)^2 + \left[ A_1 + A_2 \frac{\Psi_{thi}}{2} + A_3 \left( \frac{\Psi_{thi}}{2} \right)^2 + z_1 - z_2 \frac{\Psi_{thi}}{2} \right] \left( \frac{\bar{r}}{r_i} \right)^2 \right\} \quad 5.6.3.12$$

Diese Gleichung vierten Grades kann iterativ oder nach bekannten Verfahren gelöst werden. Ist die Druckzahl bekannt, kann die Lieferzahl, die Umfangsgeschwindigkeit und die Energieumsetzung im Laufgitter nach den Gleichungen 5.6.3.1; 5.6.2.17 und 5.6.2.18 ermittelt werden.

Die Auswertung der Gleichungen wurde unter Berücksichtigung der Bedingungen a) bis e) des Abschnittes 5.5.2 durchgeführt. Für die relativen Anströmmachzahlen der Profilvergitter wurden beispielsweise  $M_{wa} = 0,8$  am Außenradius und  $M_{wi} = 0,72$  am Innenradius des Laufgitters eingesetzt. Die Erfahrungen an ausgeführten Axialverdichtern zeigen, dass diese Anströmmachzahlen im Laufgitter beherrschbar sind. Wie die Abb.: 1.18 zeigt, sind die Anströmmachzahlen zum Leitgitter kleiner als die Anströmmachzahlen zum Laufgitter am Innenradius. Versuchsergebnisse am ebenen Gitter lehren, dass bei geeigneter Profilsystematik die im Leitgitter auftretenden Anströmmachzahlen vertreten werden können. Zur Bestimmung der Korrekturfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  der Drallströmung wurde ein Seitenverhältnis der Profilvergitter von

$$\frac{h}{l} \approx 4,4 - 5,4(v_i - 0,3)$$

angenommen. Dieses Seitenverhältnis der Gitterprofile ist für Axialverdichter in Leichtbauweise geeignet.

Die Auswertungsergebnisse der angeführten Gleichungen sind auf den Abbildungen 5.6.3.1 bis 5.6.3.3 in Abhängigkeit vom Drallverteilungsexponenten  $q$  dargestellt.

Aufgetragen wurde  $\frac{\dot{m}}{r_a^2} = f(q)$ ;  $\frac{h_{th}}{T_1^*} = f(q)$  und  $\bar{\varphi} = f(q)$  mit den Parametern  $v_i$  und der

bezogenen Umfangsgeschwindigkeit  $\frac{u_a}{\sqrt{T_1^*}}$ . Der Übergang in der Kinematik von  $\left( \frac{t}{l} \right)_i \geq 0,6$

nach  $\left( \frac{t}{l} \right)_i = 0,6$  am Innenradius eines Schaufelgitters macht sich besonders in der

Darstellung  $\frac{h_{th}}{T_1^*} = f(q)$  bemerkbar. Im Bereich oberhalb der Linie  $\frac{t}{l} = 0,6$ , wo das

Teilungsverhältnis der Profilvergitter konstant gehalten wird, steigen die Kurvenzüge für die in den Stufen zulässigen Energieumsetzungen mit größer werdendem Drallverteilungsexponenten  $q$  weniger stark an als im Bereich unterhalb der Linien  $\left( \frac{t}{l} \right)_i = 0,6$ . Diese Erscheinung hängt mit der Begrenzung der theoretischen Druckzahl nach

den bekannten Gitterbelastungszahlen zusammen. Die  $\left( \frac{t}{l} \right)_i = 0,6$ -Grenze wurde als kennzeichnende Größe in alle Abbildungen eingetragen. Weiterhin wurde die Lieferzahl

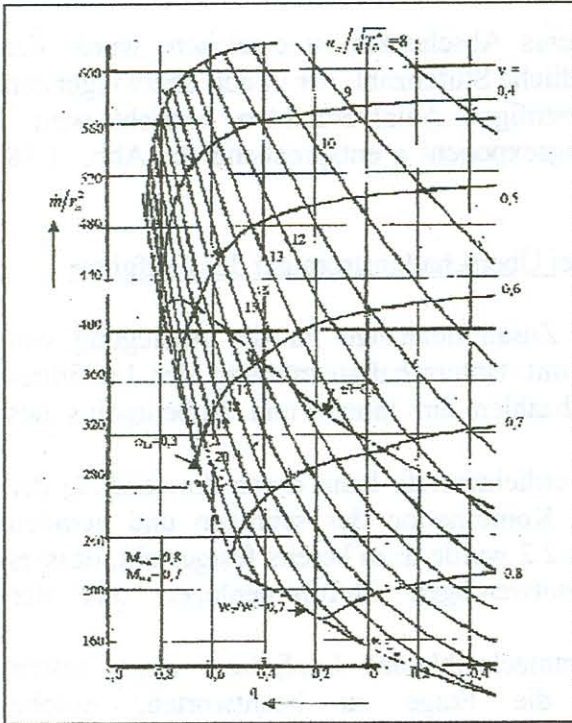


Abb.: 5.6.3.1 Massendurchsatz für Grenzleistungsstufen. (INA- Normalatmosphäre)

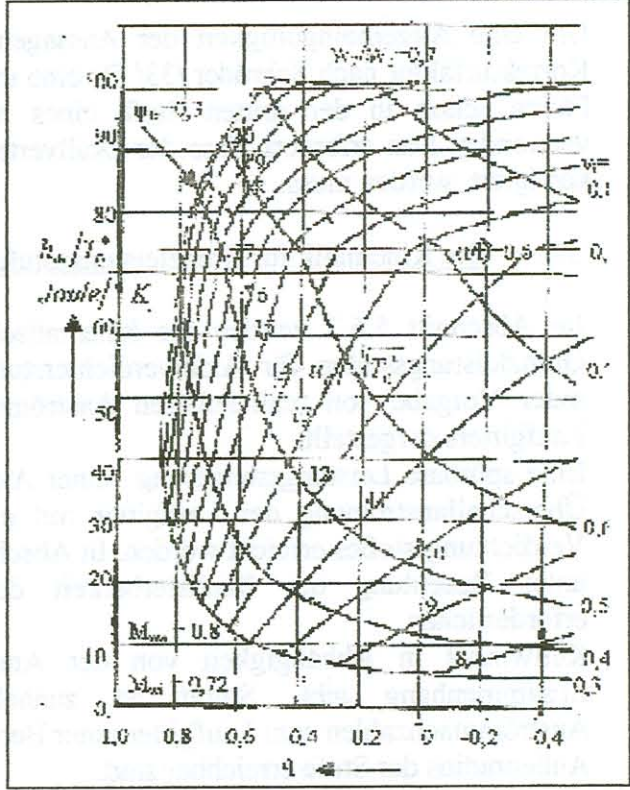


Abb.: 5.6.3.2 Zulässige Energieumsetzung in Grenzleistungsstufen.

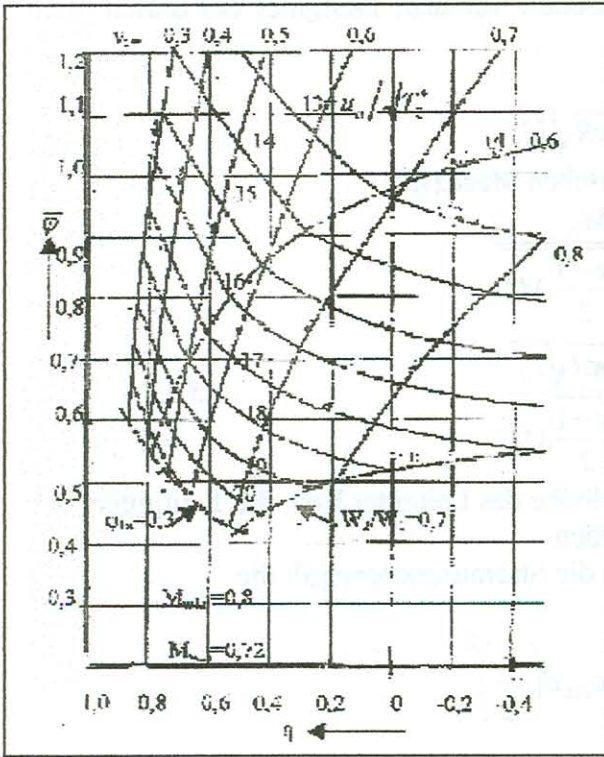


Abb.: 5.6.3.3 Lieferzahlen am Kontinuitätsradius.

Am Außenradius einer Stufe mit  $\phi_a = 0.3$  begrenzt. Damit erreicht man an den Außenradien der Profilstufen den in der Praxis noch realisierbar sind.

Da entsprechend der Gleichung 5.6.1.1 die Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters die entscheidende Größe zur Erhöhung des Stufendruckverhältnisses ist, wird man in der Praxis jene Drallverteilungsexponenten  $q$  verwirklichen, die sich durch den Schnittpunkt einer Kurve für ein gewähltes Nabenverhältnis mit der Kurve für die maximal mögliche Umfangsgeschwindigkeit eines Laufgitters ergeben. Die auf den Abbildungen 5.6.3.1 bis 5.6.3.3 angegebenen Anströmmachzahlen wurden nur als Beispiel angenommen. Selbverständlich können auch andere in der Praxis noch zu verwirklichende Anströmmachzahlen zur Ermittlung ähnlicher Diagramme benutzt werden.

Um eine Allgemeingültigkeit der Aussagen dieses Abschnittes zu erreichen, wurde der Korrekturfaktor nach Schröder /33/ für eine unendliche Stufenzahl, der in den überwiegenden Fällen schon in der dritten Stufe eines mehrstufigen Axialverdichters erreicht wird, verwendet. Das erfordert, dass der Drallverteilungsexponent  $q$  entsprechend der Abb.: 1.18 korrigiert werden muss.

#### 5.6.4 Die Kinematik für Grenzleistungsstufen bei Überschallanströmung der Laufgitter.

Im Abschnitt 5.6.3 wurden die kinematischen Zusammenhänge für die Auslegung von Grenzleistungsstufen für Axialverdichterstufen mit Unterschallanströmung der Laufgitter unter Vorgabe von realisierbaren Anströmmachzahlen am Innen- und Außenradius des Laufgitters dargestellt.

Eine spürbare Leistungssteigerung einer Axialverdichterstufe kann durch Anwendung der Überschallanströmung der Laufgitter mit einer Kombination des schrägen und geraden Verdichtungsstoßes erreicht werden. In Abschnitt 2.2 wurde dazu bereits festgestellt, dass es unter Beachtung der Realisierbarkeit der notwendigen Stoßfrontenlagen und der erforderlichen

Keilwinkel in Abhängigkeit von der Anströmmachzahl des Laufgitters einen festen Zusammenhang gibt. Somit ist zunächst die Frage zu beantworten, welche Anströmmachzahlen zum Laufgitter unter Berücksichtigung eines kleinstmöglichen Außenradius der Stufe erreichbar sind.

Aus ökonomischen Gründen soll der Strömungsquerschnitt  $F_0$  in der Strömungsebene 0 vor einem Vorleitgitter bzw.  $F_1$  in der Strömungsebene I vor dem Laufgitter bei Stufen ohne Vorleitgitter einen Kleinstwert aufweisen.

Für die axiale Strömungsgeschwindigkeit gilt:

$$c_{ax0} = M_0^* \sqrt{\kappa R} \sqrt{T_0^*}$$

oder mit der gasdynamischen Beziehung zur statischen Machzahl:

$$M_0^* = \frac{M_0}{\sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2}}$$

$$c_{ax0} = \frac{M_0 \sqrt{\kappa R} \sqrt{T_0^*}}{\sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2}} \quad 5.6.4.1$$

Diese Geschwindigkeit kann entlang der Schaufelhöhe des Leitgitter bzw. des Laufgitters bei Stufen ohne Vorleitgitter konstant angesehen werden.

Bei gegebenen Massendurchsatz des Gases durch die Strömungsebene gilt die Durchsatzkennzahl:

$$K = \frac{\dot{m}}{\pi r_a^2} = \int_{v_i}^1 \rho c_{ax0} d\left(\frac{r}{r_a}\right)^2$$

Die Integration ergibt:

$$K = \frac{\dot{m}}{\pi r_a^2} = (1 - v_i^2) \rho c_{ax0} \quad 5.6.4.2$$

Für die Dichte des Gases gilt:

$$\rho = \frac{\rho^*}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}} \quad 5.6.4.3$$

Mit den Beziehungen 5.6.4.2 bis 5.6.4.3 ergibt sich für die Durchsatzkennzahl:

$$K = \frac{\dot{m}}{\pi r_a^2} = \sqrt{\frac{\kappa}{R}} \frac{p_0^*}{\sqrt{T_0^*}} \frac{M_0 (1 - v_i^2)}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2\right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}} \quad 5.6.4.4$$

Den größten Massendurchsatz durch die genannten Strömungsebenen erhält man für  $M_0 = 1,0$ . Setzt man diesen Wert in die Gl.: 5.6.4.4 ein und dividiert diesen Ausdruck nochmals durch die Gl.: 5.6.4.4, so ergibt sich für das Durchmesser Verhältnis:

$$\frac{D}{D_{\min}} = \frac{r_a}{r_{a\min}} = \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2\right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}}{M_0 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2\right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}}} \quad 5.6.4.5$$

Wie die Gl.: 5.6.4.2 zeigt, ist eine Veränderung der Durchsatzkennzahl nur durch das Radienverhältnis  $v_i = \frac{r_i}{r_a}$  veränderbar.

Es ist:

$$F = r_a^2 \pi (1 - v_i^2)$$

Mit den Grenzfall

$$F_{\min} = r_a^2 \pi$$

Für das Radienverhältnis ergibt sich hier:

$$\frac{r_a}{r_{a\min}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_i^2}}$$

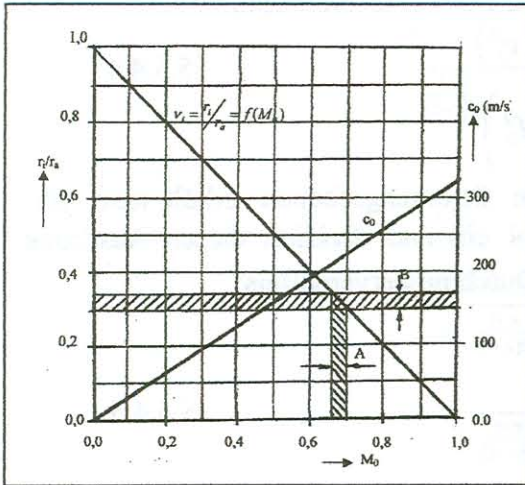
Setzt man diesen Ausdruck mit den der Beziehung 5.6.4.5 gleich, erhält man:

$$\frac{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2\right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}}{M_0 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2\right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}} = \frac{1}{1 - v_i^2}$$

oder durch Umstellung dieses Ausdruckes:

$$v_i = \frac{r_i}{r_a} = \sqrt{1 - \frac{M_0 \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2\right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2\right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}}} \quad 5.6.4.6$$

Das bedeutet aber, dass zu jeder Machzahl  $M_0$  ein ganz bestimmtes Radienverhältnis  $v_i = \frac{r_i}{r_a}$  der Verdichterstufen in den genannten Strömungsebenen zugeordnet ist das nicht unterschritten werden darf wenn man den kleinstmöglichen Außenradius der Stufe anstrebt.



A = Toleranzfeld der derzeitigen Grenze für die Schaufelbefestigung im Laufgitter.

B = Toleranzfeld der maximalen Zuströmmachzahl

Abb.: 5.6.4.1 Zusammenhang zwischen der Machzahl  $M_0$  und dem Radienverhältnis  $v_i$

( $c_0$  für INA - Normalatmosphäre)

Eine Auswertung der Gleichung 5.6.4.6 zeigt die Abb.: Axialgeschwindigkeit des Gases für die INA- Notmalatmosphäre zur Übersicht eingezeichnet.

Der Bereich A kennzeichnet den derzeitigen Toleranzbereich für die Befestigung der Laufgitterprofile und der Bereich B den Toleranzbereich für die Wahl der Machzahl  $M_0$  Infolge des Toleranzbereiches A.

Die Werte der Abb.: 5.6.4.1 gelten nur unter der Voraussetzung, dass die axialen Geschwindigkeiten in den genannten Strömungsebenen über den Radius konstant sind und nicht durch induzierte Geschwindigkeiten Infolge der Zirkulationsbewegungen an den Profilen der nachfolgenden Profulgitter beeinflusst werden.

Für Axialverdichterstufen mit Überschallströmung des Laufgitters im relativen

Strömungssystem bietet sich ein Vorleitgitter zur Erhöhung der Anströmmachzahl  $M_{w1}$  des Laufgitters an. Der Grenzfall zur Erhöhung der Anströmmachzahl  $M_{w1}$  im relativen Strömungssystem des Laufgitters ergibt sich, wenn im absoluten Strömungssystem am Vorleitgitteraustritt die Schallgeschwindigkeit bzw. die Machzahl  $M_{c1} = 1$  auftritt.

Die Abb.:5.6.4.2 zeigt schematisch ein Vorleitgitter und das zugehörige Geschwindigkeitsvektordiagramm am Laufgittereintritt.

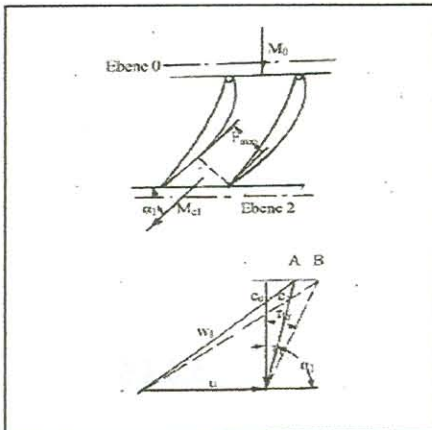


Abb.: 5.6.4.2 Die Strömungsgeschwindigkeiten am Vorleitgitter.

Bei verlustloser Strömung sind nach dem Hauptabschnitt für die Gitterprofile zur Erreichung der Schallgeschwindigkeit  $M_{c1} = 1,0$  folgende Abströmwinkel  $\alpha_1$  aus dem Vorleitgitter in Abhängigkeit von der Machzahl  $M_0$  erforderlich:

$M_0$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\alpha_1^0$	38,96	48,27	57,31	66,02	74,83
$\tau_1^0$	51,04	39,25	32,69	23,98	15,17

Da entsprechend der Abb.: 5.6.4.2 für den Winkel

$$\alpha_1 + \tau_1 = 90^0$$

sein muss, sind die entsprechenden Winkelwerte für  $\tau_1$  in obiger Tabelle mit eingetragen. Durch die Vorgabe der Abströmmachzahl  $M_{c1} = 1,0$  aus dem Vorleitgitter lässt sich ab Punkt B der Abb.: 5.6.4.2 eine konstante Anströmmachzahl  $M_0$  nicht mehr aufrecht erhalten. Solange der Winkel  $\tau_{krit}$  größer ist als  $\tau_1$  Ist eine Beeinflussung der vorgesehenen Anströmmachzahl  $M_0$  nicht möglich.



Es muss sein:

$$\tau_1 \leq \tau_{krit} \quad 5.6.4.7$$

Es ist nun zu prüfen, ob diese Bedingung zutreffend ist. Für die Geschwindigkeit  $c_1$  gilt:

$$c_1 = M_{cl}^* \sqrt{\kappa R} \sqrt{T_1^*}$$

oder mit der gasdynamischen Beziehung

$$M_{cl}^* = \frac{M_{cl}}{\sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{cl}^2}}$$

auch:

$$c_1 = \frac{M_{cl} \sqrt{\kappa R} \sqrt{T_1^*}}{\sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{cl}^2}}$$

Führt man noch die Grenzbedingung  $M_{cl} = 1,0$  für das Vorleitgitter ein, so folgt:

$$c_1 = \frac{\sqrt{\kappa R} \sqrt{T_1^*}}{\sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2}}}$$

Mit der Gleichung 5.6.4.1 und  $T_0^* = T_1^*$  ergibt sich:

$$\cos \tau_{krit} = \frac{c_0}{c_1} = \frac{M_0 \sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2}} \quad 5.6.4.8$$

Die einzelnen Werte sind:

$M_0$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\tau_{krit}$	64,44	57,68	50,59	42,92	34,39

Ein Vergleich der Werte zeigt, dass die Bedingung der Gl.: 5.6.4.7 bei allen  $M_0$ -Werten eingehalten wird und eine Beeinflussung der vorgesehenen Machzahlen  $M_0$  nicht gegeben ist.

Nach den bisherigen Ausführungen kann man dazu übergehen sich eine Vorstellung über die Zuströmmachzahl  $M_{w1}$  zum Laufgitter zu verschaffen. Entsprechend der Abb.: 5.6.4.2 kann für die Austrittsgeschwindigkeit  $c_1$  des Gases aus dem Vorleitgitter

$$c_1 = \frac{c_0}{\sin \alpha}$$

und mit der Gl.: 5.6.4.1

$$c_1 = \frac{M_0 \sqrt{\kappa R} \sqrt{T_0^*}}{\sin \alpha \sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2}} \quad 5.6.4.9$$

gesetzt werden. Analog gilt auch für die entgegen der Umfangsgeschwindigkeitsrichtung des Laufgitters gerichtete Umfangskomponente der Geschwindigkeit  $c_1$ .

$$c_u = c_1 \cos \alpha_1 = \frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} \frac{M_0 \sqrt{\kappa R} \sqrt{T_0^*}}{\sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2}} \quad 5.6.4.10$$

Man betrachte einen koaxialen Zylinderschnitt durch eine Axialverdichterstufe. Die Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters sei  $u$  (m/s) und die absolute Zuströmgeschwindigkeit entsprechend der Gl.: 5.6.4.9.

Die vektorielle Addition der Geschwindigkeit des Gases ergibt die relative Anströmgeschwindigkeit des Gases zum Laufgitter:

$$w_1^2 = c_0^2 + (u + c_u)^2 \quad 5.6.4.11$$

oder als Machzahl ausgedrückt:

$$M_{w1}^2 = \frac{w_1^2}{a^2} = \frac{w_1^2}{\kappa R T_1}$$

Für die statische Temperatur des Gases wird

$$T_1 = T_1^* - \frac{\kappa - 1}{2\kappa R} c_1^2$$

gesetzt. Damit erhält man:

$$M_{w1}^2 = \frac{c_0^2 + u^2 + 2u\Delta c_u + c_u^2}{\kappa R T_1^* - \frac{\kappa - 1}{2\kappa R} c_1^2} = \frac{c_0^2 + u^2 + 2uc_1 \cos \alpha_1 + c_1^2 \cos^2 \alpha_1}{\kappa R T_1^* - \frac{\kappa - 1}{2\kappa R} c_1^2}$$

Unter Verwendung der Gl.: 5.6.4.12 erhält man den etwas umständlichen Ausdruck

$$M_{w1}^2 = \frac{A + B + C}{D} \quad 5.6.4.12$$

Dabei ist:

$$A = \frac{M_0^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2} + \left( \frac{u}{\sqrt{T_1^*}} \right)^2 \frac{1}{\kappa R}$$

$$B = 2 \frac{u}{\sqrt{T_1^*}} \frac{1}{\kappa R} \frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha_1} \frac{M_0}{\sqrt{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2}}$$

$$C = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{M_0^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2}$$

$$D = 1 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{M_0^2}{\sin \alpha_1 \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2 \right)}$$

Die Gleichung 5.6.4.12 gilt allgemein.

Weiterhin werden die zwei Spezialfälle betrachtet:

a) Die Verdichterstufe mit Vorleitgitter.

Die Austrittsgeschwindigkeit des Gases aus dem Vorleitgitter entspricht der Schallgeschwindigkeit. Wie im Abschnitt 4.2 angedeutet wurde, ist die Verlustermittlung für das Vorleitgitter, insbesondere durch die induzierten Geschwindigkeiten der Sekundärwirbel und den Winkelabweichungen von den regulären Werten, über den Radius der Stufe sehr schwierig. Deshalb soll hier ein verlustfreies Vorleitgitter angenommen werden.

Für den Strömungswinkel gilt dann der im Hauptabschnitt „Das Gitterprofil“ unter Beschleunigungsgitter angegebenen Ausdruck mit  $\alpha_1 = \alpha_{1\max}$

$$\sin \alpha_{1\max} = M_0 \left[ \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2}}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_0^2} \right]^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}$$

In den Ausdrücken B, C und D ist somit für den Austrittswinkel des Gases aus dem Vorleitgitter zu setzen.

$$\alpha_1 = \alpha_{1\max}$$

b) Die Verdichterstufe ohne Vorleitgitter. Die Zuströmung des Gases erfolgt senkrecht zur Laufgitterfront und der Winkel beträgt  $\alpha_1 = 90^\circ$ .

Für die Machzahl der Relativgeschwindigkeit zum Laufgitter ergibt dann die einfache Beziehung:

$$M_{w1}^2 = \frac{\frac{M_0^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_0^2} + \left( \frac{u_a}{\sqrt{T_0^*}} \right)^2 \frac{1}{\kappa R}}{1 - \frac{\frac{\kappa-1}{2} M_0^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_0^2}} \quad 5.6.4.13$$

Die Gleichungen 5.6.4.12 und 5.6.4.13 wurden für die in der Praxis vorkommenden Bereiche der Umfangsgeschwindigkeiten der Laufgitter für Überschallanströmung von  $\frac{u_a}{\sqrt{T_0^*}} = 6$  bis 26

sowohl für Stufen mit und ohne Vorleitgitter ausgewertet. Diese Werte zeigt die Abb. 5.6.4.3.

Durch den Parameter  $\frac{u_a}{\sqrt{T_0^*}}$  kann jede Anströmmachzahl  $M_{w1}$  zum Laufgitter einem

bestimmten Radius der Verdichterstufe zugeordnet werden. Das verwendbare Arbeitsfeld einer Verdichterstufe mit Überschallanströmung des Laufgitters wird durch

- die derzeitige Festigkeitsgrenze des Konstruktionsmaterials der Profile des Laufgitters
- den Linien a und b für den kleinsten Außenradius der Stufen nach Abb.: 5.6.4.1
- der technologischen Grenze A für die Profilschaufeln des Laufgitters am Innenradius der Stufe
- die beherrschbaren Anströmmachzahlen zum Laufgitter am Innenradius der Stufe

eingengt. Bei Axialverdichterstufen ohne Vorleitgitter liegen die Grenzwerte der Anströmmachzahlen etwa zwischen  $M_{w1} \approx 1,45$  am Außenradius und  $M_{w1} \approx 0,79$  am Innenradius des Laufgitters die beherrscht werden können. Bei Axialverdichterstufen mit Vorleitgitter liegen die Grenzwerte der Anströmmachzahlen etwa zwischen  $M_{w1} \approx 1,75$  am Außenradius und  $M_{w1} \approx 1,03$  am Innenradius des Laufgitters.

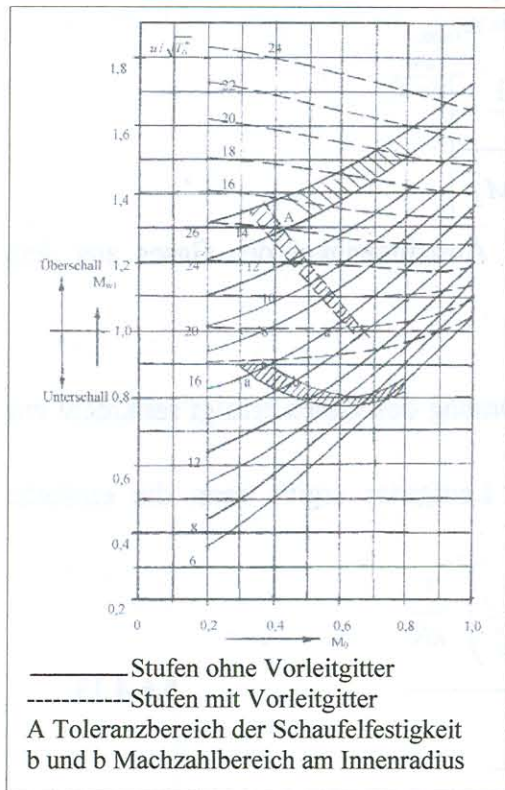


Abb.: 5.6.4.3 Erreichbare Anströmmachzahlen am Laufgittereintritt.

Gegensatz zum relativen Strömungssystem im Laufgitter, Unterschallgeschwindigkeiten vorhanden sind. Auf der Basis dieser Unterschallgeschwindigkeiten beruht auch die Ableitung der Axialgeschwindigkeitsverteilungen in den Strömungsebenen I und II in Abschnitt 5.1. Nach den Ansätzen von Schröder /33/ ist die Anwendung seines Näherungsverfahrens (siehe Abschnitt 5.2) auch für eine linear veränderliche Energieumsetzung im Laufgitter anwendbar. Da nun

$$\Delta w_u = \Delta c_u$$

ist, kann auch die in Abschnitt 5.1 angegebene Gleichung für die Axialgeschwindigkeitsverteilung

$$\left(\frac{c_{ax}}{u_a}\right)^2 = \varphi_a^2 + \alpha A \mp \beta B - C$$

für Stufen mit Überschallanströmung der Laufgitter angewendet werden.

Die hier betrachteten Verdichterstufen werden vorwiegend für Zweistromtriebwerke der Luftfahrt in Zwei- bis Dreiwellenbauart als Einzelstufe dem Hauptverdichter vorgeschaltet.

Damit tritt das Gas mit konstanter Temperatur  $T_0^* = T_1^*$  in die Stufe ein und das Temperaturglied C kann entfallen. Für die Axialgeschwindigkeitsverteilung vor dem Laufgitter gilt dann:

$$\left(\frac{c_{ax}}{u_a}\right)^2 = \varphi_a^2 + \alpha A - \beta B$$

Soll die Bedingung konstanter Axialgeschwindigkeit in der Stufenebene I eingehalten werden, gilt die Bedingung

$$138 \qquad \alpha A = \beta B \qquad 5.6.4.14$$

Für die Realisierung der Werte für Stufen Schwierigkeiten gesehen die vorwiegend durch die Beeinflussung der Grundgeschwindigkeiten durch induzierte Geschwindigkeiten der im Außenradius- und Innenradiusbereich des Vorleitgitters auftretenden Sekundärwirbeln sowie deren Grenzschichtbeeinflussung zu suchen sind. Dieses Problem hat sich bisher einer genaueren Behandlung entziehen können und bedarf noch einer genaueren Forschungsarbeit. Dies ist auch der Grund, dass bei der weiteren Betrachtungen die Stufen mit Vorleitgittern nicht weiter betrachtet werden.

Die in der Abb.: 5.6.4.3 angegebenen Anströmmachzahlen  $M_{w1}$  zum Laufgitter setzen eine konstante Axialgeschwindigkeit des Gases über den Radius des Laufgitters in Strömungsebene I bei Stufen ohne Vorleitgitter voraus.

Die bisherigen Betrachtungen zeigen, dass in der Strömungsebene I (vor Laufgitter) und in der Strömungsebene II (hinter Laufgitter), im

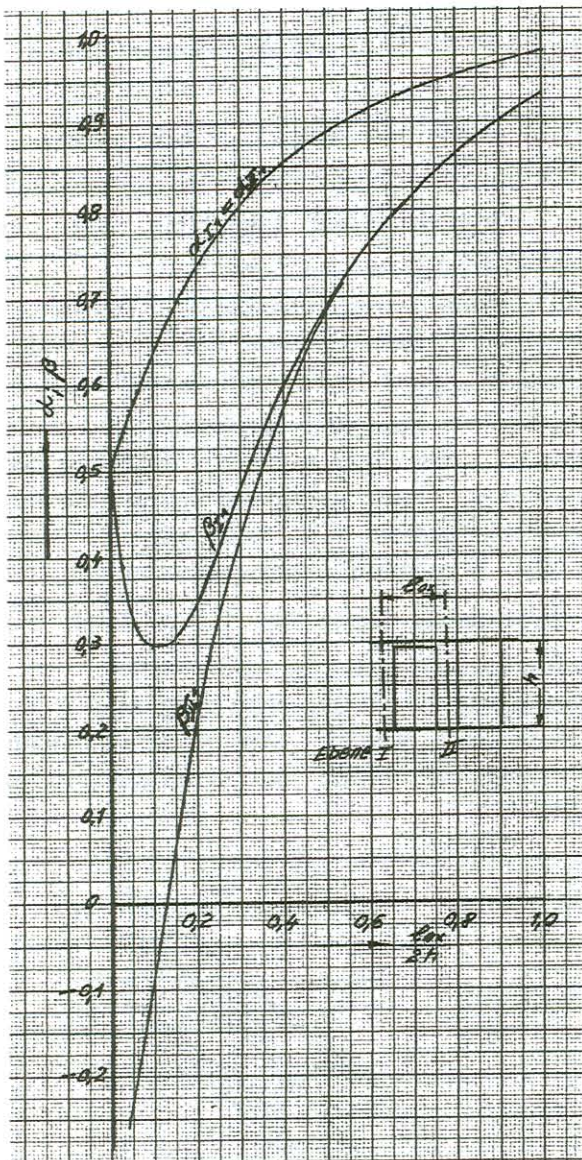


Abb.: 5.6.4.4 Korrekturwerte der Drallströmung für eine Einzelstufe ohne Vorleitgitter.

absolute Größen einzusetzen.

Die einzelnen Werte der Korrekturfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  sind auf Abb.: 5.6.4.4 dargestellt. Die einzelnen Werte sind:

1	$\lambda = \pi l_{ax} / 2h$	0,1	0,2	0,3	0,5	0,8	1,2	2,0	$\pi$
2	$l_{ax} / 2h$	0,0318	0,06336	0,09555	0,15925	0,2548	0,382	0,6365	1,0
3	$e^{-\lambda}$	0,90484	0,81875	0,74082	0,60654	0,44933	0,30120	0,13534	0,04328
4	$e^{-3\lambda}$	0,74882	0,54882	0,40658	0,22314	0,09072	0,02732	0,00247	0,000081
5	$\alpha_{II} = 1 - (1/2)e^{-\lambda}$	0,5475	0,5906	0,6295	0,6977	0,7759	0,8494	0,9323	0,9786
6	(3)-(4)	0,15601	0,2699	0,3342	0,38399	0,35861	0,27388	0,13286	0,0432
7	$\beta_{II} = (6) - (5)$	-0,3914	-0,3206	-0,2952	-0,3143	-0,4172	-0,5755	-0,7994	-0,9354
8	$(3/2)e^{-\lambda}$	1,35726	1,2282	1,11123	0,9098	0,67399	0,4518	0,20301	0,06492
9	$\beta_{II} = 1 - (8)$	-0,3572	-0,2282	-0,1112	+0,0902	+0,3260	+0,5482	+0,7969	+0,93508
10	$\beta_{II} / \alpha_{II}$	0,7150	0,54295	0,4698	0,45048	0,5378	0,67753	0,8574	0,955

Die Korrekturfaktoren für eine Einzelstufe können nach Abschnitt 5.2 (Seite 87 bis 89) Wie folgend angegeben werden:

### Stufenebene I

$$\alpha_{II} = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda}{2h}}$$

$$b_{II} = e^{-\frac{\lambda}{2h}} - e^{-\frac{3\lambda}{2h}}$$

und mit

$$\beta = \sum b - \alpha_{II}$$

$$\beta_{II} = e^{-\frac{\lambda}{2h}} - e^{-\frac{3\lambda}{2h}} - \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda}{2h}} \right)$$

$$\beta_{II} = \frac{3}{2} e^{-\frac{\lambda}{2h}} - e^{-\frac{3\lambda}{2h}} - 1$$

### Stufenebene II

$$\alpha_{III} = 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda}{2h}}$$

$$b_{III} = 2 - e^{-\frac{\lambda}{2h}} - e^{-\frac{\lambda}{2h}} = 2 \left( 1 - e^{-\frac{\lambda}{2h}} \right)$$

$$\beta_{III} = 2 - 2e^{-\frac{\lambda}{2h}} - \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{\lambda}{2h}} \right)$$

$$\beta_{III} = 1 - \frac{3}{2} e^{-\frac{\lambda}{2h}}$$

In die Gleichung 5.6.4.14 sind, wie auch in die Gleichung 5.1.17 sind die  $|\beta|$ -Werte als

In die Gleichung 5.6.4.14 sind, wie auch in die Gl.: 5.1.17 die  $\beta$ -Werte als absolute Größen ( $|\beta|$ ) einzusetzen.

Die einzelnen Werte der Korrekturfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  sind auf der Abb.: 5.6.4.4 dargestellt.

Da die Korrekturwerte  $\alpha$  und  $|\beta|$  in der Gl.: 5.6.4.14 in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis  $l/2h$  der Laufgitter bekannt ist, hängt die Gültigkeit dieser Gleichung von den kinematischen Größen A und B (siehe die Gleichungen 5.1.17a und 5.1.27b) ab.

Hier sind noch einige Bemerkungen zur Axialverdichterstufe ohne Vorleitgitter zu machen.

Das angesaugte Gasvolumen strömt einer Stufe ohne Vorleitgitter dem Laufgitter ohne Vordrall, d.h. axial zu. Der kinematische Reaktionsgrad  $\rho_k$  der Drallverteilungsexponent  $q$

Und der Faktor K, der die lineare Energieumsetzung im Laufgitter beschreibt, sind nicht mehr frei wählbar. Zur Ermittlung des K-Wertes in Verbindung mit der Einhaltung der Bedingung nach Gl.: 5.6.4.14 müssen die Kennwerte des Gases durch die anzuwendende Verdichtungsstoßkombination bekannt sein. Diese lassen sich entsprechend der Gl.: 5.6.4.13 allgemein in Abhängigkeit von der bezogenen Umfangsgeschwindigkeit  $u/\sqrt{T_0^*}$  darstellen. Diese auf der Grundlage errechneten Werte des Gases durch die Stoßkombination des schrägen und geraden Verdichtungsstoßes zeigt die Abb.: 5.6.4.5.

Durch diese Abhängigkeit dieser Werte von der bezogenen Umfangsgeschwindigkeit können diese Werte jedem Radius des Laufgitters zugeordnet werden. Die zu erwartenden Geschwindigkeitsvektordiagramme und die zu erwartende Form der Laufgitterprofile zeigt die Abb.: 5.6.4.6

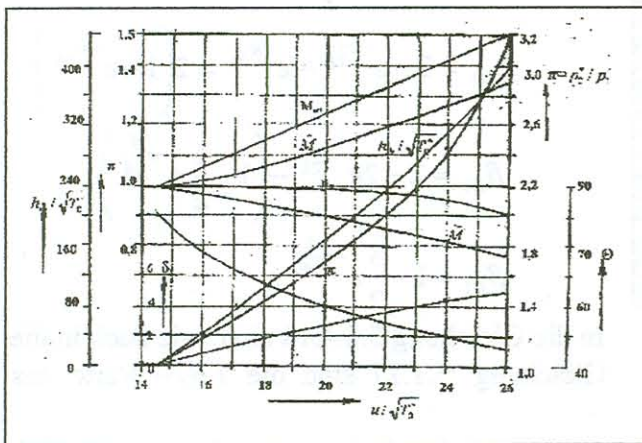


Abb.: 5.6.4.5 Einige Werte der des Gases durch die Verdichtungsstoßkombination in Abhängigkeit der bezogenen Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters.

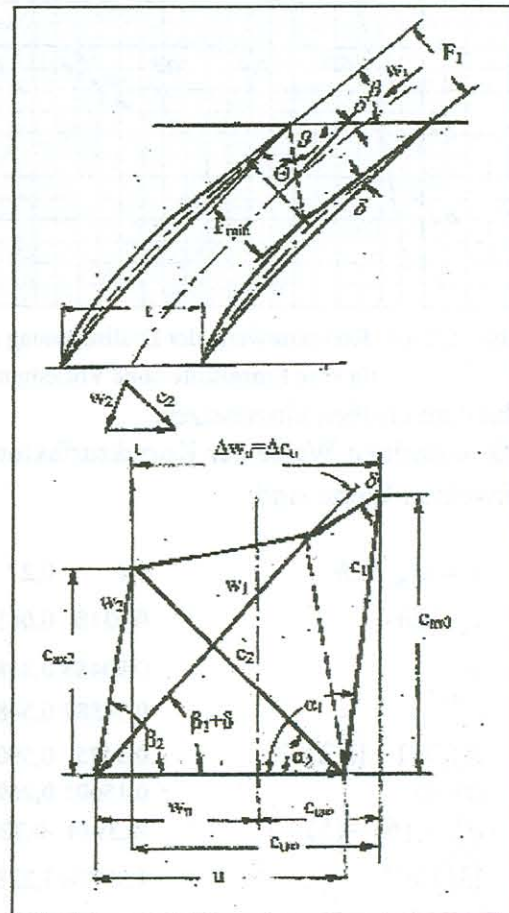


Abb.: 5.6.4.6 Schematische Darstellung der Form der Laufgitterprofile mit den zugehörigen Geschwindigkeitsvektordiagrammen.

Die Abbildungen 5.6.4.3 und 5.6.4.5 zeigen aber auch, dass eine Überschallanströmgeschwindigkeit des Gases im relativen Strömungssystem nur bis zu einem bestimmten Radiusbereich des Laufgitters möglich ist und die Energieumsetzung durch die Verdichtungsstoßkombination nicht linear ist.

Der Laufgitterradius an dem die Anströmmachzahl gerade den Wert  $M_{w1} = 1,0$  hat ergibt sich aus Gl.: 5.6.4.13 zu:

$$\frac{u}{\sqrt{T_0^*}} = \sqrt{\kappa R \left[ 1 - M_0^2 \frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2}}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2} \right]} \quad 5.6.4.15$$

Der sich aus dieser Gleichung ergebende Radius ist größer als der Innenradius des Laufgitters. Weiterhin zeigt die Abb.: 5.6.4.5. dass die Energieumsetzung durch die Verdichtungsstoßkombination über den Radius des Laufgitters nicht linear veränderlich ist und am Radius nach Gl.: 5.6.4.15 nicht mehr vorhanden ist.

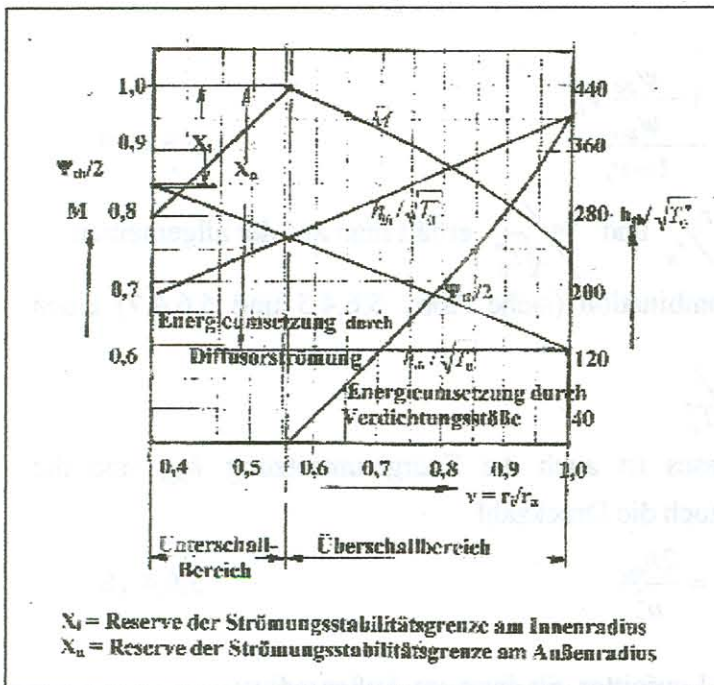
Aus diesem Grunde wird die Energieumsetzung im Laufgitter am Innenradius entsprechend den Ausführungen des Abschnittes 3.3 mit

$$\psi_{thi} \leq 2,0$$

und am Außenradius entsprechend einem gewählten Wert für die bezogenen Umfangsgeschwindigkeiten  $\left( \frac{u_a}{\sqrt{T_0^*}} \right)$  nach den Werten der Abb.: 5.6.4.5 gewählt und über den Radius

des Laufgitters linear verbunden. Damit erhält man die auf Abb.: 5.6.4.7 als Beispiel

angegebenen charakteristischen Werte und die Aufteilung der



- Energieumsetzung im Laufgitter durch die Verdichtungsstoßkombination
- Energieumsetzung im Laufgitter durch Diffusorströmung.

Die Größen  $x_i$  und  $x_a$  geben die Reserve gegenüber dem Stabilitätskriterium der Strömung nach Abschnitt 3.3 an.

Abb.: 5.6.4.7 Charakteristische Werte einer Verdichterstufe mit Überschallanströmung des Laufgitters.

Nach Abschnitt 5.2 wissen wir, dass die Zirkulation um die Profile der Lauf- und Leitgitter die Axialgeschwindigkeitsverteilung über den Radius in der Strömungsebene I und II des Laufgitters beeinflussen. Aus der Bedingung konstanter Axialgeschwindigkeiten in der Strömungsebene vor dem Laufgitter (Ebene I) und den bekannten Korrekturwerten  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  (siehe Abb.: 5.6.4.4) ergibt sich nach Gl.: 5.6.4.14 auch:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{A}{B} \quad 5.6.4.16$$

Da aber das Verhältnis  $\beta_1/\alpha_1$  nach Abb.: 5.6.4.4 eine Funktion des Seitenverhältnisses  $l_{ax}/2h$  der Profilhüter ist, kann die Gleichung 5.6.4.16 nur mit einem ganz bestimmten Seitenverhältnis  $l_{ax}/2h$  eingehalten werden. Das bedeutet, dass die Größen A und B nach den Gleichungen 5.1.17a und 5.1.17b für die Strömungsverhältnisse einer Verdichterstufe ohne Vorleitgitter mit konstanter Axialgeschwindigkeit über den Radius in der Strömungsebene I vor dem Laufgitter umgerechnet werden muss.

Für den K-Wert nach Gl.: 5.1.7, der die linear veränderliche Energieumsetzung im Laufgitter über den Radius beschreibt, gilt:

$$K = \frac{1 - \frac{\Delta c_{ui}}{\Delta c_{ua}} v_i}{1 - v_i}$$

Mit

$$\Delta c_{ui} = u_i \frac{\psi_{thi}}{2} \quad \text{und} \quad \Delta c_{ua} = u_a \frac{\psi_{tha}}{2}$$

folgt:

$$K = \frac{1 - \psi_{thi} v_i^2}{1 - v_i} \quad 5.6.4.17$$

Für die gewählten Stufenparameter  $v_i = \frac{r_i}{r_a}$  und  $u_a/\sqrt{T_0^*}$  erhält man aus der allgemeinen

Durchrechnung der Verdichtungsstoßkombination (siehe Abb.: 5.6.4.5 und 5.6.4.7) einen Wert

$$\frac{h_{tha}}{T_0^*}$$

Mit der Ansaugtemperatur  $T_0^*$  des Gases ist auch die Energieumsetzung  $h_{tha}$  und die Umfangsgeschwindigkeit  $u_a$  und somit auch die Druckzahl

$$\psi_{tha} = \frac{2h_{tha}}{u_a^2} \quad 5.6.4.18$$

bekannt.

Für den kinematischen Reaktionsgrad im Laufgitter gilt dann am Außenradius:

$$\rho_{ka} = 1 - \frac{\psi_{tha}}{4} \quad 5.6.4.19$$

In den kinematischen Ausdrücken A und B der Gl.: 5.6.4.16 ist noch eine Aussage über den Drallverteilungsexponenten  $q$  zu machen.



Nach der Gl.: 5.1.11 gilt:

$$c_{uoi} = c_{uoa} \left( \frac{r}{r_a} \right)^q \quad \text{oder} \quad c_{uoi} = c_{uoa} \left( \frac{r_i}{r_a} \right)^q$$

und damit

$$q = \frac{\lg \frac{c_{uoi}}{c_{uoa}}}{\lg \frac{r_i}{r_a}}$$

bzw. mit

$$c_{uoi} = u_i \frac{\psi_{thi}}{2} \quad \text{und} \quad c_{uoa} = u_a \frac{\psi_{tha}}{2}$$

$$q = \frac{\lg \left[ \frac{\psi_{thi} v_i}{\psi_{tha}} \right]}{\lg v_i} \quad 5.6.4.20$$

Mit den Gleichungen 5.6.4.17 bis 5.6.4.20 können für die Gl.: 5.6.4.16 mit  $\varepsilon = -1$  die Größen

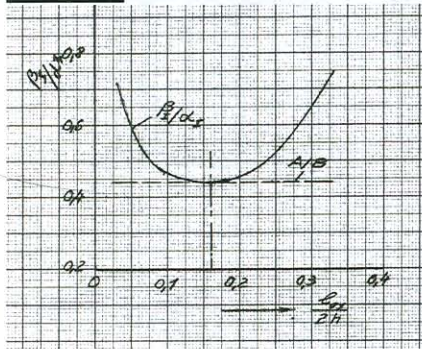
$$A = \frac{q+1}{q} (1 - \rho_{ka})^2 (1 - v_i^{2q}) - \frac{\psi_{tha}^2}{8} (K - K^2) (1 - v_i^{-1}) \quad (5.1.17a)$$

und

$$B = \frac{1 - \rho_{ka}}{2} \psi_{tha} \left[ \frac{q+1}{q-1} (1 - K) (1 - v_i^{q-1}) - K \frac{q-2}{q} (1 - v_i^q) \right] \quad (5.1.17b)$$

Bzw. der Ausdruck A/B nach Gl.: 5.6.4.16 ermittelt werden.

### Beispiel:



Gewählte Werte:  $T_0^* = 288^0 K$   $v_i = \frac{r_i}{r_a} = 0.35$

$$\frac{u_a}{\sqrt{T_0^*}} = 24 \quad \psi_{thi} = 1,7$$

$$\frac{h_{th}}{T_0^*} = 320 \quad \text{nach Abb.: 5.6.4.5}$$

Gerechnete Werte:  $h_{tha} = 92106 \text{ J/kg}$   $u_a = 407 \text{ m/s}$

$$\Delta c_{ua} = \frac{h_{tha}}{u_a} = 226,4 \text{ m/s}$$

$$\psi_{tha} = \frac{2 \Delta c_{ua}}{u_a} = 1,1125 \quad K = 1.25$$

$$\rho_{ka} = 0,72178 \quad q = 0,59644$$

Abb.: 5.6.4.8 Zur Ermittlung des

Seitenverhältnisses einer Stufe,

$$A = 0,14796 - 0,09001 = 0,057944 \quad \text{und} \quad B = 0,154814 [-0,522071 + 1,36927] = 0,131158$$

und 
$$\frac{A}{B} = \frac{0,057944}{0,131158} = 0,44178$$

Die Abb.: 5.6.4.8 zeigt die Werte  $\beta_{1l}/\alpha_{1l}$  nach Abb.: 5.6.4.4 in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis  $l_{ax}/2h$  und den berechneten Wert A/B nach der Beispielrechnung. Nach dieser Darstellung ist ein Seitenverhältnis von  $(l_{ax}/2h) = 0,16$  bzw.  $(l_{ax}/h) = 0,32$  für eine Einzelstufe ohne Vorleitgitter mit konstanter Axialgeschwindigkeitsverteilung des Gases über den Radius erforderlich. Dieser Wert entspricht einer sogenannten „Breitbandschaufel“. Die Abb.: 5.6.4.8 zeigt, dass das Verhältnis der Korrekturwerte der Drallströmung  $\beta_{1l}/\alpha_{1l}$  einen Extremwert ergeben muss um eine konstante Axialgeschwindigkeit des Strömungsmedium über den Radius am Stufeneintritt zu erhalten.

$$\frac{\beta_{1l}}{\alpha_{1l}} = f\left(\frac{l_{ax}}{2h}\right)$$

Das gesuchte Schaufelstreckungsverhältnis liegt dann bei:

$$\left(\frac{l_{ax}}{2h}\right)_{opt} = \frac{g\left(\frac{\beta_{1l}}{\alpha_{1l}}\right)}{g\left(\frac{l_{ax}}{2h}\right)} = \text{Extremwert!}$$

Bei modernen Zweistromtriebwerken werden der ersten Transsonic- oder Überschallstufe zur Erreichung eines bestimmten Druckverhältnisses am Verdichteraustritt weitere Unterschallstufen nachgeschaltet. Dabei muss beachtet werden, dass diese nachgeschalteten Stufen einen Einfluss auf die Kinematik der ersten Stufe ausüben und dadurch deren Stufenstreckungsverhältnis  $l_{ax}/2h$  beeinflussen.

Wendet man das Verfahren von Schröder /33/ auf Axialverdichterstufen ohne Vorleitgitter an, ergibt sich folgendes Schema:

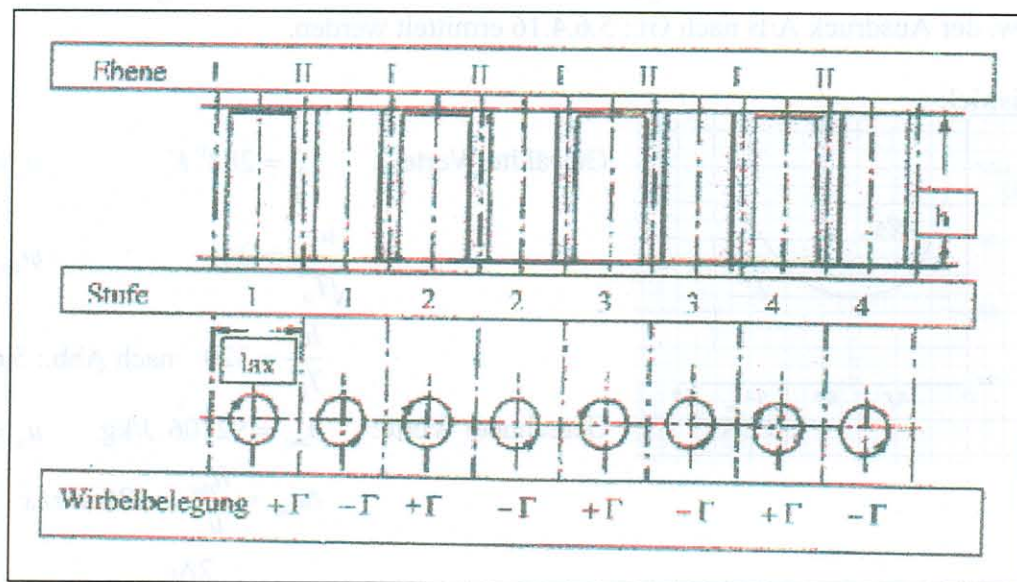


Abb.: 5.6.4.9 Das Verdichterschema ohne Vorleitgitter mit der Wirbelbelegung in den einzelnen Gitterebenen.

Dabei werden zwischen den Ebenen vor und hinter den Lauf- und Leitgitterebenen jeweils Wirbel aber mit entgegengesetzten Drehsinn angesetzt um die Einflüsse auf die erste Stufe durch die nachfolgenden Stufen zu ermitteln.

Nach Abschnitt 5.2 gilt:

$$\alpha_{I1} = \alpha_{III} = 1 - \frac{1}{2} e^{-\pi \frac{l_{ax}}{2h}}$$

und analog für den Spalt I1 vor dem Laufgitter:

$$b_{I1} = \left( \begin{array}{cccc} e^{-\pi \frac{l_{ax}}{2h}} + e^{-5\pi \frac{l_{ax}}{2h}} + e^{-9\pi \frac{l_{ax}}{2h}} + e^{-11\pi \frac{l_{ax}}{2h}} + \dots & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \quad \text{Stufenanteil der Laufgitter}$$

$$- \left( \begin{array}{cccc} e^{-3\pi \frac{l_{ax}}{2h}} + e^{-7\pi \frac{l_{ax}}{2h}} + e^{-11\pi \frac{l_{ax}}{2h}} + e^{-15\pi \frac{l_{ax}}{2h}} + \dots & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \quad \text{Stufenanteil der Leitgitter}$$

Für den Spalt III hinter dem Laufgitter gilt analog:

$$b_{III} = \left( \begin{array}{cccc} 2 - e^{-\pi \frac{l_{ax}}{2h}} & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{cccc} e^{-3\pi \frac{l_{ax}}{2h}} + e^{-7\pi \frac{l_{ax}}{2h}} + e^{-11\pi \frac{l_{ax}}{2h}} + \dots & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \quad \text{Stufenanteil der Laufgitter}$$

$$- \left( \begin{array}{cccc} e^{-\pi \frac{l_{ax}}{2h}} + e^{-5\pi \frac{l_{ax}}{2h}} + e^{-9\pi \frac{l_{ax}}{2h}} + \dots & & & \\ 2 & 3 & 4 & \end{array} \right) \quad \text{^Stufenanteil der Leitgitter}$$

Weiterhin gilt nach Abschnitt 5.2

$$\beta = \sum b - \alpha$$

a) einstufiger Verdichter ohne Vorleitgitter

$l_{ax}/2h$	0,05	0,0625	0,075	0,0825	0,100	0,1125	0,125	0,1325	0,15	0,1625
$\alpha_{II} = \alpha_{III}$	0,58028	0,58908	0,60492	0,61411	0,6348	0,6488	0,66232	0,6702	0,68782	0,69982
$\beta_{II}$	0,33245	0,32234	0,30812	0,30204	0,2941	0,2929	0,295	0,2975	0,3068	0,31278
$\beta_{II}/\alpha_{II}$	0,5729	0,54719	0,50935	0,49163	0,4632	0,45151	0,4454	0,44398	0,4461	0,4469
$\beta_{III}$	0,5802	0,58908	0,60491	0,61411	0,6347	0,6488	0,66232	0,67016	0,6878	0,6998

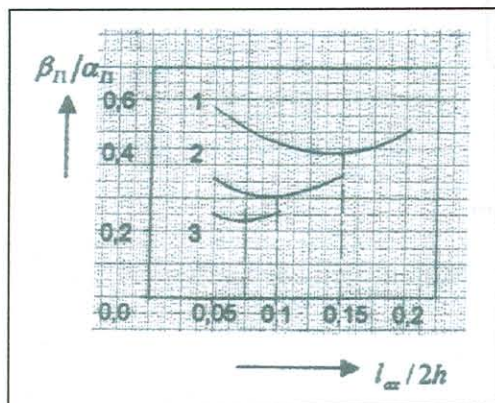
b) zweistufiger Verdichter ohne Vorleitgitter

$l_{ax}/2h$	0,05	0,0625	0,075	0,0825	0,100	0,1125	0,125	0,1325	0,15	
$\alpha_{II} = \alpha_{III}$	siehe unter a)									
$\beta_{II}$	0,20922	0,20065	0,19251	0,19136	0,19708	0,20632	0,21858	0,22702	0,24895	
$\beta_{II}/\alpha_{II}$	0,36055	0,34061	0,3182	0,31153	0,30104	0,3180	0,33002	0,3387	0,36224	
$\beta_{III}$	0,3323	0,32214	0,3081	0,304	0,294	0,29296	0,295	0,2975	0,306	

c) dreistufiger Verdichter ohne Vorleitgitter

$l_{ax}/2h$	0,05	0,0625	0,075	0,082	0,1000	0,1125
$\alpha_{II} = \alpha_{III}$	siehe unter a)					
$\beta_{II}$	0,14809	0,14513	0,14704	0,252202	0,16963	0,18519
$\beta_{II}/\alpha_{II}$	0,2552	0,24636	0,2436	0,24754	0,26721	0,28543
$\beta_{III}$	0,20894	0,20065	0,19249	0,19132	0,19698	0,20634

Wenn auch die Axialgeschwindigkeit des strömenden Mediums in der Strömungsebene II vor dem Laufgitter konstant ist, wird für die Berechnung der Axialgeschwindigkeit in der Strömungsebene hinter dem Laufgitter der ersten Stufe die Einflussfunktion  $\beta_{III}$  benötigt. Eine Darstellung der  $\beta_{II}/\alpha_{II}$ -Funktion in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad  $l_{ax}/2h$  der ersten Verdichterstufe zeigt die Abbildung 2.



- 1 = einstufiger Verdichter
- 2 = zweistufiger Verdichter
- 3 = dreistufiger Verdichter

Abb.: 2 Näherungswerte des Schlankheitsgrades der ersten Stufe ohne Vorleitgitter.

Die Abb.: 2 soll lediglich die Abhängigkeit des Schlankheitsgrades  $l_{ax}/2h$  der ersten Verdichterstufe mit Überschallanströmung in Abhängigkeit von der Anzahl der nachgeschalteten Verdichterstufen veranschaulichen, Zur Vereinfachung wurde der Schlankheitsgrad der nachgeschalteten Stufen gleich dem der ersten Stufe gesetzt. In der Praxis entspricht dieses Vorgehen nicht der Realität. In den einzelnen Ebenen der nachgeschalteten Stufen (vor und hinter den Laufgittern) sind die in den Gleichungen angegebenen Anteile mit den an diesen Stellen konzipierten Schlankheitsgraden zu berechnen, Diese an diesen Stellen zu erwartenden Schlankheitsgrade können einer grob durchgerechneten Verdichterkonzeption entnommen werden. In der Praxis ergeben sich somit Veränderungen im Schlankheitsgrad gegenüber der ersten Stufe eines einstufigen Verdichters. Die Abstände der Minima der einzelnen Kurven in Abb.: 2 zum einstufigen Verdichter werden kleiner.

Die einzelnen Glieder in den angegebenen beziehen sich auf Wölbungsrücklagen der Profilskelettlinien von  $x_f/l = 0,5$ .

Derartige Stufen werden vorwiegend in den Niederdruckverdichtern von Zweikreistriebwerken für Luftfahrtantriebe benutzt, wo eine konstante Axialgeschwindigkeit über den Radius der ersten Stufe zur Verwirklichung der angestrebten Verdichtungs-Stoßkombination gefordert wird

Die Abb.: 5.6.4.8 zeigt die Werte  $\beta_1/\alpha_1$  nach Abb.: 5.6.4.4 in Abhängigkeit vom Seitenverhältnis  $l_{ax}/2h$  und den berechneten Wert A/B nach der Beispielrechnung. Nach dieser Darstellung ist ein Seitenverhältnis von  $(l_{ax}/2h)=0.16$  bzw.  $(l_{ax}/h)=0.32$  erforderlich. Dieser Wert entspricht einer sogenannten „Breitbandschaufel“ (siehe auch Nachtrag).

Mit den bisherigen Ausführungen ist es möglich eine Zusammenfassung der Gleichungen zur Ermittlung der Geschwindigkeitsvektorendiagramme einer Axialverdichterstufe mit Überschallanströmung des Laufgitters anzugeben. Dabei soll zunächst von einer zusätzlichen Umlenkung des strömenden Gases nach einem schrägen und geraden Verdichtungsstoß abgesehen werden.

Zunächst wird entsprechend der Abb.: 5.6.4.1 eine vertretbare Anströmmachzahl  $M_0^*$  und in diesen Zusammenhang das Nabenvverhältnis  $v_i = r_i/r_a$  gewählt. Wählt man weiterhin entsprechend der Abb.: 5.6.4.3 für den Außenradius der Stufe eine aus Festigkeitsgründen vertretbare bezogene Umfangsgeschwindigkeit  $u_a/\sqrt{T_0^*}$ , so ist eine Zuordnung der einzelnen Rechenwerte zu den einzelnen Radien der Stufe durch

$$v = \frac{r}{r_a} = \frac{u/\sqrt{T_0^*}}{u_a/\sqrt{T_0^*}} \quad 5.6.4.21$$

möglich.

Im Zulauf zum Laufgitter sei ein Druckverlust von  $\Delta p^*$  vorhanden. Die Zustandswerte des Gases an Laufgittereintritt sind dann:

$$\begin{aligned} p_1^* &= p_0^* - \Delta p^* \\ T_1^* &= T_0^* \\ \rho_1^* &= \frac{p_1^*}{RT_1^*} \end{aligned} \quad 5.6.4.22$$

und die statischen Zustandswerte des Gases:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{p_1^*}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_0^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \\ T_1 &= \frac{T_1^*}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_0^2} \\ \rho_1 &= \frac{\rho_1^*}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_0^2\right)} \end{aligned} \quad 5.6.4.23$$

Die axiale Zuströmgeschwindigkeit des Gases zum Laufgitter beträgt nach Gl.: 5.6.4.1

$$c_{ax0} = \frac{M_0 \sqrt{\kappa R T_1^*}}{\sqrt{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_0^2}} \quad 5.6.4.24$$

Unter Beachtung der Gl.: 5.6.4.13 beträgt die Anströmmachzahl des Gases zum Laufgitter im relativen Strömungssystem

$$M_{w1}^2 = \frac{\frac{M_0^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_0^2} + \left( \frac{u}{\sqrt{T_1^*}} \right)^2 \frac{1}{\kappa R}}{1 - \frac{\frac{\kappa-1}{2} M_0^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_0^2}} \quad 5.6.4.25$$

und die relative Zuströmgeschwindigkeit zum Laufgitter:

$$w_1 = M_{w1} \sqrt{\kappa R T_1^*} \quad 5.6.4.26$$

Der Winkel  $\beta_1$  zwischen der Geschwindigkeit  $w_1$  und der Gitterfront des Laufgitters beträgt:

$$\beta_1 = \arcsin \frac{c_{ax}}{w_1} \quad 5.6.4.27$$

Die Zustandswerte im relativen Strömungssystem der Stufe sind nach den Gleichungen 2.23 und 2.26:

$$\frac{T_{1rel}^*}{T_1^*} = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_0^2}$$

$$\frac{p_{1rel}^*}{p_1^*} = \frac{\left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_0^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \quad 5.6.4.28$$

oder:

$$\frac{T_{1rel}^*}{T_1^*} = 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2$$

$$\frac{p_{1rel}^*}{p_1^*} = \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad 5.6.4.29$$

Die Ableitungen für die Zustandsgrößen nach einem schrägen und geraden Verdichtungsstoß wurden im Abschnitt 2.2 dargestellt. Dort ergab sich auch, dass unter Berücksichtigung einer Realisierbarkeit der Stoßfrontlagen in einem Laufgitter nur ein ganz bestimmter Winkel  $\Theta$  für die Stoßfrontlage des schrägen Verdichtungsstoßes und ein ganz bestimmter Keilwinkel  $\delta$  in Abhängigkeit von der Anströmmachzahl  $M_{w1}$  eingehalten werden muss (siehe hierzu Abb.: 2.2.5).

Für die statischen Zustandswerte des Gases nach einem schrägen Verdichtungsstoß gilt mit den Gleichungen 2.2.13, 2.2.14 und 2.2.16:

$$\frac{\hat{T}}{T_1} = \frac{\left[ \kappa M_{w1} \sin^2 \Theta - \frac{\kappa-1}{2} \right] \left[ 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2 \sin^2 \Theta \right]}{\left( \frac{\kappa+1}{2} \right)^2 M_{w1}^2 \sin^2 \Theta}$$

$$\frac{\hat{p}}{p_1} = \frac{2\kappa}{\kappa+1} M_{w1}^2 \sin^2 \Theta - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \quad 5.6.4.30$$

$$\frac{\hat{\rho}}{\rho_1} = \frac{\frac{\kappa+1}{2} M_{w1}^2 \sin^2 \Theta}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2 \sin^2 \Theta}$$

Für das Gesamtdruckverhältnis ist nach Gl.: 2.2.32:

$$\frac{\hat{p}^*}{p_{1rel}^*} = \left( \frac{\hat{\rho}^*}{\rho_1^*} \right)^\kappa = K \quad 5.6.4.31$$

wobei K die Drosselzahl nach Gl.: 2.2.21 ist.

$$K = \left( \frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \left[ \frac{M_{w1}^2 \sin^2 \Theta}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2 \sin^2 \Theta} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \left[ \frac{1}{\kappa M_{w1}^2 \sin^2 \Theta - \frac{\kappa-1}{2}} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad 5.6.4.32$$

Aus der Gl.: 2.2.27 erhält man die Geschwindigkeit des Gases nach den schrägen Verdichtungsstoß:

$$\frac{\hat{w}}{w_1} = \frac{M_{w1}^2 \sin^2 \Theta - 1}{\frac{\kappa+1}{2} M_{w1}^2 \sin^2 \Theta} \sqrt{1 - \sin^2 \Theta + \sin^2 \Theta \left[ \frac{\frac{\kappa+1}{2} M_{w1}^2}{M_{w1}^2 \sin^2 \Theta - 1} - 1 \right]^2} \quad 5.6.4.33$$

und die zugehörige Machzahl  $\hat{M}$  aus der Gl.: 2.2.8:

$$\hat{M} = \left( M_{w1}^2 \sin^2 \Theta - 1 \right) \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \Theta + \sin^2 \Theta \left[ \frac{\frac{\kappa+1}{2} M_{w1}^2}{M_{w1}^2 \sin^2 \Theta - 1} - 1 \right]^2}{\left( \kappa M_{w1}^2 \sin^2 \Theta - \frac{\kappa-1}{2} \right) \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2 \sin^2 \Theta \right) \Theta}} \quad 5.6.4.34$$

Damit können auch die Gesamtzustände des Gases nach den schrägen Verdichtungsstoß ermittelt werden.

$$\frac{\hat{p}^*}{\hat{p}} = \left( 1 + \frac{\kappa-1}{2} \hat{M}^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad 5.6.4.35$$

Beim Stoßvorgang bleibt die Gesamttemperatur des Gases im relativen Strömungssystem konstant

$$T_{1rel}^* = \hat{T}^* = \tilde{T}^* \quad 5.6.4.36$$

Da der Verdichtungsstoß mit einem Entropiesprung, also mit Verlusten behaftet ist, wurde mit Gl.:2.2.30 der Stoßwirkungsgrad definiert:

$$\eta_{St} = 1 - \frac{p_{1rel}^*}{p_{1rel}} \frac{1 - \frac{\hat{p}^*}{p_{1rel}}}{\frac{\hat{p}}{p_{1rel}} - 1} \quad 5.6.4.37$$

Dem schrägen Verdichtungsstoß im Laufgitter soll sich unmittelbar ein gerader Verdichtungsstoß anschließen. Die Zustandsgrößen des Gases vor dem geraden Verdichtungsstoß sind durch die mit der Kennzeichnung  $\hat{x}$  bekannt. Nach dem geraden Verdichtungsstoß sollen sie mit  $\tilde{x}$  gekennzeichnet werden. Dabei können die Gleichungen für den schrägen Verdichtungsstoß verwendet werden, wenn man für den Stoßfrontwinkel  $\Theta = 90^\circ$  setzt. Der schräge Verdichtungsstoß geht dann in einen geraden Verdichtungsstoß über. Wie man sich leicht überzeugen kann erhält man für den geraden Verdichtungsstoß die nachfolgenden Gleichungen.

Während des geraden Verdichtungsstoßes bleiben im relativen Strömungssystem die Gesamttemperaturen des Gases konstant.

$$T_{rel}^* = \hat{T}_{rel}^* = \tilde{T}_{rel}^* \quad 5.6.4.38$$

Analog zu den Beziehungen 5.6.4.30 gilt für die statischen Zustandswerte des Gases nach einem geraden Verdichtungsstoß:

$$\frac{\tilde{T}}{\hat{T}} = \frac{\left(\kappa \hat{M}^2 - \frac{\kappa - 1}{2}\right) \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \hat{M}^2\right)}{\left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^2 \hat{M}^2}$$

$$\frac{\tilde{p}}{\hat{p}} = \frac{2\kappa}{\kappa + 1} \hat{M}^2 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \quad 5.6.4.39$$

$$\frac{\tilde{\rho}}{\hat{\rho}} = \frac{\frac{\kappa + 1}{2} \hat{M}^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \hat{M}^2}$$

Für das Gesamtdruckverhältnis im Relativsystem gilt wieder:

$$\frac{\tilde{p}^*}{\hat{p}^*} = \frac{\tilde{p}^{*\kappa}}{\hat{p}^{*\kappa}} = K \quad 5.6.4.40$$

mit der Drosselzahl

$$K = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} \left[\frac{\hat{M}^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \hat{M}^2}\right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \left[\frac{1}{\kappa \hat{M}^2 - \frac{\kappa - 1}{2}}\right]^{\frac{1}{\kappa - 1}} \quad 5.6.4.41$$

Die Machzahl nach dem geraden Verdichtungsstoß beträgt:

$$\tilde{M} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \hat{M}^2}{\kappa \hat{M}^2 - \frac{\kappa - 1}{2}}} \quad 5.6.4.42$$

und das Geschwindigkeitsverhältnis des Gases:

$$\frac{\tilde{w}}{\hat{w}} = \frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \hat{M}^2}{\frac{\kappa + 1}{2} \hat{M}^2} \quad 5.6.4.43$$

Analog zur Gl.:5.6.4.23 erhält man für den Gesamtdruck des Gases nach dem

Verdichtungsstoß:

$$\frac{\tilde{p}^*}{\hat{p}^*} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} \tilde{M}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad 5.6.4.44$$



Für den Stoßwirkungsgrad des geraden Verdichtungsstoßes gilt:

$$\eta_{St} = 1 - \frac{\hat{p}^*}{\hat{p}} \frac{1 - \frac{\tilde{p}^*}{\hat{p}^*}}{\frac{\tilde{p}}{\hat{p}} - 1} \quad 5.6.4.45$$

bzw. für den schrägen und geraden Verdichtungsstoß gemeinsam:

$$\eta_{St} = 1 - \frac{p_{1rel}^*}{p_{1rel}} \frac{1 - \frac{\tilde{p}^*}{p_{1rel}^*}}{\frac{\tilde{p}}{p_{1rel}} - 1} \quad 5.6.4.46$$

Nach dem schrägen Verdichtungsstoß wird das Gas um den Keilwinkel  $\delta$  abgelenkt und in einem nach der Stoßfrontlage des geraden Verdichtungsstoßes geschalteten Diffusor des Laufgitterströmungskanales auf die Geschwindigkeit

$$w_2 = \tilde{w} \frac{\sin \beta_1 \sin(\Theta - \delta)}{\sin(\beta_1 + \delta) \sin \Theta} \quad 5.6.4.47$$

verzögert. Der Austrittswinkel der Relativgeschwindigkeit  $\tilde{w}$  ist dann:

$$\beta_2 = \beta_1 + \delta \quad 5.6.4.48$$

Damit kann leicht das Geschwindigkeitsvektordiagramm für das Laufgitter, wie es die Abb.:5.6.4.6 zeigt, ermittelt werden.

Durch die Verzögerung der Strömungsgeschwindigkeit im Diffusor des Laufgitters von  $\tilde{w}$  auf  $w_2$  ändern sich noch die Zustandswerte des Gases. Zur Ermittlung der Werte geht man von den bekannten Größen  $\tilde{T}^*$ ;  $\tilde{p}^*$  und  $w_2$  aus.

Die Machzahl

$$M_{w_2}^* = \frac{w_2}{\sqrt{\kappa R \tilde{T}^*}} \quad 5.6.4.49$$

steht mit der statischen Machzahl

$$M_{w_2}^2 = \frac{M_{w_2}^{*2}}{1 - \frac{\kappa - 1}{2} M_{w_2}^{*2}} \quad 5.6.4.50$$

in Verbindung.

Für die statischen Zustandswerte des zu verdichtenden Gases gilt dann:

$$T_2 = \frac{\tilde{T}^*}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{w_2}^2}$$

$$p_2 = \frac{\tilde{p}^*}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{w_2}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}} \quad 5.6.4.51$$

$$\rho_2 = \frac{\tilde{\rho}^*}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{w_2}^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}}$$

Entsprechend dem Geschwindigkeitsvektordiagramm nach Abb.: 5.6.4.6 gilt für die Axialgeschwindigkeit am Austritt aus dem Laufgitter:

$$c_{ax2} = w_2 \sin(\beta_1 + \delta) \quad 5.6.4.52$$

Die Umfangskomponenten der Strömungsgeschwindigkeiten sind:

$$w_{u1} = u \quad 5.6.4.53$$

und am Laufgitteraustritt

$$w_{u2} = w_2 \cos(\beta_1 + \delta) \quad 5.6.4.54$$

Die Differenz der Umfangskomponenten

$$\Delta w_u = u - w_2 \cos(\beta_1 + \delta) \quad 5.6.4.55$$

ist ein Maß für die im Laufgitter an das Gas übertragene Energie bzw. Förderhöhe:

$$h_{is} = u \Delta w_u \quad 5.6.4.56$$

Entsprechend der Abb.: 5.6.4.6 gilt für den Austrittswinkel des Gases aus dem Laufgitter:

$$\tan \alpha_2 = \frac{c_{ax2}}{u - w_{u2}} \quad 5.6.4.57$$

Die absolute Strömungsgeschwindigkeit  $c_2$  beträgt:

$$c_2 = \frac{c_{ax2}}{\sin \alpha_2} \quad 5.6.4.58$$

Man kann aber auch setzen:

$$c_2^2 = c_{ax2}^2 + (u - c_{u2})^2 = w_2^2 \sin^2(\beta_1 + \delta) + [u - w_2 \cos(\beta_1 + \delta)]^2$$

bzw.:

$$c_2^2 = u^2 + w_2^2 - 2uw_2 \cos(\beta_1 + \delta) \quad 5.6.4.59$$

Bildet man die Machzahl

$$M_{c2} = \frac{c_2}{\sqrt{\kappa R T_2}}$$

mit der statischen Temperatur nach Gl.:5.6.4.51, so erhält man die Gesamtzustandswerte des Gases am Laufgitteraustritt:

$$T_2^* = T_2 \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{c2}^2 \right)$$

$$p_2^* = p_2 \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{c2}^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad 5.6.4.60$$

$$\rho_2^* = \rho_2 \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{c2}^2 \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$

Für das Gesamtdruckverhältnis durch die Energiezuführung mittels der Verdichtungsstoßkombination an das Gas im Laufgitter gilt dann:

$$\pi = \frac{p_2^*}{p_1^*} \quad 5.6.4.61$$

In den Ergebnissen der Gleichungen 5.6.4.60 und 5.6.4.61 ist der Stoßwirkungsgrad der Kombination von schrägen und geraden Verdichtungsstoß bereits enthalten.

Um einen Überblick über die Kennwerte einer Stoßkombination im Laufgitter einer Verdichterstufe zu erhalten, wurden die Gleichungen dieses Abschnittes für die bereits in Abb.: 5.6.4.3 angegebenen Grenzwerte durchgerechnet und einige charakteristische Werte in der Abb.: 5.6.4.5 dargestellt. Dabei wurde der Adiabatenexponent mit  $\kappa = 1,4$  konstant gehalten was in der Praxis nicht zulässig ist.

Überträgt man diese Werte über das Radienverhältnis einer Stufe, so erhält man eine Darstellung wie sie die Abb.: 5.6.4.7 zeigt. Es ist aus der Abbildung zu erkennen, dass eine derartige Verdichterstufe unter Beachtung der genannten Grenzbedingungen im relativen Strömungssystem nur vom Außenradius bis zu einem Radienverhältnis  $\nu_x > \nu_i$  mit einer Machzahl  $M_{w1} > 1,0$  angeströmt werden kann. Dieses Radienverhältnis ist leicht aus Gl.:5.6.4.13 für  $M_{w1} = 1,0$  zu ermitteln. In einem hinter den Stoßfrontlagen im Laufgitter nachgeschalteten Diffusor mit Strömungsumlenkung herrscht oberhalb und unterhalb des Radienverhältnisses  $\nu_x$  eine Unterschallströmung. Bei der Energieumsetzung im Unterschallbereich des Diffusors sind die Stabilitätsbedingungen nach dem Prinzip von Hamilton zu beachten. Axialverdichterstufen dieser Art sind in der Luftfahrt bereits in Zweistromtriebwerken mit Erfolg im Einsatz. In diesen Zusammenhang sei noch darauf hingewiesen, dass bereits bei INA-Normalatmosphäre bei der Anströmmachzahl  $M_o$  die statische Temperatur des Gases im klimatischen Frostbereich liegt und die Grenzschicht an der Einlaufhaube zur Vermeidung von Falschanströmungen in der Nähe des Außenradius der Laufgitter oberhalb des Stufenaußenradius abgeführt werden sollte.

## **6. Das Gitterprofil und das Profilgitter.**

### 6.1 Allgemeines.

Die Aufgabe eines Profilgitters ist es, dem strömenden Gas die gewünschte Richtungsänderung aufzuzwingen. Physikalisch arbeitet ein Profil nach dem Prinzip der Parallelströmung mit einer überlagerten Zirkulationsströmung die ein Maß für die umzusetzende Energie im Laufgitter darstellt. Die Zirkulation um ein Profil ist das Umlaufintegral der Geschwindigkeiten des Gases um dessen Oberfläche

$$\Gamma = \oint w_s ds$$

wobei  $w_s$  die Geschwindigkeit an der Profilkontur und  $ds$  das Differential der Wegstrecke darstellt. In Abschnitt 3,5 hatten wir dafür gefunden:

$$\Gamma = \Delta w_u t = \Delta c_u t$$

In Abschnitt 5.2 wurde festgestellt, dass die Strömung um ein Profil durch die freien und gebundenen Wirbel sowohl durch die Nachbarprofile in einem Schaufelgitter als auch durch die Wirbel der vor und nach dem betrachteten Schaufelgitter liegenden Schaufelgittern beeinflusst wird. Das bedeutet, dass das betrachtete Profil auf der Zuström- und Abströmseite Überkrümmt sein muss. Die Überkrümmung bezogen auf die Skelettlinie des Profils bezeichnen wir auf der Zuströmseite als Stoßwinkel und auf der Abströmseite als Minderablenkung. Beide Winkel haben im optimalen Arbeitsbereich eine ganz bestimmte Größe, die von der Wölbung der Skelettlinie, dem Dickenverlauf der Profilkontur, dem Staffelungswinkel sowie dem Teilungsverhältnis des Profilgitters abhängig ist.

Ältere Verfahren zur Ermittlung der Profilgitter beruhen auf einfache Näherungsbeziehungen auf der Basis von Versuchswerten bekannter Profilformen (siehe hierzu auch /53/ bis /56/. Weinig /57/ bedient sich zur theoretischen Behandlung der Gitterströmung der Methode der konformen Abbildung der Profilgitter auf das Äußere und Innere eines Kreises. Die modernen Verfahren zur Behandlung der Gitterströmung arbeiten mit der Singularitätenmethode die eine weitgehende Freiheit in der Wahl und Variation der Gitterparameter gewährleistet.

Diese Problematik haben fast gleichzeitig, aber voneinander unabhängig, Schröder /58/ und Schlichting /59/ bearbeitet. Eine Gegenüberstellung beider Verfahren ergibt folgende Aspekte:

Das Verfahren von Schröder:

- 1) Kreisförmige Zirkulationsverteilung auf der Profilschne eines Profils für aerodynamisch stoßfreier Anströmung mit den Ansatz  $\sqrt{1-\xi^2}$  nach Birnbaum /62/.
- 2) Eine Zirkulationsverteilung auf der Profilschne eines Profils für die angestellte ebene Platte mit den Ansatz  $\sqrt{(1+\xi)/(1-\xi)}$  nach Birnbaum /62/.
- 3) Aus 1) und 2) verwendet er eine Kombination für das Gitterprofil bei Abweichungen von dem aerodynamisch stoßfreien Anströmzustand.
- 4) Für die Profilform wurde die Quellen- und Senkenbelegung auf der Profilschne  $q = f \left[ \sqrt{(1+\xi)/(1-\xi)} - \pi/2 \right]$  festgelegt. Damit erhält Schröder eine Profilform die dem alten englischen Grundprofil C4 /53/ sehr ähnlich ist mit einer Dickenrücklage von 30% der Sehnenlänge des Profils und der Dickenverteilung
 
$$y/C = \left[ \arcsin x - \sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{2} x \right]$$
- 5) Obwohl gegenüber dem Verfahren von Schlichting /59/ eine beträchtliche Einschränkung bei der Parameterwahl vorliegt, ist die Handhabung des Verfahrens in der Praxis denkbar einfach.

Das Verfahren von Schlichting:

- 1) Dem Verfahren liegt eine elliptische Zirkulationsverteilung entlang der Profilschne zugrunde die bei gleicher Größe der relativen Skelettlinienwölbung eine größere Energieumsetzung im Laufgitter ergibt.
- 2) Die Verteilung der Singularitäten auf der Profilschne erfolgen mittels der Glauertschen Reihe /61/:

-Für die Zirkulation  $\gamma(x)$

$$\gamma(x) = U_\infty \left[ A_0 \cot an \frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^n A_n \sin(n\varphi) \right]$$

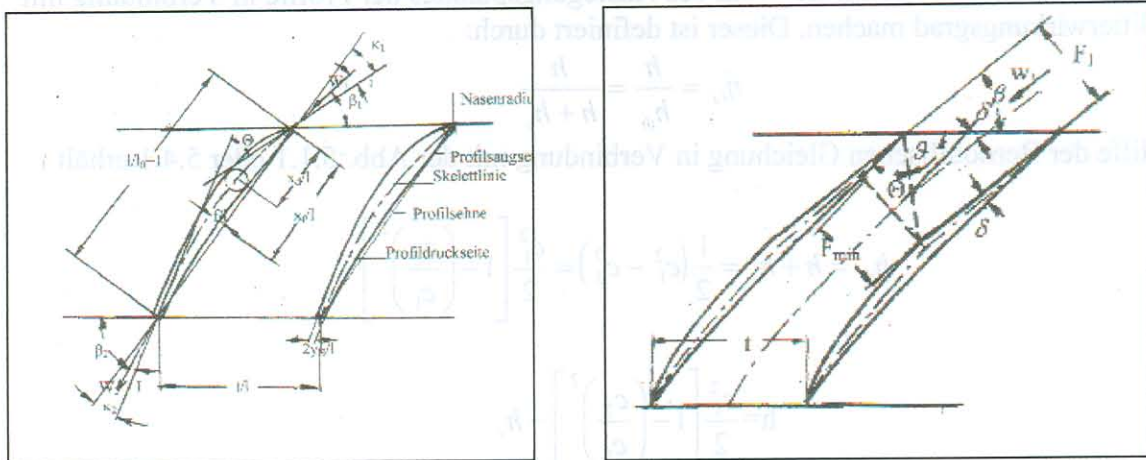
-Für die Quell- und Senkenbelegung zur Ermittlung der Profilform  $q(x)$

$$q(x) = U_\infty \left[ B_0 \cot an \frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^n B_n \sin(n\varphi) \right]$$

- 3) Mit der Bestimmung der einzelnen Konstante A und B gibt diese Betrachtungsweise eine große Anzahl von Variationsmöglichkeiten bei der Bestimmung der benötigten Profile. Es lässt sich auch zeigen, dass eine exakte parabolische Skelettlinie durch eine elliptische Zirkulationsverteilung über Die Profilschne zu erhalten ist.

Das nachfolgende Profiligitter- Berechnungsverfahren wurde unter Beachtung der einfachen Anwendungsmöglichkeit des Verfahrens von Schröder /58/ und den Vorzügen des Verfahrens von Schlichting /59/ unter Einbeziehung der Untersuchungen über den Nasenradius der Profile von Scholz /60/ erarbeitet. Dieses Verfahren wurde bei dem Niederdruck- und Hochdruckverdichter des Triebwerkes Pirna ZTL 020 eingesetzt und hat sich in der Praxis bewährt.

Die Abb.: 6.1.1 zeigt die wichtigsten Bezeichnungen an den Gitterprofilen sowohl für Profile mit einer Unterschallanströmung als auch für eine Überschallanströmung wie sie in den nachfolgenden Ausführungen verwendet werden.



A. Für Unterschallanströmung der Profile

B. Für Überschallanströmung der Profile

Abb.: 6.1.1 Die wichtigsten Bezeichnungen am Profil

Dabei ist:

1. Beim Profilgitter mit Unterschallanströmung:

- |                |  |
|----------------|--|
| $l$            | die Sehnenlänge der Profile                    |
| $x_d/l$        | die relative Dickenrücklage des Profils        |
| $(d/l)_{\max}$ | die maximale relative Profildicke              |
| $x_f/l$        | die relative Wölbungsrücklage der Skelettlinie |
| $f/l$          | die maximale relative Wölbung der Skelettlinie |
| $r/l$          | der relative Nasenradius des Profils           |
| $2y_H/l$       | die relative Hinterkantendicke des Profils     |

2. Beim Profilgitter mit Überschallanströmung:

Dieses Profil besteht aus einem Überschallanteil mit einem nachgeschalteten Unterschallteil.

- Die Bezeichnungen am Überschallteil entsprechen denen der Abb.: 5.6.4.6.
- Die Bezeichnungen am Unterschallteil entsprechen denen der Profile mit reiner Unterschallanströmung mit folgender Änderung:  
--An der Nahtstelle E tritt an die Stelle des Nasenradius die Dicke  $2y_v$  mit der Neigung  $\tan(\delta/2)$  für die Profilform.

## 6.2 Der Gitterwirkungsgrad und die Wahl des Auslegungspunktes.

Bevor man zur eigentlichen Auslegung der Profilhütter übergeht, sollte man sich einige Gedanken über die zweckmäßige Wahl des Auslegungspunktes der Profile in Verbindung mit den Gitterwirkungsgrad machen. Dieser ist definiert durch:

$$\eta_G = \frac{h}{h_{th}} = \frac{h}{h + h_v}$$

Mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung in Verbindung mit der Abb.: 5.1.1 oder 5.4.1 erhält man:

$$h_{th} = h + h_v = \frac{1}{2}(c_1^2 - c_2^2) = \frac{c_1^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right]$$

und

$$h = \frac{c_1^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right] - h_v$$

Für den Gitterwirkungsgrad gilt dann:

$$\eta_G = \frac{h_v}{\frac{c_1^2}{2} \left[ 1 - \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 \right]}$$

Entsprechend der Abb.: 5.1.1 oder 5.4.1 kann man für das Geschwindigkeitsverhältnis setzen:

$$\left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 = \left( \frac{c_{ax2}}{c_{ax1}} \right)^2 \frac{\sin^2 \beta_2}{\sin^2 \beta_1}$$

und für den Druckverlust nach Gl.: 3.6.10

$$\xi_v = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} c_1^2} = \frac{h_v}{\frac{c_1^2}{2}}$$

Der Wirkungsgrad des Profilhütters wird dann:

$$\eta_G = 1 - \frac{\xi_v}{1 - \left( \frac{c_{ax2}}{c_{ax1}} \right)^2 \frac{\sin^2 \beta_2}{\sin^2 \beta_1}}$$

Den besten Wirkungsgrad erhält man, wenn der Ausdruck

$$\frac{\xi_v}{1 - \left( \frac{c_{ax2}}{c_{ax1}} \right)^2 \frac{\sin^2 \beta_2}{\sin^2 \beta_1}}$$

ein Minimum wird. Die Abb.: 6.2.1 (entnommen aus /54/) zeigt die Abhängigkeit der Verluste und der Minderablenkung eines Gitterprofils vom relativen Anströmwinkel. Der optimale Arbeitspunkt eines Gitters liegt zwischen den relativen Anströmwinkeln entsprechend der aerodynamisch stoßfreien Anströmung ( $\xi_v = Min.$ ) und der geometrisch

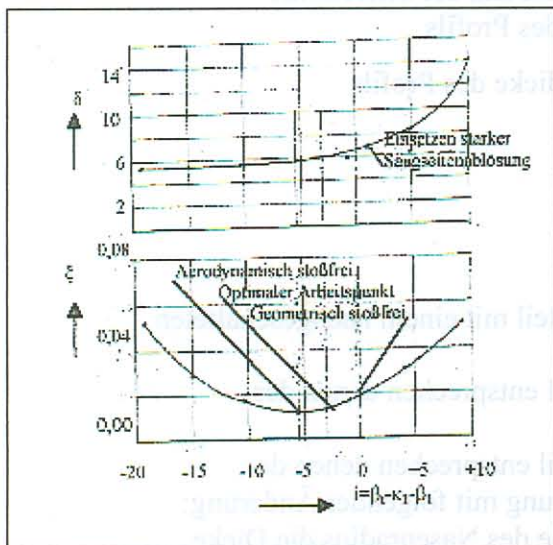


Abb.: 6.2.1 Minderablenkung und Verluste eines Gitterprofils in Abhängigkeit vom relativen Anströmwinkel.

stoßfreie Anströmung ( $i = 0$ ).

Bei Teillastzuständen mehrstufiger Axialverdichter werden die ersten Stufen des Verdichters infolge von Volumenverschiebungen innerhalb des Verdichters zu Arbeitspunkten gedrosselt, die zu positiven relativen Anströmwinkeln führen. Sind die Gitter mit dem optimalen Arbeitspunkt ausgelegt, so werden beim Übergang zu Teillasten den Verdichter eher in das Pump- bzw. Abreißgebiet der Strömung an den Profilen führen als Gitter deren Auslegungspunkt bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung liegen. Aus diesem Grunde erscheint es für die praktischen Belange günstiger, die Gitter mit aerodynamisch stoßfreier Anströmung zu verwenden. Man erreicht damit einen größeren Teillastbereich des Verdichters bzw. eine größere Druckreserve gegenüber der Pump- bzw. Abreißgrenze im Verdichterkennfeld.

### 6.3 Das Gitterprofil.

Als Grundlage zur Bestimmung der Profilvergitter soll das Singularitätenverfahren /59/ benutzt werden. Das nachfolgend beschriebene Verfahren hat sich in der Praxis gut bewährt.

#### 6.3.1 Die kinematischen Strömungsbedingungen.

Betrachtet wird ein reibungsfreies inkompressibles Strömungsmedium. Die Strömungswerte Um ein Gitterprofil erhält man, wenn man das Profil durch eine zweckmäßige Quell- Senken- Und Wirbelverteilung ersetzt und den durch diese Singularitäten induzierten Geschwindigkeiten eine Translationsströmung überlagert. Die Singularitätenverteilung  $q(x)$

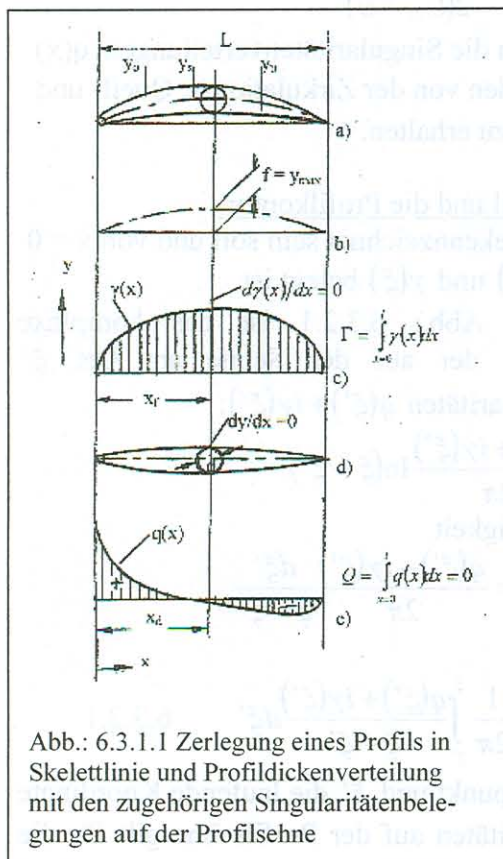


Abb.: 6.3.1.1 Zerlegung eines Profils in Skelettlinie und Profildickenverteilung mit den zugehörigen Singularitätenbelegungen auf der Profilschne

(Quell- und Senkenverteilung) und  $\gamma(x)$

(Zirkulationsverteilung) müssen streng genommen auf der Skelettlinie des Profils angebracht sein. Für kleine Profildickenverteilungen von  $f/l = 0,1$  bis  $f/l = 0,15$ , wie sie bei Axialverdichtern auftreten können, kann man sich nach /59/ mit guter Näherung auf eine Singularitätenbelegung auf der Profilschne beschränken. Bedeuten  $y_0(x)$  die Profilkordinaten senkrecht zur x-Achse der Unter- bzw. Oberseite des Profils,  $y_u(x)$  die entsprechenden Koordinaten der Dickenverteilung (siehe Abb.: 6.3.1.1) so gilt:

$$y_s(x) = \frac{1}{2} [y_0(x) + y_u(x)] \quad 6.3.1.1$$

$$y_d(x) = \frac{1}{2} [y_0(x) - y_u(x)] \quad 6.3.1.2$$

Die Gesamtzirkulation des Gitterprofils erhält man aus der Zirkulationsverteilung je Längeneinheit der Profilschne.

$$\Gamma = \int_{x=0}^L \gamma(x) dx \quad 6.3.1.3$$

Entsprechend der Gl.: 3.5.1 ergibt sich der Auftrieb A einer Profilschaufel je Breitereinheit:

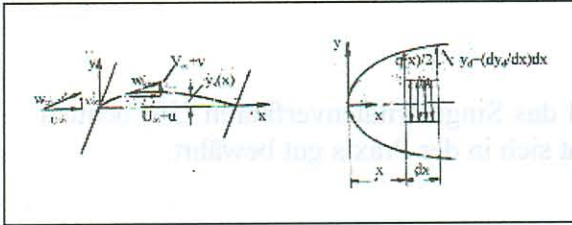
$$A = \rho w_\infty \Gamma = \rho w \int_{x=0}^L \gamma(x) dx \quad 6.3.1.4$$

Da die Kontur eines Gitterprofils eine geschlossene Kurve ergeben muss, ergibt sich die Bedingung:

$$\int_{x=0}^1 q(x) dx = 0 \quad 6.3.1.5$$

Die kinematischen Strömungsbedingungen für die Skelettlinie der Profile lautet entsprechend der Abb.: 6.3.1.2

$$\frac{dy_s}{dx} = \frac{V_\infty + v}{U_\infty + u} \quad 6.3.1.6$$



Wendet man die Kontinuitätsbedingung auf die Abb.:6.3.1.2 b an, erhält man die kinematischen Strömungsbedingungen für die Dickenverteilung des Profils.

$$(U_\infty + u)y_d + \frac{1}{2}q(x)dx = (U_\infty + u)\left(y_d + \frac{dy}{dx}dx\right)$$

Bild a Bild b  
Abb.: 6.3.1.2 Zur Herleitung der kinematischen

Strömungsbedingungen.

bzw.

$$\frac{dy_d}{dx} = \frac{q(x)}{2(U_\infty + u)} \quad 6.3.1.7$$

Aus den kinematischen Strömungsbedingungen können die Singularitätenverteilungen  $q(x)$  und  $\gamma(x)$  ermittelt werden. Der Gittereinfluss ist durch den von der Zirkulations-, Quell- und Senkenverteilung induzierten Zusatzgeschwindigkeiten zu erhalten.

### 6.3.2 Die induzierten Geschwindigkeiten am Einzelprofil und die Profilkontur.

Wir betrachten ein Einzelprofil das durch den Index E gekennzeichnet sein soll und von  $x = 0$  Bis  $x = 1$  auf der Profilschne mit den Singularitäten  $q(\xi)$  und  $\gamma(\xi)$  belegt ist.

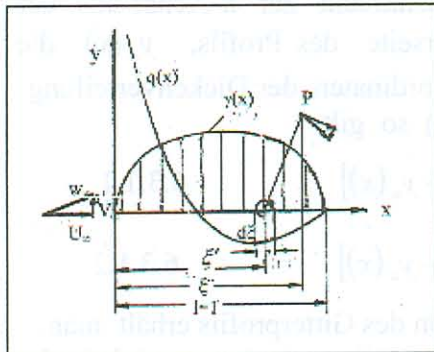


Abb.: 6.3.2.1 Zue Erläuterung der

Entsprechend der Abb.: 6.3.2.1 ist das komplexe Strömungspotential der auf der Sehne am Ort  $\xi'$  befindlichen Singularitäten  $q(\xi') + i\gamma(\xi')$ :

$$\omega = \frac{q(\xi') + i\gamma(\xi')}{2\pi} \ln(\xi - \xi')$$

und die Geschwindigkeit

$$dw = \frac{d\omega}{d\xi} = \frac{q(\xi') + i\gamma(\xi')}{2\pi} \frac{d\xi'}{\xi - \xi'}$$

oder

$$w(\xi) = u - iv = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi'}^{\xi} \frac{q(\xi') + i\gamma(\xi')}{\xi - \xi'} d\xi' \quad 6.3.2.1$$

Induzierten Geschwindigkeiten. Dabei ist  $\xi$  der Aufpunkt und  $\xi'$  die laufende Koordinate der Singularitätenbelegung. Mit der Lage der Singularitäten auf der Profilschne gilt für die induzierte Geschwindigkeit:

$$w_E(x;0) = \frac{1}{2\pi} \int_{x'=0}^1 \frac{q(x') + i\gamma(x')}{x - x'} dx' \quad 6.3.2.2$$



Die induzierten Geschwindigkeiten können in die Anteile der Wirbelverteilung und der Quell- und Senkenbelegung aufgespalten werden.

$$u_E = u_{\gamma E} + u_{qE} \quad \text{und} \quad v_E = v_{\gamma E} + v_{qE} \quad 6.3.2.3$$

Nun gilt aber bei Wirbelschichten

$$\begin{aligned} \text{an der Profilerseite} \quad U_o &= U_\infty + \frac{\gamma(x')}{2} \\ \text{an der Profilerunterseite} \quad U_u &= U_\infty - \frac{\gamma(x')}{2} \end{aligned}$$

folglich

$$u_{\gamma E} = \pm \frac{1}{2} \gamma(x')$$

Für die induzierten Geschwindigkeiten kann man dann schreiben:

$$u_{\gamma E} = \pm \frac{1}{2} \gamma(x') \quad v_{\gamma E} = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^l \frac{\gamma(x')}{x' - x} dx' \quad 6.3.2.4$$

$$u_{qE} = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^l \frac{q(x')}{x' - x} dx' \quad v_{qE} = \pm \frac{1}{2} q(x') \quad 6.3.2.5$$

Für das Vorzeichen gilt:

- + für die Profilerseite (Saugseite)
- für die Profilerunterseite (Druckseite)

Da beim Einzelprofil der Anstellwinkel  $\alpha_\infty$  der Profilersehne gegenüber der Translationsgeschwindigkeit allgemein sehr klein ist und damit auch  $u$  sehr klein gegen  $U_\infty$  ist, kann  $u$  gegenüber  $U_\infty$  beim Einzelprofil vernachlässigt werden.

Nach Gleichung 6.3.25 ist  $v_{qE}$  auf der Ober- und Unterseite des Profils gleich aber mit entgegengesetzten Vorzeichen. Auf der Profilersehne kann deshalb  $v_{qE}$  Null gesetzt werden. Es wird also

$$v_E = v_{\gamma E} + v_{qE} \quad 6.3.2.6$$

durch

$$v_E = v_{\gamma E} \quad 6.3.2.7$$

ersetzt. Für die Strömungsbedingungen am Einzelprofil gilt dann mit den Gleichungen 6.3.1.6 und 6.3.1.7:

$$\frac{dy_s}{dx} = \frac{V_\infty + v_{\gamma E}}{U_\infty} \quad 6.3.2.8$$

$$\frac{dy_d}{dx} = \frac{q(x)}{2U_\infty} \quad 6.3.2.9$$

Um die induzierten Geschwindigkeiten bequem berechnen zu können, wurden die Singularitäten  $\gamma(x)$  und  $q(x)$  in der trigonometrische Reihe von Glauert /61 angewendet.

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= U_\infty \left[ A_0 \cot an \frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^n A_n \sin(n\varphi) \right] \\ q(x) &= U_\infty \left[ B_0 \cot an \frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^n B_n \sin(n\varphi) \right] \end{aligned}$$

Als Koordinate wurde die Veränderliche

$$x = \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi) \quad 6.3.2.10$$

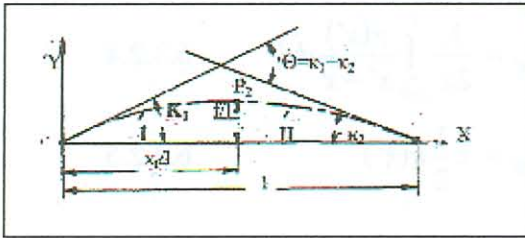
Eingeführt. Dabei gilt  $\varphi = 0$  für die Profilvorderkante und  $\varphi = \pi$  für die Profilhinterkante. Für die Zirkulationsverteilung gilt dann:

$$\gamma(x) = U_\infty \left[ A_0 \cot an \frac{\varphi}{2} + A_1 \sin \varphi + A_2 \sin 2\varphi + \dots \right] \quad 6.3.2.11$$

und für die Quell- Senkenverteilung:

$$q(x) = U_\infty \left[ B_0 \cot an \frac{\varphi}{2} + B_1 \sin \varphi + B_2 \sin 2\varphi + \dots \right] \quad 6.3.2.12$$

Die Konstanten  $A_n$  und  $B_n$  ergeben sich aus den kinematischen Strömungsbedingungen. Entsprechend der Gl.: 6.3.2.3 addieren sich die einzelnen Anteile der durch die Singularitäten induzierten Geschwindigkeiten. Dadurch ist die Möglichkeit gegeben, die einzelnen Anteile der Zirkulationsverteilung und der Quell- und Senkenbelegung gesondert zu behandeln.



Wir betrachten zunächst die durch die Wirbelverteilung induzierten Geschwindigkeiten und schreiben dem Profil eine parabolische Skelettlinie nach der Abb.:6.3.2.2 vor. Durch Veränderung der Wölbungsrücklage  $x_f/l$  kann man die Druckverteilung auf der Profiloberfläche so beeinflussen, dass die Grenzschichtentwick-

Abb.: 6.3.2.2 Die Profilskelettlinie

lung auf der Profilkontur günstig beeinflusst werden kann. Nach den Auswertungen britischer Messungen zeigt Hausenblas /63/, dass sich die günstigsten Wölbungsrücklagen bei den Skelettlinien in Abhängigkeit vom Abströmwinkel der Profile nur sehr wenig von den Wert  $(x_f/l) = 0,5$  abweichen.

An Hand der Abb.: 6.3.2.2 sollen nun die Zusammenhänge der parabolischen Skelettlinie mit der Wölbung und den geometrischen Winkeln aufgezeigt werden. Die Wölbung der Skelettlinie ergibt sich, wenn sie der Beziehung

$$\frac{y}{l} = a \left( \frac{x}{l} \right)^2 + b \frac{x}{l} + c \quad 6.3.2.13$$

gehört. Für den Parabelbogen I gilt:

$$P_1(0;0) \quad \text{und} \quad P_2 \left( \frac{x_f}{l}; \frac{f}{l} \right)$$

Mit  $P_1(0;0)$  erhält man aus Gl.: 6.3.2.13  $c=0$ . Am Punkt  $P_2$ , wo die größte Wölbung der Skelettlinie auftritt, muss die Ableitung der Gl.: 6.3.2.13 Null werden.

$$\frac{d(y/l)}{d(x/l)} = 2a \frac{x}{l} + b = 0$$

oder

$$a = - \frac{b}{2(x/l)}$$

Setzt man diesen Wert an die Stelle  $P_2$  ein, ergibt sich:

$$\frac{f}{l} = a \left( \frac{x_f}{l} \right)^2 + b \frac{x_f}{l} = \frac{b}{2} \left( 2 \frac{x_f}{l} - \frac{x_f}{l} \right)$$

Für die Konstante b erhält man dann:

$$b = \frac{2f/l}{x_f/l}$$

Setzt man die Konstante b in die Gleichung ein, so erhält man die allgemeine Gleichung für die parabolische Skelettlinie:

$$\frac{y}{l} = \frac{f/l}{(x_f/l)^2} \left[ 2 \frac{x_f}{l} \frac{x}{l} - \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad 6.3.2.14$$

Diese Gleichung gilt nur für den Parabelbogen I vor dem Wölbungsmaximum. Für den Parabelbogen II hinter dem Wölbungsmaximum ergeben sich mit den Gleichungen  $P_2(x_f/l; f/l)$  und  $P_3(1,0;0)$  analog zur Gl.: 6.3.2.14

$$c = -(a+b) \quad b = -2a \frac{x_f}{l} \quad a = -\frac{f/l}{(1-x_f/l)^2}$$

und damit die Gleichung für die parabolische Skelettlinie nach dem Wölbungsmaximum.

$$\frac{y}{l} = \frac{f}{l} \left[ 1 - \left( \frac{x/l - x_f/l}{1 - x_f/l} \right)^2 \right] \quad 6.3.2.15$$

Differenziert man die Gleichungen 6.3.2.14 und 6.3.2.15, erhalten wir den Tangens des Winkels gegenüber der Profilssehne an einer beliebigen Stelle der Profilssehne.

$$\tan \kappa = \frac{2f/l}{\left( \frac{x_f}{l} \right)^2} \left[ \frac{x_f}{l} - \frac{x}{l} \right] \quad \text{vor dem Wölbungsmaximum}$$

$$\tan \kappa = -\frac{2f/l}{\left( 1 - \frac{x_f}{l} \right)^2} \left[ \frac{x}{l} - \frac{x_f}{l} \right] \quad \text{hinter dem Wölbungsmaximum}$$

bzw. die Tangenten der Ein- und Austrittswinkel

$$\tan \kappa_1 = \frac{2f/l}{x_f/l} \quad 6.3.2.16$$

$$\tan \kappa_2 = \frac{2f/l}{1 - x_f/l} \quad 6.3.2.17$$

Aus geometrischen Gründen ist

$$\Theta = \kappa_1 + \kappa_2 \quad 6.3.2.18$$

oder

$$\tan \Theta = \tan(\kappa_1 + \kappa_2)$$

Mit Hilfe des trigonometrischen Additionstheorems wird

$$\tan \Theta = \frac{\tan \kappa_1 + \tan \kappa_2}{1 - \tan \kappa_1 \tan \kappa_2} \quad 6.3.2.19$$

Durch Einsetzen der Gleichungen 6.3.2.16 und 6.3.2.17 erhält man daraus:

$$\tan \Theta = \frac{1}{\frac{x_f/l}{2(f/l)} \left(1 - \frac{x_f}{l}\right) - 2 \frac{f}{l}} \quad 6.3.2.20$$

Bei gegebenem Krümmungswinkel  $\Theta$  der Skelettlinie erhält man daraus leicht die Wölbung der Skelettlinie:

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{4 \tan \Theta} \left[ \sqrt{1 + 4 \tan^2 \Theta \frac{x_f}{l} \left(1 - \frac{x_f}{l}\right)} \right] \quad 6.3.2.21$$

Beschränkt man sich entsprechen der Abb.: 6.3.2.2 und der Literaturquelle /63/ auf eine Skelettlinie mit einer Wölbungsrücklage von  $x_f/l = 0,5$ , so gehen die einzelnen Beziehungen über in:

$$\frac{y}{l} = 4 \frac{f}{l} \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad 6.3.2.22$$

$$\tan \kappa_1 = \tan \kappa_2 = 4 \frac{f}{l} \quad 6.3.2.23$$

Diese Ausdrücke gelten sowohl vor als auch hinter dem Wölbungsmaximum der Skelettlinie. Zur Bestimmung der Strömungsbedingungen nach der Gl.: 6.3.2.8 benötigen wir die Ableitung der Gl.: 6.3.2.22. Wenn man sich auf eine Wölbungsrücklage von  $x_f/l = 0,5$  festgelegt hat ist:

$$\left(\frac{y}{l}\right)' = 4 \frac{f}{l} - 8 \frac{f}{l} \frac{x}{l}$$

Führt man noch die Veränderliche nach Gl.: 6.3.2.10 ein, so folgt:

$$\left(\frac{y}{l}\right)' = 4 \frac{f}{l} \cos \varphi \quad 6.3.2.24$$

Für die induzierten Geschwindigkeiten am Einzelprofil erhält man mit den Gleichungen 6.3.2.4; 6.3.2.10 und 6.3.2.11:

$$v_{\gamma E} = -\frac{1}{2\pi} \int_{x'=0}^{\pi} \frac{\gamma(x')}{x' - x} dx' = -\frac{1}{2\pi} U_{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\left( A_0 \cot an \frac{\varphi'}{2} + A_1 \sin \varphi' + A_2 \sin^2 \varphi' + \dots \right)}{\cos \varphi' - \cos \varphi} \sin \varphi' d\varphi'$$

Die Auswertung der einzelnen Integrale erfolgt über eine Zwischenrechnung:

Es ist:

$$\begin{aligned} I_1 &= A_0 \int_0^{\pi} \frac{\cot an \frac{\varphi'}{2} \sin \varphi' d\varphi'}{\cos \varphi' - \cos \varphi} = A_0 \int_0^{\pi} \frac{\frac{\cos(\varphi'/2)}{\sin(\varphi'/2)} 2 \sin(\varphi'/2) \cos(\varphi'/2)}{\cos \varphi' - \cos \varphi} d\varphi' = A_0 \int_0^{\pi} \frac{2 \cos^2(\varphi'/2)}{\cos \varphi' - \cos \varphi} d\varphi' \\ &= A_0 \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos \varphi'}{\cos \varphi' - \cos \varphi} d\varphi' = A_0 \int_0^{\pi} \frac{d\varphi'}{\cos \varphi' - \cos \varphi} + A_0 \int_0^{\pi} \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi' - \cos \varphi} d\varphi' \end{aligned}$$

Nach Glauert gilt für das zweite Integral:

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\varphi')}{\cos\varphi' - \cos\varphi} d\varphi' = \pi \frac{\sin(n\varphi)}{\sin\varphi} \quad 6.3.2.25$$

und damit für das Integral

$$I_1 = A_0 \pi$$

Für die restlichen Glieder der Glauertschen Reihe kann man setzen:

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{\sum_{n=1}^n A_n \sin(n\varphi') \sin\varphi'}{\cos\varphi' - \cos\varphi} d\varphi'$$

und mit dem Additionstheorem

$$\sin(n\varphi') \sin\varphi' = -[\cos(n\varphi' + \varphi') - \cos(n\varphi' - \varphi')] = \frac{1}{2} [\cos(n-1)\varphi' - \cos(n+1)\varphi']$$

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{\sum_{n=1}^n A_n \frac{1}{2} [\cos(n-1)\varphi' - \cos(n+1)\varphi']}{\cos\varphi' - \cos\varphi} d\varphi'$$

Entsprechend dem Glauertschen Integral Gl.:6.3.2.25) erhält man:

$$I_2 = -\sum_{n=1}^n A_n \frac{1}{2} \pi \left[ \frac{\sin(n-1)\varphi'}{\sin\varphi'} - \frac{\sin(n+1)\varphi'}{\sin\varphi'} \right]$$

oder mit dem genannten Additionstheorem:

$$I_2 = \sum_{n=1}^n A_n \frac{1}{2} \pi \frac{2 \cos(n\varphi) \sin\varphi}{\sin\varphi} = -\pi \sum_{n=1}^n A_n \cos(n\varphi)$$

Fassen wir die Glieder zusammen, so ergibt sich für die induzierte Geschwindigkeit  $v_{yE}$ :

$$v_{yE} = \frac{1}{2} U_\infty [-A_0 + A_1 \cos\varphi + A_2 \cos(2\varphi) + \dots] \quad 6.3.2.26$$

und für die induzierte Geschwindigkeit  $u_{yE}$  mit den Gleichungen 6.3.3.4 und 6.3.2.11:

$$u_{yE} = \pm \frac{1}{2} U_\infty \left[ A_0 \cot an \frac{\varphi}{2} + A_1 \sin\varphi + A_2 \sin(2\varphi) + \dots \right] \quad 6.3.2.27$$

Setzt man die Beziehungen 6.3.2.24 und 6.3.2.26 in die Strömungsbedingung der Gl.: 6.3.2.8 ein, so wird:

$$-A_0 + A_1 \cos\varphi + A_2 \cos(2\varphi) + \dots = 2 \frac{V_\infty}{U_\infty} + 8 \frac{f}{l} \cos\varphi \quad 6.3.2.28$$

Nun ist aber

$$\frac{V_\infty}{U_\infty} = \tan\alpha_\infty = K \quad 6.3.2.29$$

der Anstellwinkel des Profils gegenüber der Translationsgeschwindigkeit  $U_\infty$ . Es ist zu erkennen, dass bei beliebiger Wölbungsverteilung die vom Anstellwinkel  $\tan\alpha = K$  herrührende Zirkulationsverteilung gleich dem Anteil  $2V_\infty \cot an\left(\frac{\varphi}{2}\right)$  der ebenen Platte entspricht.

Wie bereits in Abschnitt 6.2 festgestellt wurde, ist zur Erreichung möglichst großer Teillastbereiche von Verdichtern eine Auslegung der Profilkitter mit aerodynamisch stoßfreier Anströmung günstiger als mit bestem Wirkungsgrad. Bedenkt man weiterhin, dass der Wirkungsgrad eines Profilkitters als Funktion vom Anstellwinkel ein sehr flaches Optimum besitzt (Abb.: 6.2.1) so ist kaum eine merkliche Verschlechterung des Wirkungsgrades bei aerodynamisch stoßfreier Auslegung der Gitter gegenüber dem optimalen Arbeitspunkt zu erwarten.

Unter der Voraussetzung aerodynamisch stoßfreier Anströmung der Profile wird der Anstellwinkel  $\alpha_\infty$  und damit die Konstante  $A_0$  in der Gl.: 6.3.2.28 Null. Die Translationsgeschwindigkeit geht dann über in  $w_\infty$ . Aus der Gl.: 6.3.2.28 folgt somit unmittelbar:

$$A_0 = 0$$

$$A_1 = 8 \frac{f}{l} \quad 6.3.2.30$$

$$A_2 = 0$$

$$U_\infty = w_\infty \quad 6.3.2.31$$

Die Zirkulationsverteilung bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung ist dann:

$$\frac{\gamma(x)}{U_\infty} = A_1 \sin \varphi \quad 6.3.2.32$$

und die Zirkulation mit den Gleichungen 6.3.1.3 und 6.3.2.10

$$\Gamma = \int_{x=0}^l \gamma(x) dx = U_\infty A_1 \frac{l}{2} \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi$$

bzw.

$$\Gamma = U_\infty l \frac{\pi}{4} A_1 \quad 6.3.2.32a$$

Die aerodynamischen Eigenschaften der Profile hängen insbesondere bei den größeren Anströmmachzahlen stark von deren Dickenverteilung ab. So wirken sich zum Beispiel kleinere Nasenradien und kleinere Profildicken günstig auf die Eigenschaften bei größeren Anströmmachzahlen aus. Derartige Profile haben aber den Nachteil, dass sie bei Abweichungen vom Auslegungspunkt eher zum Ablösen der Strömung von der Profilkontur neigen als Profile mit größeren Nasenradien und Dicken sowie kleineren Dickenrücklagen. Letztere erreichen bei gesunder Umströmung der Profilkontur wiederum nur kleinere Anströmmachzahlen. Die Verluste werden dabei im Auslegungspunkt kaum beeinflusst. Nach /63/ hat die Hinterkantendicke der Profile nur einen geringen Einfluss, solange sie unter 20% der maximalen Profildicke liegt.

Analog zu den Beziehungen 6.3.2.26 und 6.3.2.27 erhält man für die von der Quell- und Senkenverteilung des Einzelprofils induzierten Geschwindigkeiten:

$$v_{qE} = \pm \frac{1}{2} U_\infty \left[ B_0 \cot an\left(\frac{\varphi}{2}\right) + B_1 \sin \varphi + B_2 \sin(2\varphi) + B_3 \sin(3\varphi) + \dots \right] \quad 6.3.2.33$$

$$u_{qE} = \frac{1}{2} U_\infty \left[ B_0 - B_1 \cos \varphi - B_2 \cos(2\varphi) - B_3 \cos(3\varphi) + \dots \right] \quad 6.3.2.34$$

Aus den Strömungsbedingung der Gl.: 6.3.2.9 erhält man mit den Gleichungen 6.3.2.10 und 6.3.2.12 die Profilkontur:

$$y = \int_{x=0}^l \frac{q(x)}{2U_\infty} dx = \frac{l}{4} \int_0^\pi \left[ B_0 \cot an\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi + \sum_{n=1}^n B_n \sin(n\varphi) \sin \varphi \right] d\varphi$$

Für das erste Glied gilt:

$$\cot an(\varphi/2) \sin \varphi = \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} \sin \varphi = 1 + \cos \varphi$$

Weiterhin gilt für das zweite Glied unter dem Integral

$$\int \sin(m\varphi) \sin \varphi = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(m-n)\varphi}{m-n} - \frac{\sin(m+n)\varphi}{m+n} \right]$$

Für die Dickenverteilung des Profils ist dann mit den ersten vier Gliedern der Gl.: 6.3.2.33

$$\frac{y}{l} = \frac{1}{4} \left[ B_0 (\varphi + \sin \varphi) + \frac{B_1}{2} \left( \varphi - \frac{\sin(2\varphi)}{2} \right) + \frac{B_2}{2} \left( \sin \varphi - \frac{\sin(3\varphi)}{3} \right) + \frac{B_3}{4} \left( \frac{\sin(2\varphi)}{2} - \frac{\sin(4\varphi)}{4} \right) \right]$$

Mit

$$\begin{aligned} \sin(2\varphi) &= 2 \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin(3\varphi) &= 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi \\ \sin(4\varphi) &= 2 \sin(2\varphi) \cos(2\varphi) \end{aligned}$$

wird:

$$\begin{aligned} \frac{y}{l} &= \frac{1}{8} (2B_0 + B_1) \varphi + \frac{B_0}{4} \sin \varphi - \frac{B_1}{8} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{B_2}{8} \left[ \sin \varphi - \frac{1}{3} (3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi) \right] \\ &+ \frac{B_3}{8} \left[ \frac{1}{2} \sin(2\varphi) - \frac{1}{4} (2 \sin(2\varphi) \cos(2\varphi)) \right] \end{aligned}$$

Führt man neben den oben genannten trigonometrischen Beziehungen für das letzte Glied der Gleichung noch den Zusammenhang

$$\cos(2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi$$

ein, so erhält man die Dickenverteilung des Profils zu:

$$\frac{y}{l} = \frac{1}{8} (2B_0 + B_1) \varphi + \frac{B_0}{4} \sin \varphi - \frac{B_1}{8} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{B_2}{6} \sin^3 \varphi + \frac{B_3}{4} \sin^3 \varphi \cos \varphi \quad 6.3.2.35$$

Folgende Profilparameter sollen als frei wählbar betrachtet werden:

- der Nasenradius
- die Hinterkantendicke
- die Dickenrücklage
- die maximale Profildicke

Zunächst soll der Frage nach der Wahl des Profilnasenradius nach gegangen werden wobei die Untersuchungen von Scholz /60) zugrunde gelegt werden. Wie die Gleichung 6.3.2.2 für die induzierten Geschwindigkeiten zeigt, liegt an der Profilnase bei  $x = x' = 0$  ein singulärer Punkt vor der die induzierte Geschwindigkeit gegen Unendlich gehen lässt. Dies ist physikalisch nicht sinnvoll. Deshalb hat Scholz das Profil in Nasennähe durch eine Parabel mit der Grundverteilung

$$y_0 = a\sqrt{x}$$

für die relative Profildicke  $\frac{d}{l} = 1$  ersetzt. Durch proportionale Umrechnung erhält man die Koordinaten

$$y = y_0 \frac{d}{l} = a \frac{d}{l} \sqrt{\sqrt{\frac{x}{l}}} = B_0 \sqrt{\frac{y}{l_x}} l_n \quad 6.3.2.3.6$$

wobei die Länge  $l_n$  aus Dimensionsgründen eingeführt wurde und frei wählbar ist. Für den Nasenradius gilt:

$$r_N = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y'}$$

Mit

$$y' = \frac{1}{2} B_0 \sqrt{\frac{l_n}{\left(\frac{x}{l_n}\right)}}$$

$$y'' = -\frac{1}{4} B_0 \sqrt{l_n} \left(\frac{x}{l}\right)^{-3/2}$$

folgt für den Nasenradius des Profils:

$$\frac{r_N}{l} = \frac{1}{2} B_0^2 = \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{d}{l}\right)^2 \quad 6.3.2.37$$

Der Ausdruck  $a^2/2$  hat bei den NACA-Profilserien z.B. folgende Werte:

$$\text{NACA 63 und NACA 64} \quad \frac{a^2}{2} = 1,1$$

$$\text{NACA 65} \quad \frac{a^2}{2} = 0,66 \quad 6.3.2.37a$$

Um den Einfluss der kritischen Anströmmachzahl auf den Nasenradius zu ermitteln, setzt Scholz folgende Quellverteilung an:

$$q(x) = 2 \frac{d(y/l)}{d(x/l)} U_\infty = \frac{1}{2} B_0 \sqrt{x} U_\infty \quad 6.3.2.38$$

Durch Beschränkung auf kleine x-Werte erhält er die durch die Quellbelegung induzierte Tangentialgeschwindigkeit

$$\Delta w_q = \frac{1}{2} B_0 U_\infty \quad 6.3.2.39$$

am Profilskelett. Damit wird die resultierende Geschwindigkeit am Profilskelett mit der Prandtl-Transformation für Unterschallgeschwindigkeiten zur Berücksichtigung der Kompressibilität des strömenden Gases:

$$w_{qS} = U_\infty + \frac{B_0}{2\sqrt{1-M_\infty^2}} U_\infty \quad 6.3.2.40$$

und die Geschwindigkeit auf der Kontur mit der von Riegels /64/ angegebenen Transformation:

$$w_{qK} = \frac{w_{qS}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad 6.3.2.41$$

Da für die Problematik des Nasenradius nach Scholz die maximale Geschwindigkeit in einem Bereich liegt wo der Nenner der Gl.: 6.3.2.41 als Näherung gleich Eins gesetzt werden kann, ist  $w_{qS}$  mit  $w_{qK}$  identisch. Aus der Gl.: 6.3.2.39 wird dann mit der Schallgeschwindigkeit  $a$ , der kritischen Machzahl  $M_{\text{okr}} = U_\infty/a$ , bei der am Nasenradius gerade die Schallgeschwindigkeit auftritt



$$\frac{w_{qS}}{a} = 1 = M_{\infty kr} \left[ 1 + \frac{B_0}{2\sqrt{1-M_{\infty kr}^2}} \right]$$

bzw.:

$$B_0 = \frac{2\sqrt{1-M_{\infty kr}^2}(1-M_{\infty kr})}{M_{\infty kr}} \quad 6.3.2.42$$

wobei mit Gl.: 6.3.2.37 der Zusammenhang mit den Nasenradius der Profile bekannt ist. Für Profile mit Anstellwinkel, d.h. nicht aerodynamisch stoßfreie Anströmung wird eine konstante Abwindgeschwindigkeit im Gebiet der Profilnase überlagert. Scholz erreicht das durch die Zirkulationsverteilung

$$\gamma(x) = A_0 U_{\infty} \sqrt{\frac{l}{x}} \quad 6.3.2.43$$

und erhält für  $x \ll l$  (Profilnase) eine Normalgeschwindigkeit am Profilskelett von

$$\Delta w_{\gamma} = \frac{1}{2} A_0 U_{\infty} \quad 6.3.2.44$$

Der Anstellwinkel an der Profilnase ist

$$\tan \alpha = \frac{\Delta w_{\gamma}}{w_{qS}} = \frac{1}{2} A_0 \frac{U_{\infty}}{w_{qS}} \quad 6.3.2.45$$

Die maximale Geschwindigkeit auf der Saugseite der Profilnase setzt sich aus der Quellen- und Zirkulationsverteilung zusammen wobei der Zirkulationsanteil wieder mit den Prandtl-Faktor umzurechnen ist. Die maximale Skelettgeschwindigkeit erhält man mit Hilfe der Gleichungen 6.3.2.40, 6.3.2.42 und 6.3.2.45 zu:

$$w_{q+\gamma S} = w_{qS} + \frac{\gamma}{2\sqrt{1-M_{\infty}^2}} = \left( 1 + \frac{B_0}{2\sqrt{1-M_{\infty}^2}} \right) \left( 1 + \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1-M_{\infty}^2}} \sqrt{\frac{l}{x}} \right) U_{\infty} \quad 6.3.2.46$$

Die Konturgeschwindigkeit erhält man wieder mit den Riegels - Faktor und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} B_0 \sqrt{\frac{l_N}{x/l_N}}$$

zu:

$$w_{q+\gamma K} = \left( 1 + \frac{B_0}{2\sqrt{1-M_0^2}} \right) \left( \frac{\sqrt{\frac{x}{l_N}} + \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1-M_0^2}} \sqrt{\frac{l}{l_N}}}{\sqrt{\frac{x}{l_N} + \frac{B_0^2}{4}}} \right) U_{\infty} \quad 6.3.2.47$$

Die Extremwertbestimmung liefert:

$$\left( \frac{\sqrt{\frac{x}{l_N}}}{\sqrt{\frac{x}{l_N}}} \right)_{w_K = w_{\max}} = \frac{B_0^2}{4 \tan \alpha} \sqrt{1-M_0^2} \sqrt{\frac{l_N}{l}} \quad 6.3.2.48$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Gl.: 6.3.2.48 ein so wird mit  $w_K$  als Schallgeschwindigkeit:

$$\frac{1}{M_{\infty kr}} = \left( 1 + \frac{B_0}{2\sqrt{1-M_{\infty kr}^2}} \right) \sqrt{1 + 4 \frac{\tan^2 \alpha}{B_0^2} \frac{l/l_N}{1-M_{\infty kr}^2}} \quad 6.3.2.49$$

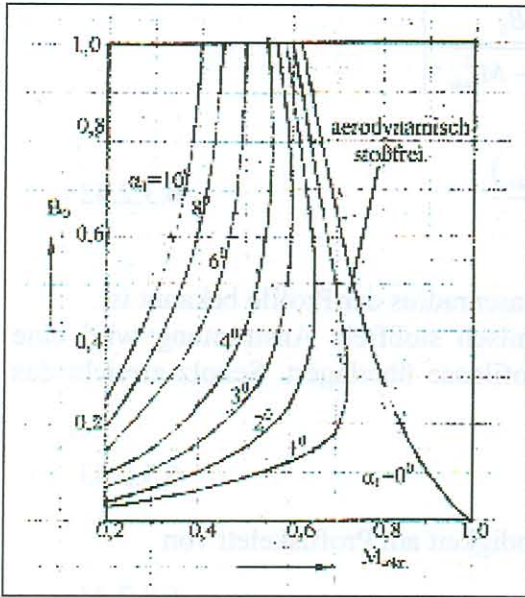


Abb.: 6.3.2.3 Der Profilparameter  $B_0$  in Abhängigkeit von

der kritischen Anströmmachzahl  $M_{\text{okrit}}$  mit den den Anstellwinkel als Parameter.

Für den Anstellwinkel  $\alpha = 0$  geht dieser Ausdruck wieder in die Gl.: 6.3.2.42 über. In Gl.: 6.3.2.49 ist der profileigene Parameter  $l/l_N$  enthalten dessen Bestimmung eine Unsicherheit aufweist. Die Ergebnisse sind aber nicht allzu stark davon abhängig. Übliche Profile haben nach [60] einen meist zutreffenden Wert von  $(l_N/l) = 0,1$ . Die Ergebnisse der damit ausgewerteten Gl.: 6.3.2.49 zeigt die Abb.: 6.3.2.3.

Bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung der Profile ist im Axialverdichterbau zwar anzustreben aber in der Praxis schwer zu verwirklichen.

Für die Konstante  $B_0$  gilt nach Gl.: 6.3.2.37

$$B_0 = \sqrt{2 \frac{r_N}{l}} \quad 6.3.2.50$$

Die Gesamtquellstärke des Profilditters erhält man aus:

$$\frac{Q}{U_\infty} = \int_{x=0}^l \frac{q(x)}{U_\infty} dx = \frac{l}{2} \int_0^\pi \frac{q(x)}{U_\infty} \sin \varphi d\varphi$$

Dieses Integral wurde schon bei der Ermittlung der Gl.:6.3.2.35 gelöst und kann übernommen werden.

$$\frac{Q}{U_\infty} = \frac{l}{2} \left[ B_0 (\varphi + \sin \varphi) + \frac{B_1}{2} \left( \varphi - \frac{\sin(2\varphi)}{2} \right) + \frac{B_2}{2} \left( \sin \varphi - \frac{\sin(3\varphi)}{3} \right) + \dots \right]_0^\pi$$

$$\frac{Q}{U_\infty} = \frac{l}{2} \pi \left( B_0 + \frac{B_1}{2} \right) \quad 6.3.2.51$$

Nach Gl.: 6.3.1.5 ist die Gesamtquellstärke für eine geschlossene Kontur gleich Null. Für ein Profil mit endlicher Hinterkantendicke ist die austretende Flüssigkeitsmenge gleich dem Produkt aus der Höhe der Öffnung und der Austrittsgeschwindigkeit.

$$\frac{Q}{U_\infty l} = \frac{2y_H}{l} \frac{w_S}{U_\infty}$$

Mit  $(w_S/U_\infty) = 1$  erhält man mit Gl.: 6.3.2.51

$$2B_0 + B_1 = \frac{4}{\pi} \frac{2y_H}{l}$$

oder mit der Gl.: 6.3.2.50:

$$B_1 = \frac{4}{\pi} \frac{2y_H}{l} - 2 \sqrt{2 \frac{r_N}{l}} \quad 6.3.2.52$$

Eine weitere Bemessungsgleichung zur Ermittlung der Konstanten erhält man aus der

Bedingung, dass die erste Ableitung der Profilkontur bei der maximalen Profildicke Null sein muss.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q(x)}{2U_\infty} = \frac{1}{2} \left[ B_0 \cot \operatorname{arctan} \left( \frac{\varphi}{2} \right) + B_1 \sin \varphi + B_2 \sin(2\varphi) + B_3 \sin(3\varphi) \right] = 0$$

Formt man diesen Ausdruck etwas um, so wird:

$$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{2} \left[ \frac{B_0}{1 - \cos \varphi} + B_1 + B_2 \cos \varphi + B_3 [3 + 4(1 - \cos^2 \varphi)] \right] = 0$$

bzw. 
$$\frac{B_0}{1 - \cos \varphi} + B_1 + B_2 \cos \varphi + B_3 [3 + 4(1 - \cos^2 \varphi)] = 0$$

Die Rücklage der maximalen Profildicke von der Vorderkante soll bei  $x_D/l$  liegen. Nach Gl.: 6.3.2.10 ist dann:

$$\frac{x_D}{l} = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi_D)$$

oder

$$\cos \varphi_D = 1 - 2 \frac{x_D}{l}$$

Eingeführt ergibt das:

$$B_0 + 2B_1 \frac{x_D}{l} + 4B_2 \frac{x_D}{l} \left( 1 - 2 \frac{x_D}{l} \right) + 2B_3 \frac{x_D}{l} \left[ 16 \left( \frac{x_D}{l} \right)^2 - 16 \frac{x_D}{l} + 3 \right] = 0 \quad 6.3.2.53$$

Schreibt man die Gl.: 6.3.2.35 für die Stelle  $x_D/l$  an, erhält man:

$$\frac{y_{\max}}{l} = \frac{1}{2} \frac{d_{\max}}{l} = \frac{1}{8} (2B_0 + B_1) \widehat{\varphi}_D + \frac{B_0}{4} \sin \varphi_D - \frac{B_1}{8} \sin \varphi_D \cos \varphi_D + \frac{B_2}{6} \sin^3 \varphi_D + \frac{B_3}{4} \sin^3 \varphi_D \cos \varphi_D$$

oder:

$$\frac{d_{\max}}{l} = \frac{1}{4} (2B_0 + B_1) \widehat{\varphi}_D + \frac{B_0}{2} \sin \varphi_D - \frac{B_1}{4} \sin \varphi_D \cos \varphi_D + \frac{B_2}{3} \sin^3 \varphi_D + \frac{B_3}{2} \sin^3 \varphi_D \cos \varphi_D \quad 6.3.2.54$$

mit 
$$\widehat{\varphi}_D = \frac{\varphi_D \pi}{180}$$

Mit den Beziehungen 6.3.2.50; 6.3.2.52; 6.3.2.53 und 6.3.2.54 lassen sich die gesuchten Koeffizienten  $B_0$  bis  $B_3$  ermitteln.

Die Fläche des Profils ergibt sich aus:

$$\frac{F_p}{l^2} = 2 \int_{x=0}^l \frac{y}{l} d \frac{x}{l} \quad 6.3.2.55$$

oder mit Gl.: 6.3.2.35

$$\frac{F_p}{l^2} = \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{\pi} \left\{ \begin{aligned} & B_0 (\varphi + \sin \varphi) + \frac{B_1}{4} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) + \frac{B_2}{4} \left( \sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) \\ & + \frac{B_3}{8} \left[ \frac{\sin(2\varphi)}{2} - \frac{\sin(4\varphi)}{4} \right] \end{aligned} \right\} \sin \varphi d\varphi$$

$$\frac{F_p}{l^2} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{B_0}{2} (-\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{B_0}{4} (\varphi - \sin \varphi \cos \varphi) + \frac{B_1}{4} (-\varphi \cos \varphi + \sin \varphi) \\ & - \frac{B_1}{4} \frac{1}{3} \sin^3 \varphi + \frac{B_2}{3} \left[ \frac{3}{8} \varphi - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) + \frac{\sin(4\varphi)}{32} \right] \\ & + \frac{B_3}{4} \frac{1}{2} \left( \sin \varphi - \frac{\sin(3\varphi)}{3} \right) - \frac{B_3}{16} \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(3\varphi)}{3} - \frac{\sin(5\varphi)}{5} \right) \end{aligned} \right\}^{\pi}_0$$

Setzt man die Grenzen ein, ergibt sich:

$$\frac{F_p}{l^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{B_0}{2} \pi + \frac{B_0}{4} \pi + \frac{B_1}{4} \pi + \frac{1}{8} B_2 \pi \right\}$$

oder:

$$\frac{F_p}{l^2} = \frac{\pi}{16} (6B_0 + 2B_1 + B_2) \quad 6.3.2.56$$

Damit sind alle Größen zur Bestimmung der symmetrischen Profile bekannt.

Bis zu Anströmmachzahlen von etwa 0,75 wurden gute Erfahrungen mit Dickenrücklagen von 40% (Profil Q 40) der Profilhöhe gemacht. Darüber hinaus erhält man bis zu Anströmmachzahlen von etwa 0,82 noch gute Ergebnisse bei Dickenrücklagen von 50% der Profilhöhe (Profil Q 50). Für Vorleitgitter, die als Beschleunigungsgitter ausgeführt werden, hat sich eine Dickenrücklage von 30% (Profil Q 30) bewährt. Als brauchbar haben sich folgende Hinterkantendicken erwiesen:

- a.) Für das Laufgitter  $\frac{2y_H}{l} = 0,1 \frac{d}{l}$
- b.) Für das Leitgitter  $\frac{2y_H}{l} = 0,2 \frac{d}{l}$
- c.) Für das Vorleitgitter  $\frac{2y_H}{l} = 0,2 \frac{d}{l}$

Verwendet man für den Nasenradius die Beziehung

$$\frac{r_N}{l} = 0,66 \left( \frac{d}{l} \right)^2 \quad 6.3.2.57$$

können die Konstanten ermittelt werden. Setzt man diese Konstanten in die Gl.: 6.3.2.54 ein und verwendet die maximale Profildicke  $\frac{d}{l} = 0,1$ , so gilt für die Profilkontur:

$$\begin{aligned} \frac{y}{d} = & \frac{0,1}{8 \frac{d}{l}} (2B_0 + B_1) \hat{\varphi} + \frac{0,1}{4} \frac{B_0}{\frac{d}{l}} \sin \varphi - \frac{0,1}{8} \frac{B_1}{\frac{d}{l}} \sin \varphi \cos \varphi \\ & + \frac{0,1}{6} \frac{B_2}{\frac{d}{l}} \sin^3 \varphi + \frac{0,2}{4} \frac{B_3}{\frac{d}{l}} \sin^3 \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad 6.3.2.58$$

wobei im ersten Glied der Gleichung

$$\hat{\varphi} = \frac{\varphi^0 \pi}{180}$$

gilt.

Für die Profile Q 30; Q 40 und Q 50 ergeben sich die folgenden Konstanten und Profilkonturen.

Profil	Q 30	Q 40	Q40	Q50	Q50
Bezeichnungen	Vorleitgitter	Laufgitter	Leitgitter	Laufgitter	Leitgitter
	← Gewählte Größen		→		
$x_D/l$	0,3	0,4	0,4	0,5	0,5
$r_N/l$	$1,25(d/l)^2$	$0,66(d/l^2)$	$0,66(d/l)^2$	$0,66(d/l)^2$	$0,66(d/l)^2$
$2y_H/l$	0,2 d/l	0,1 d/l	0,2 d/l	0,1 d/l	0,2 d/l
	← Gerechnete Werte		→		
$B_0/(d/l)$	1,64317	1,1489	1,1489	1,1489	1,1489
$B_1/(d/l)$	-3,03169	-2,17047	-2,04314	-2,17047	-2,04314
$B_2/(d/l)$	0,03455	1,03111	0,88701	1,12668	0,97555
$B_3/(d/l)$	-0,73729	-0,3832	-0,30026	-1,02157	-0,89424

← Gerechnete Profilkonturwerte →

x/l	y/d	y/d	y/d	y/d	y/d
0	0	0	0	0	0
0,0076	0,1408	0,0995	0,0996	0,0980	0,0989
0,0301	0,2667	0,1943	0,1945	0,1889	0,1895
0,0670	0,3669	0,2805	0,2813	0,2653	0,2671
0,1170	0,4369	0,3554	0,3556	0,3272	0,3303
0,1786	0,4784	0,4171	0,4183	0,3781	0,3822
0,250	0,4971	0,4634	0,4642	0,4220	0,4257
0,3290	0,4992	0,4919	0,4922	0,4598	0,4625
0,4132	0,4887	0,4997	0,4997	0,4885	0,4992
0,5000	0,4665	0,48405	0,4850	0,5000	0,5000
0,5868	0,4314	0,4443	0,4484	0,4861	0,4873
0,6710	0,3824	0,3831	0,3928	0,4416	0,4475
0,7500	0,3219	0,3072	0,3251	0,3694	0,3830
0,8214	0,2567	0,2275	0,2545	0,2807	0,3042
0,8830	0,1943	0,1550	0,1911	0,1918	0,2252
0,9330	0,1453	0,0992	0,1429	0,1189	0,1609
0,9699	0,1148	0,0660	0,1136	0,0726	0,1198
0,9924	0,1020	0,0521	0,1018	0,053	0,1027
1,0000	0,100	0,0500	0,100	0,0500	0,100

← Gerechnete Profilfläche →

$$\frac{F_P}{l^2} \quad 0,751 \frac{d}{l} \quad 0,70363 \frac{d}{l} \quad 0,7273 \frac{d}{l} \quad 0,7224 \frac{d}{l} \quad 0,7449 \frac{d}{l}$$

Die Grundprofile Q 30; Q 40 und Q 50 sind schematisch auf der Abbildung 6.3.2.4 dargestellt.

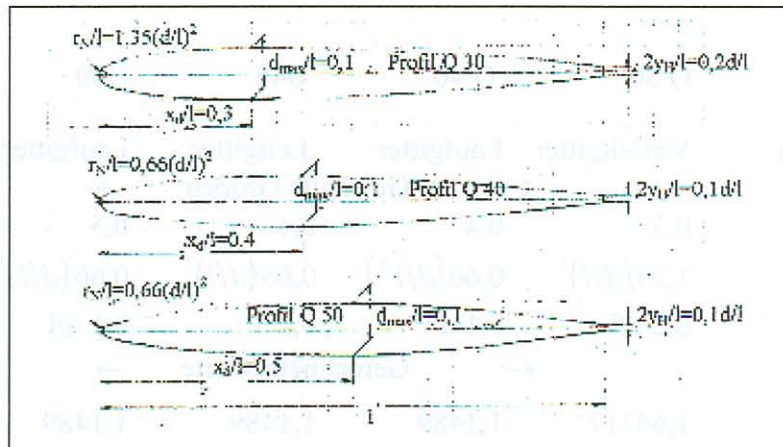


Abb.: 6.3.2.4 Die Grundprofile Q 30 ; Q 40 und Q 50.

### 6.3.3 Die induzierten Geschwindigkeiten am Gitterprofil.

Im Abschnitt 6.3.2 wurde die durch die auf der Profilschne auf der Profilschne angeordneten Singularitäten an einem beliebigen Ort  $\xi$  hervorgerufene komplexe Geschwindigkeit angegeben.

$$dw = \frac{q(\xi') + i\gamma(\xi')}{2\pi} \frac{d\xi'}{\xi - \xi'}$$

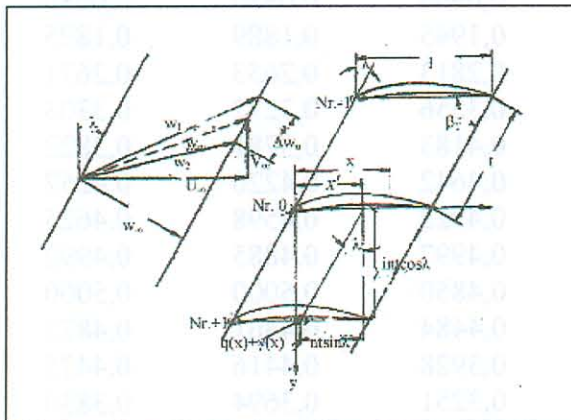


Abb.: 6.3.3.1 Die Geschwindigkeiten am gestaffelten ebenen Gitter .

Nach Abb.: 6.3.3.1 ist:

$$\begin{aligned} \xi' &= x' + it \sin \lambda + int \cos \lambda \\ &= x' + int(\cos \lambda - i \sin \lambda) \\ &= x' + int e^{-i\lambda} \end{aligned}$$

In die obige Gleichung eingesetzt ergibt sich für die induzierte Geschwindigkeit unter Berücksichtigung der Anteile der Gitterprofile von  $n = -\infty$  bis  $n = +\infty$ .

$$dw = \frac{q(\xi') + i\gamma(\xi')}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi'}{\xi - (x' + int e^{-i\lambda})}$$

$$dw = \frac{q(\xi') + i\gamma(\xi') e^{i\lambda}}{2\pi} \frac{e^{i\lambda}}{it} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi'}{\frac{\xi - x'}{it} - n}$$

Setzt man als Abkürzung

$$\frac{\xi - x'}{it} e^{i\lambda} = \bar{\xi}$$

so erhält man für den Summenausdruck (siehe auch /45/:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi^2 - n^2} = \frac{1}{\xi^2} + \left( \frac{1}{\xi^2 - 1} + \frac{1}{\xi^2 + 1} \right) + \left( \frac{1}{\xi^2 - 2^2} + \frac{1}{\xi^2 + 2^2} \right) + \dots = \frac{1}{\xi^2} + 2\xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^2 - n^2}$$

$$= \pi \cot \operatorname{an}(\pi \xi)$$

Mit

$$\frac{1}{i} \cot \operatorname{an}(\pi \xi) = \cosh(i\pi \xi)$$

wird:

$$\frac{e^{i\lambda}}{it} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi - x' - n} = \frac{\pi e^{i\lambda}}{t} \cot \operatorname{anh} \left( \pi \frac{\xi - x'}{t} e^{i\lambda} \right)$$

und somit:

$$w = u(\xi) - iv(\xi) = \frac{1}{2t} \int_{\xi'=0}^{\xi'} \left[ (q(\xi') + i\gamma(\xi')) e^{i\lambda} \cot \operatorname{anh} \left( \pi \frac{\xi - x'}{t} e^{i\lambda} \right) \right] d\xi'$$

Für den Fall des gestaffelten Gitters ( $\lambda \neq 0$ ) ist das in dieser Gleichung enthaltene Integral nur numerisch lösbar. Es macht sich hier die singuläre Stelle bei  $\xi = \xi'$  bemerkbar. Die singuläre Stelle kann beseitigt werden, wenn man die induzierten Geschwindigkeiten des Einzelflügels, wie sie bereits nach Gl.: 6.3.2.1 ermittelt wurden, abzieht. Für die Geschwindigkeit erhält man dann:

$$w = w_E + w_G \quad 6.3.3.1$$

Der Index E gilt für das Einzelprofil und der Index G für das Restgitter. Mit der Singularitätenbelegung auf der Profilschne wird wieder

$$\xi = \frac{x}{l} \quad \text{und} \quad \xi' = \frac{x'}{l}$$

und man erhält den Anteil der induzierten Geschwindigkeiten der Profile des Restgitters.

$$w_G = u_G - iv_G = \frac{1}{2t} \int_{x'=0}^l \left[ (q(x') + i\gamma(x')) \left[ e^{i\lambda} \cot \operatorname{anh} \left( \pi \frac{x - x'}{t} e^{i\lambda} \right) - \frac{1}{\pi} \frac{t}{x - x'} \right] \right] dx' \quad 6.3.3.2$$

wobei der Ausdruck

$$F(x - x') = e^{i\lambda} \cot \operatorname{anh} \left( \pi \frac{x - x'}{t} e^{i\lambda} \right) - \frac{1}{\pi} \frac{t}{x - x'} \quad 6.3.3.3$$

nach /59/ als Einflußfunktion bezeichnet wird.

Entsprechend der Beziehung 6.3.3.1 werden auch die beiden Komponenten u und v der induzierten Geschwindigkeit  $w = u - iv$  in die Anteile des Einzelprofils und denen des Restgitters sowie in die entsprechenden Anteile der Zirkulations- und Quellsenkenverteilung aufgespalten.

$$u = u_E + u_G \quad v = v_E + v_G \quad 6.3.3.4$$

und:

$$\begin{aligned} u_E &= u_{\gamma E} + u_{qE} & u_G &= u_{\gamma G} + u_{qG} \\ v_E &= v_{\gamma E} + v_{qE} & v_G &= v_{\gamma G} + v_{qG} \end{aligned} \quad 6.3.3.5$$

Die Komponenten des Restgitters erhält man aus der Beziehung 6.3.3.2.

$$u_{\gamma G} = -\frac{1}{2t} \int_{x'=0}^l \gamma(x') I(F) dx' \quad 6.3.3.6$$

$$v_{\gamma G} = -\frac{1}{2} \frac{l}{t} \int_{x'=0}^l \gamma(x') R(F) dx' \quad 6.3.3.7$$

$$u_{qG} = \frac{1}{2} \frac{l}{t} \int_{x'=0}^l q(x') R(F) dx' \quad 6.3.3.8$$

$$v_{qG} = -\frac{1}{2} \frac{l}{t} \int_{x'=0}^l q(x') I(F) dx' \quad 6.3.3.9$$

wobei  $R(F)$  und  $I(F)$  den Realteil bzw. den Imaginärteil der Einflussfunktion darstellt. Diese Anteile erhält man durch Aufspalten der Beziehung 6.3.3.3.

Mit der Eulerschen Gleichung

$$e^{i\lambda} = \cos \lambda + i \sin \lambda$$

wird aus dem Glied mit dem hyperbolischen Cotangens der Gleichung 6.3.3.3

$$\cot \operatorname{anh} \left[ \pi \frac{x-x'}{t0} \cos \lambda + i \pi \frac{x-x'}{t} \sin \lambda \right] = \cot \operatorname{anh}(a + ib)$$

$$= \frac{\cosh a \cosh ib + \sinh a \sinh ib}{\sinh a \cosh ib + \cosh a \sinh ib} = \frac{\cosh a \cos b + i \sinh a \sin b}{\sinh a \cos b + i \cosh a \sin b}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit  $\sinh a \cos b - i \cosh a \sin b$ , so wird:

$$\cot \operatorname{anh}(a + ib) = \frac{\cosh a \sinh a \cos^2 b + \sinh a \cosh a \sin^2 b + i(\sinh^2 a \sin b \cos b - \cosh^2 a \cos b \sin b)}{\sinh^2 a \cos^2 b + \cosh^2 a \sin^2 b}$$

$$= \frac{\sinh 2a(\cos^2 b + \sin^2 b) - i \sin 2b(\cosh^2 a - \sinh^2 a)}{\sinh^2 a(1 - \cos 2b) + \cosh^2 a(1 - \cos 2b)}$$

$$= \frac{\sinh 2a - i \sin 2b}{\sinh^2 a + \cosh^2 a - \cos 2b}$$

Mit

$$\cosh^2 a + \sinh^2 a = 1 + 2 \sinh a = \cosh 2a$$

folgt

$$\cot \operatorname{anh}(a + ib) = \frac{\sinh 2a - i \sin 2b}{\cosh 2a - \cos 2b}$$

oder die Einflussfunktion:

$$F(x-x') = (\cos \lambda + i \sin \lambda) \frac{\sinh \left( 2\pi \frac{x-x'}{t} \cos \lambda \right) - i \sin \left( 2\pi \frac{x-x'}{t} \sin \lambda \right)}{\cosh \left( 2\pi \frac{x-x'}{t} \cos \lambda \right) - \cos \left( 2\pi \frac{x-x'}{t} \sin \lambda \right)}$$

Für den Realteil erhält man:

$$R(F) = \frac{\cos \lambda \sinh \left( 2\pi \frac{x-x'}{t} \cos \lambda \right) + \sin \lambda \sin \left( 2\pi \frac{x-x'}{t} \sin \lambda \right)}{\cosh \left( 2\pi \frac{x-x'}{t} \cos \lambda \right) - \cos \left( 2\pi \frac{x-x'}{t} \sin \lambda \right)} - \frac{t}{\pi(x-x')} \quad 6.3.3.10$$



Und für den Imaginäranteil:

$$I(F) = \frac{\sin \lambda \sinh\left(2\pi \frac{x-x'}{t} \cos \lambda\right) - \cos \lambda \sin\left(2\pi \frac{x-x'}{t} \sin \lambda\right)}{\cosh\left(2\pi \frac{x-x'}{t} \cos \lambda\right) - \cos\left(2\pi \frac{x-x'}{t} \sin \lambda\right)} \quad 6.3.3.11$$

Entsprechend den Gleichungen 6.3.3.4 und 6.3.3.5 lassen sich die induzierten Geschwindigkeitskomponenten getrennt behandeln. Dies hat, wie wir noch sehen werden, gewisse Vorteile bei der Ermittlung der Profilparameter im Gitterverband.

Im Abschnitt 6.3.2 hatten wir uns bereits auf eine parabolische Skelettlinie mit 50% Wölbungsrücklage festgelegt und die Zirkulationsverteilung zu

$$\frac{\gamma(x)}{U_\infty} = A_1 \sin \varphi$$

erhalten. Führen wir diese Beziehung in die Gleichungen 6.3.3.6 und 6.3.3.7 ein, erhalten wir die induzierten Geschwindigkeiten des Restgitters zu:

$$u_{\gamma G} = -U_\infty A_1 \frac{1}{4} \frac{l}{t} \int_{\xi'=0}^l \sin \varphi I(F) d\xi' \quad 6.3.3.12$$

und

$$v_{\gamma G} = -U_\infty A_1 \frac{1}{t} \int_{\xi'=0}^l \sin \varphi R(F) d\xi' \quad 6.3.3.13$$

Nach Gl.: 6.3.2.4 ist die induzierte Geschwindigkeit  $u_{\gamma E}$  des Einzelprofils auf beiden Seiten der Profilversehne gleich groß aber mit entgegengesetztem Vorzeichen. Auf der Sehne wird  $u_{\gamma E}$

im Mittel gleich Null, da nach der Beziehung 6.3.1.6 hier die kinematischen Strömungsbedingungen erfüllt werden. Dann gilt:

$$u_\gamma = u_{\gamma G} \quad 6.3.3.14$$

$$v_\gamma = v_{\gamma E} + v_{\gamma G} \quad 6.3.3.15$$

Setzt man in die Gleichungen 6.3.3.14 und 6.3.3.15 die Werte nach den Beziehungen 6.3.3.12; 6.3.3.13; 6.3.2.26 und 6.3.2.27 in Verbindung mit der Gleichung 6.3.2.32 ein, erhält man für die induzierten Geschwindigkeiten die Ausdrücke:

$$u_\gamma = -U_\infty A_1 \frac{1}{2} \frac{l}{t} \int_{\xi'=0}^l \sin \varphi I(F) d\xi'$$

und

$$v_\gamma = \frac{1}{2} U_\infty A_1 \cos \varphi' - U_\infty A_1 \frac{1}{2} \frac{l}{t} \int_{\xi'=0}^l \sin \varphi R(F) d\xi'$$

Schlichting /59/ verwendet folgende Beziehungen:

$$g_{\gamma 1} = -\frac{l}{t} \int_{\xi'=0}^l \sin \varphi I(F) d\xi' \quad 6.3.3.16$$

$$f_{\gamma 1} = -\frac{l}{t} \int_{\xi'=0}^l \sin \varphi R(F) d\xi' \quad 6.3.3.17$$

Die Werte der Integrale sind in der Arbeit von Schlichting /59/ für verschiedene Längenkoordinaten angegeben. Es ist dann:

$$u_\gamma = \frac{U_\infty}{2} A_1 g_{\gamma 1} \quad 6.3.3.18$$

$$v_\gamma = \frac{U_\infty}{2} A_1 (f_{\gamma 1} + \cos \varphi) \quad 6.3.3.19$$

Die Konstante  $A_1$  erhält man aus der Bedingung, dass die Gesamtzirkulation der Gitterprofile

$$\Gamma = \Delta w_u t \quad 6.3.3.20$$

sein muss. Setzt man diesen Ausdruck mit der Gl.:6.3.2.32a gleich, so wird:

$$A_1 = \frac{\Delta w_u t}{2} \frac{8}{l \pi U_\infty} \quad 6.3.3.21$$

Für die Vorderkante eines Profils gilt

$$\cos \varphi = +1$$

und für die Hinterkante

$$\cos \varphi = -1$$

Die durch die Zirkulationsverteilung induzierten bezogenen Geschwindigkeiten an der Vorderkante des Profils sind dann:

$$\frac{u_{\gamma v}}{\Delta w_u / 2} = \frac{g_{\gamma v}}{\frac{\pi l}{4 t}} \quad \frac{v_{\gamma v}}{\Delta w_u / 2} = \frac{f_{\gamma v} + 1}{\frac{\pi l}{4 t}} \quad 6.3.3.22$$

und für die Hinterkante des Profils:

$$\frac{u_{\gamma H}}{\Delta w_u / 2} = \frac{g_{\gamma H}}{\frac{\pi l}{4 t}} \quad \frac{v_{\gamma H}}{\Delta w_u / 2} = \frac{f_{\gamma H} - 1}{\frac{\pi l}{4 t}} \quad 6.3.3.23$$

In Abschnitt 6.3.2 hatten wir für die Quell-Senkenverteilung die Beziehung

$$\frac{q(x)}{U_\infty} = B_0 \cot \operatorname{an} \left( \frac{\varphi}{2} \right) + B_1 \sin \varphi + B_2 \sin(2\varphi) + B_3 \sin(3\varphi) \quad 6.3.3.24$$

mit den entsprechenden Konstanten gefunden. Führen wir diese in die Gleichung 6.3.3.8 und 6.3.3.9 ein, so folgt mit den Abkürzungen nach Schlichting:

$$u_{qG} = \frac{U_\infty}{2} [B_0 g_{q0} + B_1 g_{q1} + B_2 g_{q2} + B_3 g_{q3}] \quad 6.3.3.25$$

und

$$v_{qG} = \frac{U_\infty}{2} [B_0 f_{q0} + B_1 f_{q1} + B_2 f_{q2} + B_3 f_{q3}] \quad 6.3.3.26$$

Dabei bedeutet:

$$g_{q0} = + \frac{l}{t} \int_{\xi'=0}^1 \cot \operatorname{an} \left( \frac{\varphi'}{2} \right) R(F) d\xi' = -f_{\gamma 0}$$

$$g_{q1} = + \frac{l}{t} \int_{\xi'=0}^1 \sin \varphi' R(F) d\xi' = -f_{\gamma 1} \quad 6.3.3.27$$

$$g_{q2} = + \frac{l}{t} \int_{\xi'=0}^1 \sin(2\varphi') R(F) d\xi' = -f_{\gamma 2}$$

$$\begin{aligned}
g_{q3} &= +\frac{l}{t} \int_{\xi'=0}^1 \sin(3\varphi') R(F) d\xi' = -f_{\gamma3} \\
f_{q0} &= -\frac{l}{t} \int_{\xi'=0}^1 \cot \operatorname{an}\left(\frac{\varphi'}{2}\right) I(F) d\xi' = g_{\gamma0} \\
f_{q1} &= -\frac{l}{t} \int_{\xi'=0}^1 \sin \varphi' I(F) d\xi' = g_{\gamma1} \\
f_{q2} &= -\frac{l}{t} \int_{\xi'=0}^1 \sin(2\varphi') I(F) d\xi' = g_{\gamma2} \\
f_{q3} &= -\frac{l}{t} \int_{\xi'=0}^1 \sin(3\varphi') I(F) d\xi' = g_{\gamma3}
\end{aligned} \tag{6.3.3.27}$$

Nach der Gl.: 6.3.25 ist  $t$  die induzierte Geschwindigkeit  $v_{qE}$  des Einzelprofils auf beiden Seiten der Sehne gleich groß aber mit entgegengesetzten Vorzeichen. Auf der Sehne ist dann  $v_{qE}$  im Mittel Null. Damit gilt:

$$u_q = u_{qE} + u_{qG} \tag{6.3.3.28}$$

$$v_q = v_{qG} \tag{6.3.3.29}$$

Setzt man in die Gleichungen 6.3.3.28 und 6.3.3.29 die Ausdrücke der Beziehungen 6.3.3.25; 6.3.3.26 und 6.3.2.34 ein, so erhält man die induzierten Geschwindigkeiten zu:

$$\frac{u_q}{U_\infty} = \frac{1}{2} [B_0 g_{q0}^* + B_1 g_{q1}^* + B_2 g_{q2}^* + B_3 g_{q3}^*] \tag{6.3.3.30}$$

$$\frac{v_q}{U_\infty} = \frac{1}{2} [B_0 f_{q0} + B_1 f_{q1} + B_2 f_{q2} + B_3 f_{q3}] \tag{6.3.3.31}$$

Dabei berücksichtigt

$$g_{q0}^* = g_{q0} + 1 \qquad g_{q2}^* = g_{q2} - \cos(2\varphi)$$

$$g_{q1}^* = g_{q1} - \cos \varphi \qquad g_{q3}^* = g_{q3} - \cos(3\varphi)$$

den Anteil der Einzelprofile.

Für die Profilkante bei  $\frac{x}{l} = 0$  gilt:

$$\cos \varphi = +1$$

$$\cos(2\varphi) = +1$$

$$\cos(3\varphi) = +1$$

und für die Profilhinterkante bei  $\frac{x}{l} = 1$

$$\cos \varphi = -1$$

$$\cos(2\varphi) = +1$$

$$\cos(3\varphi) = -1$$

Damit wird für die Profilverkante:

$$g_{q0V}^* = g_{q0V} + 1 \qquad g_{q2V}^* = g_{q2V} - 1$$

$$g_{q1V}^* = g_{q1V} - 1 \qquad g_{q3V}^* = g_{q3V} - 1 \tag{6.3.3.32}$$

-und für die Profilhinterkante:

$$\begin{aligned} g_{q0H}^* &= g_{q0H} + 1 & g_{q2H}^* &= g_{q2H} - 1 \\ g_{q1H}^* &= g_{q1H} + 1 & g_{q3H}^* &= g_{q3H} + 1 \end{aligned} \quad 6.3.3.33$$

Für die aerodynamisch stoßfreie Anströmung der Gitterprofile ist weiterhin:

$$U_\infty = w_\infty$$

Die auf die Profilflächen bezogenen induzierten Geschwindigkeiten erhält man, wenn man die Gleichungen 6.3.3.30 und 6.3.3.31 durch die Gleichung 6.3.2.56 dividiert. Für die Profilverkante erhält man:

$$\frac{u_{qV}}{\frac{F_P}{l^2} w_\infty} = \frac{B_0 g_{q0V}^* + B_1 g_{q1V}^* + B_2 g_{q2V}^* + B_3 g_{q3V}^*}{\frac{\pi}{8} [6B_0 + 2B_1 + B_2]} \quad 6.3.3.34$$

$$\frac{v_{qV}}{\frac{F_P}{l^2} w_\infty} = \frac{B_0 f_{q0V} + B_1 + B_2 f_{q2V} + B_3 f_{q3V}}{\frac{\pi}{8} [6B_0 + 2B_1 + B_2]} \quad 6.3.3.35$$

und für die Profilhinterkante:

$$\frac{u_{qH}}{\frac{F_P}{l^2} w_\infty} = \frac{B_0 g_{q0H}^* + B_1 g_{q1H}^* + B_2 g_{q2H}^* + B_3 g_{q3H}^*}{\frac{\pi}{8} [6B_0 + 2B_1 + B_2]} \quad 6.3.3.36$$

$$\frac{v_{qH}}{\frac{F_P}{l^2} w_\infty} = \frac{B_0 f_{q0H} + B_1 f_{q1H} + B_2 f_{q2H} + B_3 f_{q3H}}{\frac{\pi}{8} [6B_0 + 2B_1 + B_2]} \quad 6.3.3.37$$

Zur Berechnung der Abwindfunktionen nach den Gleichungen 6.3.3.16; 6.3.3.17 und 6.3.3.27 Benutzte Schlichting /59/ die Simpsonsche Regel unter Zugrundelegung von 20 Punkten. Die Ergebnisse der aus /59/ entnommenen Werte für die Abwindfunktionen sind nachfolgend tabellarisch in Abhängigkeit vom Staffelungswinkel und vom Teilungsverhältnis der Schaufelgitter zusammengestellt.

Abwindfunktionen nach /59/.

Pos.	$10^3 f_{q0}$	$10^3 f_{q1}$	$10^3 f_{q2}$	$10^3 f_{q3}$	$10^3 g_{q0}$	$10^3 f_{\gamma 1}$	$10^3 f_{\gamma 2}$	$10^3 f_{\gamma 3}$	$\frac{t}{l}$	$\beta_\infty [^\circ]$
		$= 10^3 g_{\gamma 1}$	$= 10^3 g_{\gamma 2}$	$= 10^3 g_{\gamma 3}$		$= -10^3 g_{q1}$	$= -10^3 g_{q2}$	$= -10^3 g_{q3}$		
V	0	0	0	0	94,4	96,1	-44,2	-3,6	2,0	
H	0	0	0	0	85,0	-96,1	-44,2	3,6	2,0	
V	0	0	0	0	157,5	162,5	-71,9	-8,5	1,5	
H	0	0	0	0	132,1	-162,5	-71,9	8,5	1,5	
V	0	0	0	0	216,1	225,0	-96,2	-14,1	1,25	
H	0	0	0	0	175,6	-225,0	-96,2	14,1	1,25	90
V	0	0	0	0	314	332	-133	-26,3	1,0	
H	0	0	0	0	225	-332	-133	26,3	1,0	
V	0	0	0	0	486	530	-189	-52,5	0,75	
H	0	0	0	0	623	-530	-189	52,5	0,75	
V	0	0	0	0	830	968	-280	-115,0	0,5	
H	0	0	0	0	409	-968	-280	115,0	0,5	
V	-44,2	45,6	-20,1	-2,5	84,1	84,9	-40,2	-2,7	2,0	
H	-37,0	-45,6	-20,1	2,5	80,9	-84,9	-40,2	2,7	2,0	
V	-71,3	75,2	-30,5	-6,1	143,5	146,5	-66,9	-6,6	1,5	75
H	-52,1	-75,2	-30,5	6,1	127,9	-146,5	-66,9	6,6	1,5	

Pos.	$10^3 f_{q0}$	$10^3 f_{q1}$ $= 10^3 g_{\gamma 1}$	$10^3 f_{q2}$ $= 10^3 g_{\gamma 2}$	$10^3 f_{q3}$ $= 10^3 g_{\gamma 3}$	$10^3 g_{q0}$	$10^3 f_{\gamma 1}$ $= -10^3 g_{q1}$	$10^3 f_{\gamma 2}$ $= -10^3 g_{q2}$	$10^3 f_{\gamma 3}$ $= -10^3 g_{q3}$	$\frac{t}{l}$	$\beta_{\infty} [^\circ]$
V	-94,0	101,4	-38	-10,1	198,7	204,7	-90,4	-11,4	1,25	75
H	-61,1	-101,4	-38	10,1	167,5	-204,7	-90,4	11,4	1,25	
V	-127,9	142,7	-47,1	-17,3	289,9	303,5	-126,7	-21,6	1,0	
H	-69,2	-142,7	-47,1	17,3	225,8	-303,5	-126,7	21,6	1,0	
V	-180,5	213,8	-56,7	-30,1	457,8	492,8	-185,8	-47,4	0,75	
H	-73,6	-213,8	-56,7	30,1	305,4	-492,8	-185,8	47,4	0,75	
V	-269,9	356,2	-63,2	-50,1	799,1	913,7	-281,1	-109,1	0,5	
H	-70,8	-356,2	-63,2	50,1	420,2	-913,7	-281,1	109,1	0,5	
V	-80,5	82,2	-37,6	-3,4	54,7	53,4	-27,6	0,2	2,0	60
H	-70,8	-82,2	-37,6	3,4	58,4	-53,4	-27,6	-0,2	2,0	
V	-132,8	138,1	-59,4	-9,4	98,6	98,0	-50,0	0,1	1,5	
H	-105,4	-138,1	-59,4	9,4	105,0	-98,0	-50,0	-0,1	1,5	
V	-178,4	188,7	-75,8	-16,5	140,7	141,1	-72,3	-1,1	1,25	
H	-126,4	-188,7	-75,8	16,5	150,8	-141,1	-72,3	1,1	1,25	
V	-249	269	-96,0	-30,6	226	222	-112	-6,0	1,0	
H	-142	-269	-96,0	30,6	212	-222	-112	6,0	1,0	
V	-358	409	-118	-58,7	381	380	-175	-25,8	0,75	
H	-148	-409	-118	58,7	299	-380	-175	25,8	0,75	
V	-537	683	-129	-103,4	708	750	-219	-91,3	0,5	
H	134	-683	-129	103,4	416	-750	-219	91,3	0,5	60
V	-101,4	99,1	-49,3	2,5	8,7	7,2	-6,7	2,9	2,0	45
H	-98,6	-99,1	-49,3	2,5	20,9	-7,2	-6,7	-2,9	2,0	
V	-175,4	177,2	-83,4	-6,9	28,3	21,6	-20,6	8,2	1,5	
H	-160,2	-177,2	-83,4	6,9	61,7	-21,6	-20,6	-8,2	1,5	
V	-243,5	248,3	-112,4	-14,2	55,2	42,2	-39,7	14,0	1,25	
H	-202,4	-248,3	-112,4	14,2	110,2	-42,2	-39,7	-14,0	1,25	
V	-351	365	-150	-33,6	111,4	89,6	-79,3	24	1,0	
H	-233	-365	-150	33,6	192,4	-89,6	-79,3	-24	1,0	
V	-518	566	-188	-83	246	202	-156	26	0,75	
H	-235	-566	-188	83	310	-202	-156	-26	0,75	
V	-789	962	-202	-163	552	488	-279	-56	0,5	
H	-204	-962	-202	163	431	-488	-279	56	0,5	45
V	-97,3	94,9	-50	1,1	-45,7	-46,4	20,6	3,5	2,0	30
H	-107	-94,9	-50	-1,1	-34,5	46,4	20,6	-3,5	2,0	
V	-180,2	176,6	-94,1	3,3	-67,3	-72,2	26,4	9,9	1,5	
H	-206,6	-176,6	-94,1	-3,3	-27,5	72,2	29,8	-9,9	1,5	
V	-268,1	261,4	-140,5	4,2	-76,5	-88,4	20,5	23,8	1,25	
H	-297,7	-261,4	-140,5	-4,2	19,7	88,4	20,5	-23,8	1,25	
V	-423	411	-214	-10	-57,8	-92,1	-18,3	57,6	1,0	
H	-580	-411	-214	10	146,6	92,1	-18,3	-57,6	1,0	
V	-660	674	-281	-96	53	-37,6	-127,9	91,7	0,75	
H	-341	-674	-281	96	349	37,6	-127,9	-91,7	0,75	
V	-1020	1160	-284	-243	337	145	-284	-4	0,5	
H	-269	-1160	-284	243	454	-145	-284	4	0,5	30
V	-60,7	58,5	-32,8	2,9	-93,2	-92,2	47	0,1	2,0	15
H	-78,2	-58,5	-32,8	-2,9	-100,2	92,2	47	-0,1	2,0	
V	-126,6	118,2	-74,1	13,5	170,2	-167,6	86,8	-0,6	1,5	
H	-197,2	-118,2	-74,1	-13,5	-184,2	167,6	86,8	0,6	1,5	
V	-216,3	195,9	-135,2	34,5	-246,0	-242,6	123,4	4,0	1,25	
H	-390,1	-195,9	-135,2	-34,5	-233,9	242,6	123,4	-4,0	1,25	
V	-444,1	386,8	-296,7	88,9	-323,7	-338,1	123,4	76,1	1,0	
H	-759,7	-386,8	-296,7	-88,9	59,9	338,1	123,4	-76,1	1,0	
V	-822,4	793	-446,4	-75,2	-199,2	-327,5	-109,4	279	0,75	
H	-437,9	-793	-446,4	75,2	566,5	327,5	-109,4	-279	0,75	
V	-1216	1265	-367,7	-367,9	64,5	-259,7	-294,7	42,8	0,5	
H	-410	-1256	-367,7	367,9	428,5	259,7	-249,7	-42,8	0,5	

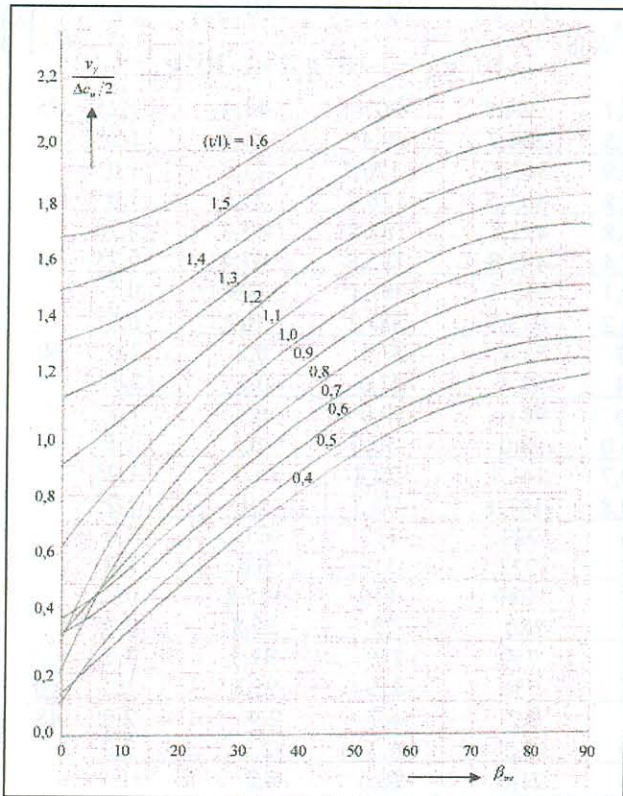


Abb.: 6.3.3.2 Induzierte Geschwindigkeiten  $\frac{v_\gamma}{\Delta c_u / 2}$   
Der Wirbelbelegung am Profil

Die mit Hilfe der Abwindfunktionen ermittelten bezogenen induzierten Geschwindigkeiten aus der Zirkulationsverteilung nach den Gleichungen

6.3.3.22 und 6.3.3.23 sind auf den Abbildungen

6.3.3.2 und 6.3.3.3 in Abhängigkeit vom Staffelungswinkel und Teilungsverhältnis des Profilgitters dargestellt. Die sich ergebenden Werte sind für die Profilvorderkante und für die Profilhinterkante gleich, haben aber ein entgegengesetztes Vorzeichen.

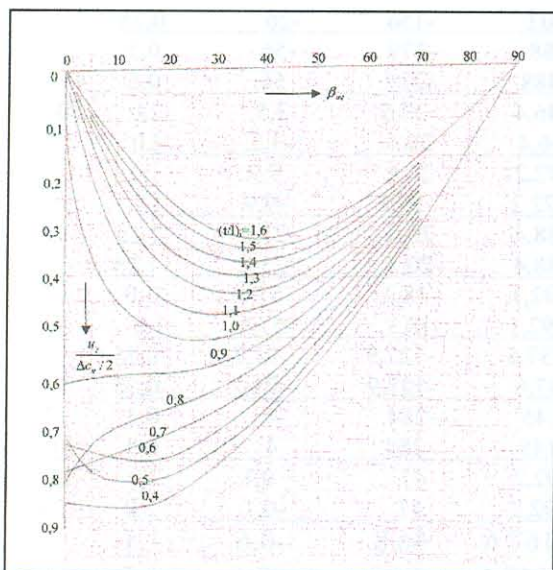


Abb.: 6.3.3.3 Induzierte Geschwindigkeiten  $\frac{u_\gamma}{\Delta c_u / 2}$  aus der Wirbelbelegung am Profil.

Die bezogenen induzierten Geschwindigkeiten aus der Quell- und Senkenverteilung für die Profile Q 30; Q 40 und Q 50 für die Profilvorder- und Profilhinterkante zeigen die Abbildungen 6.3.3.4 bis 6.3.3.15.

Mit Hilfe der induzierten Geschwindigkeiten können die Parameter der Gitterprofile für Axialverdichterstufen ermittelt werden.

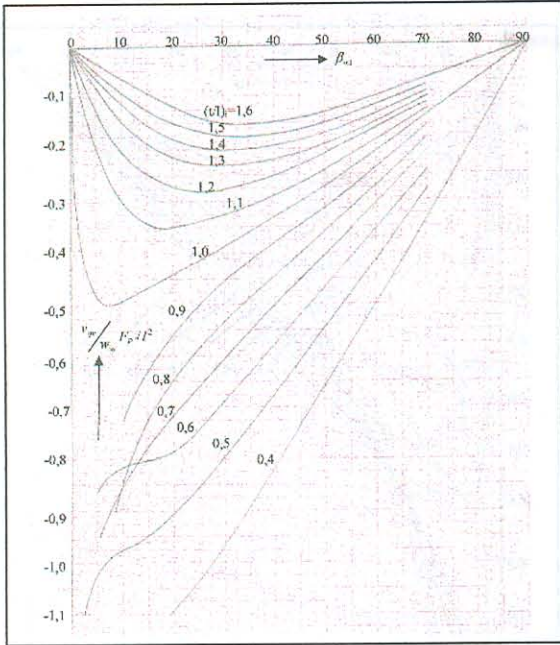


Abb.: 6.3.3.4 Induzierte Geschwindigkeiten  $v_{qv}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Vorderkante des Profils Q 30.

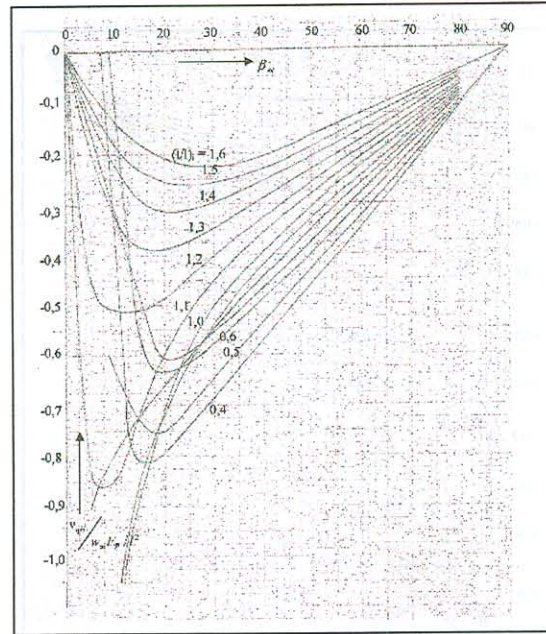


Abb.: 6.3.3.5 Induzierte Geschwindigkeiten  $v_{qh}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Hinterkante des Profils Q 30.

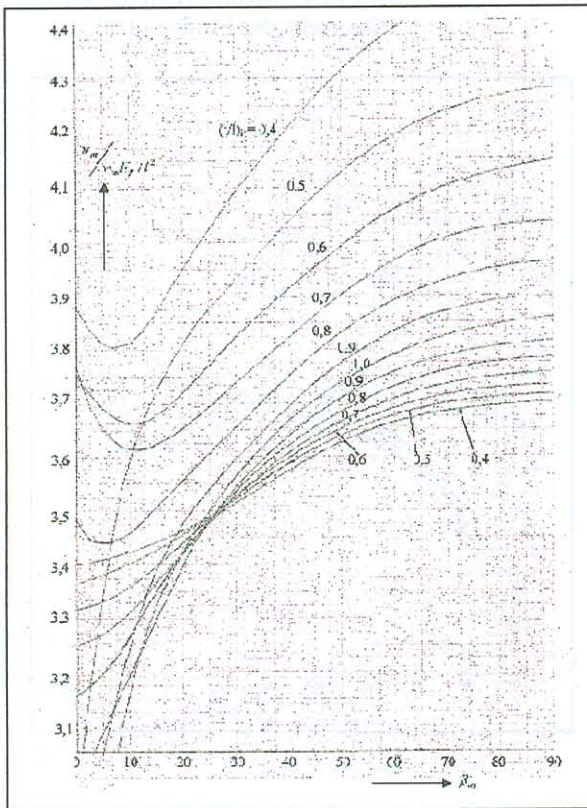


Abb.: 6.3.3.6 Induzierte Geschwindigkeiten  $u_{qv}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Vorderseite des Profils Q 30.

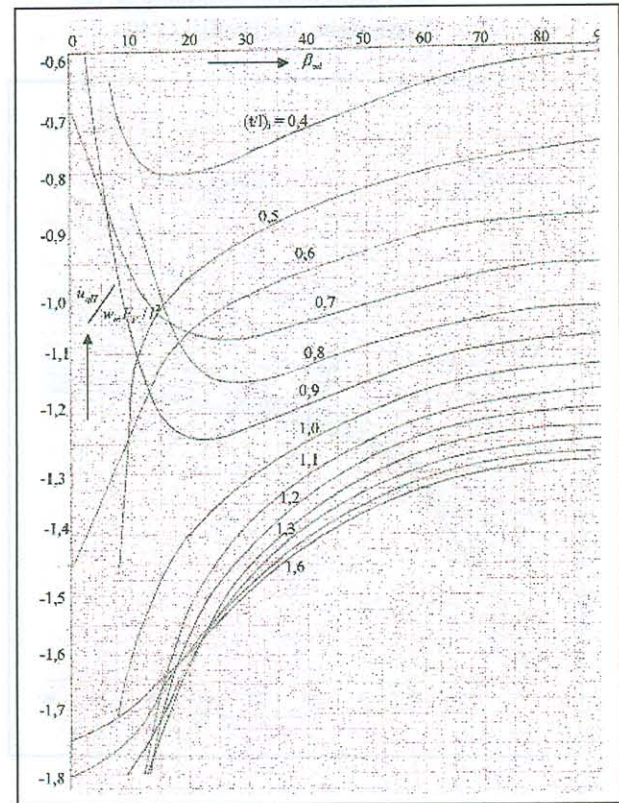


Abb.: 6.3.3.7 Induzierte Geschwindigkeiten  $u_{qh}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Hinterseite des Profils Q 30.

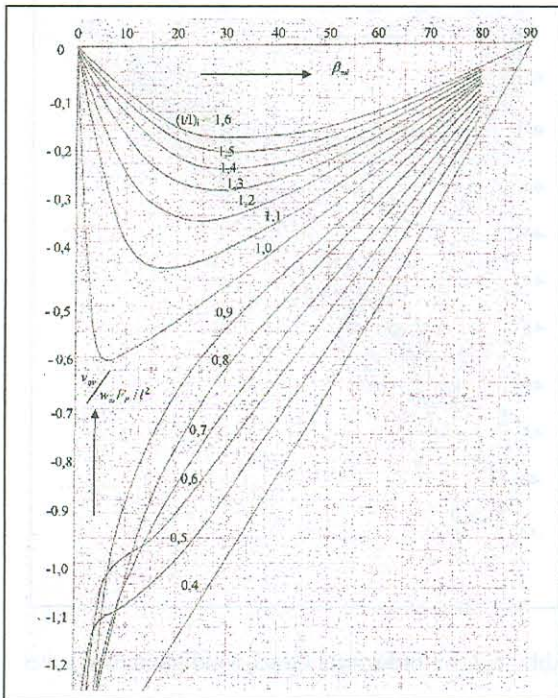


Abb.: 6.3.3.8 Induzierte Geschwindigkeiten  $v_{qV}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Vorderseite des Profils Q 40.

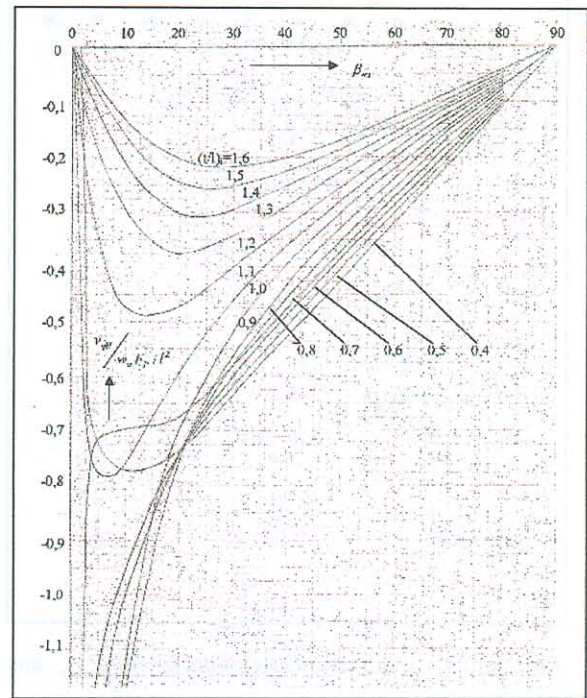


Abb.: 6.3.3.9 Induzierte Geschwindigkeiten  $v_{qH}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Hinterseite des Profils Q 40.

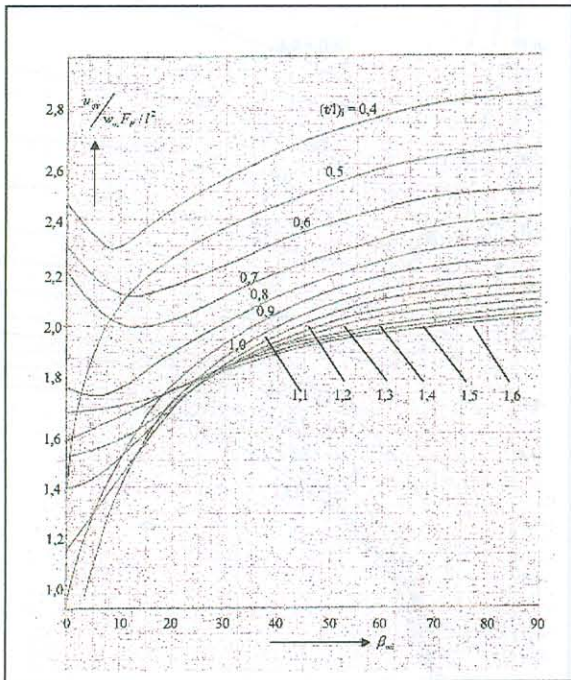


Abb.: 6.3.3.10 Induzierte Geschwindigkeiten  $u_{qV}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Vorderkante des Profils Q 40.

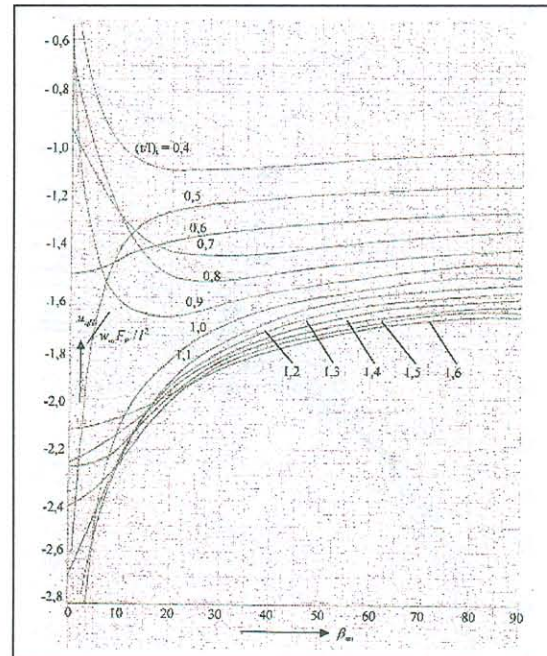


Abb.: 6.3.3.11 Induzierte Geschwindigkeiten  $u_{qH}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Hinterkante des Profils Q 40.-



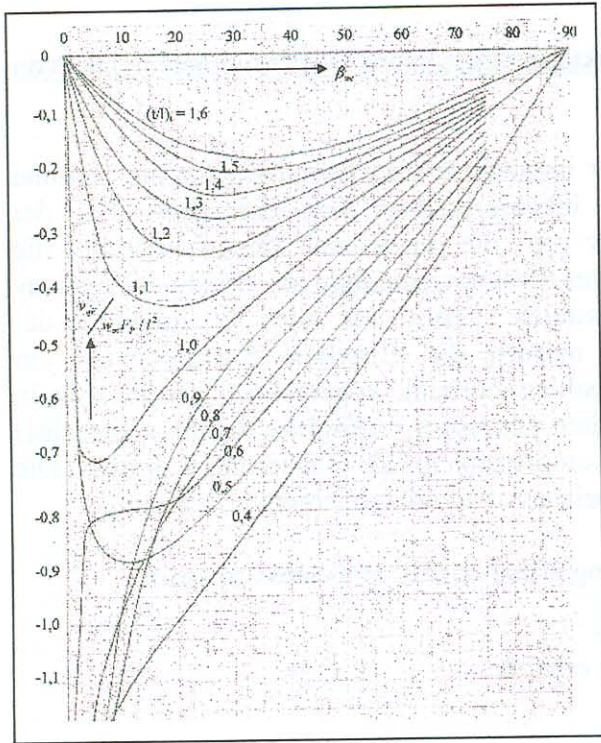


Abb.: 6.3.3.12 Induzierte Geschwindigkeiten  $v_{qV}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Vorderseite des Profils Q 50.

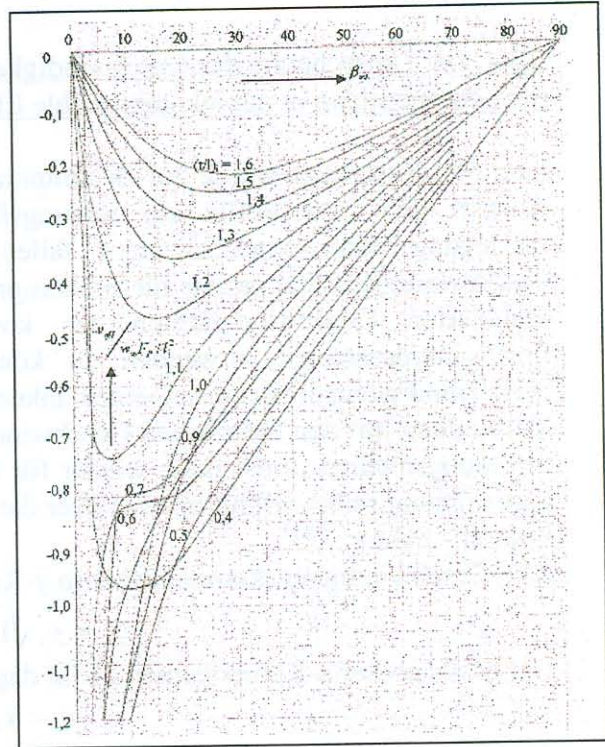


Abb.: 6.3.3.13 Induzierte Geschwindigkeiten  $v_{qH}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Hinterseite des Profils Q 50

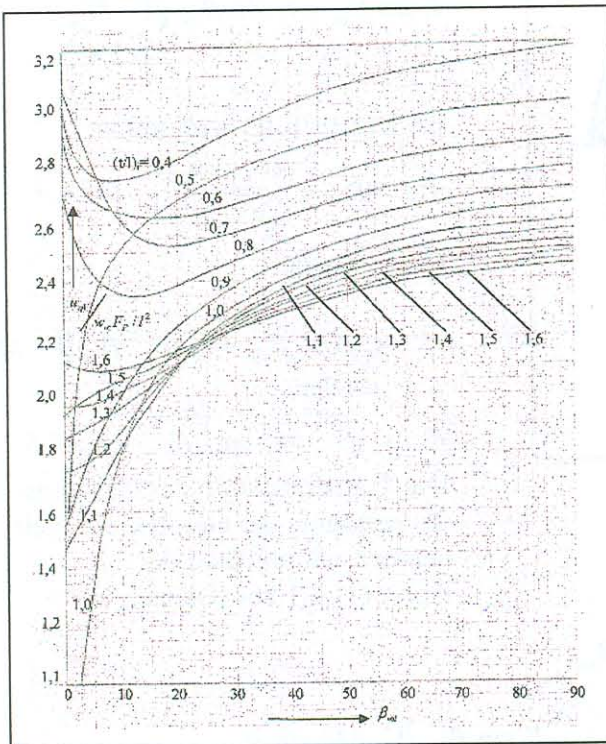


Abb.: 6.3.3.14 Induzierte Geschwindigkeiten  $u_{qV}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Vorderseite des Profils Q 50.

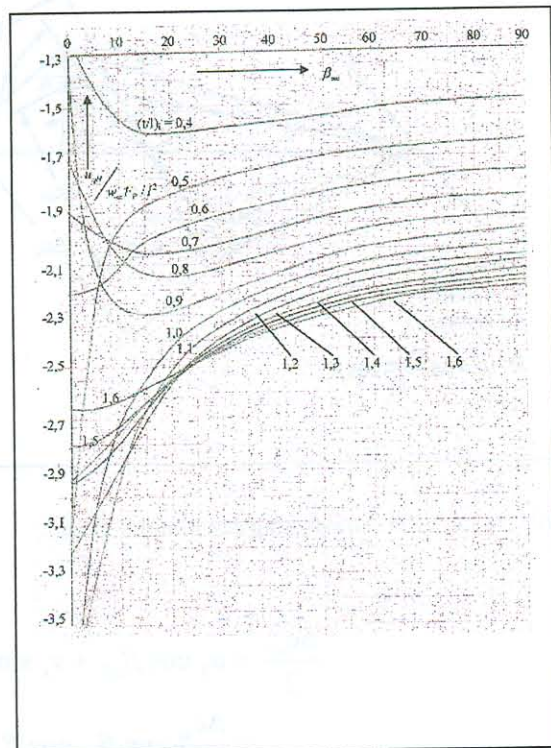


Abb.: 6.3.3.15 Induzierte Geschwindigkeiten  $u_{qH}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Hinterseite des Profils Q 50.

### 6.3.4 Die Umrechnung des Geschwindigkeitsvektordiagrammes eines Stufenelementes von der kompressiblen in die inkompressible Ebene.

Laut Voraussetzung wurde zur Bestimmung der induzierten Geschwindigkeiten am Ein- und Austritt der Gitterprofile ein reibungsfreies inkompressibles Gas betrachtet. Bei der Auslegung von Axialverdichtern fallen aber für die einzelnen Schaufelschnitte die Geschwindigkeitsdiagramme für ein kompressibles Strömungsmedium an. Um die bezogenen induzierten Geschwindigkeiten des kompressiblen Gases für die Bestimmung der Profilvergitterparameter verwenden zu können, müssen die einzelnen Komponenten der Geschwindigkeitsdreiecke auf einen inkompressiblen Zustand umgerechnet werden. Ein in Verbindung mit den induzierten Geschwindigkeiten erhaltenes Profilvergitter für inkompressible Strömungsmedien muss dann wieder für den kompressiblen Fall umgerechnet werden. Die Umrechnung selbst erfolgt mit den über die linearisierte Potentialgleichung erhaltenen Prandtl'-Faktor /65/.

Alle Geschwindigkeitskomponenten in y-Richtung erfahren eine Maßstabsverzerrung

$$y_i = y_k \sqrt{1 - M_\infty^2} \quad 6.3.4.1$$

Der Maßstab der x-Komponenten bleibt dagegen erhalten.

$$x_i = x_k \quad 6.3.4.2$$

Aus Abb.: 6.3.4.1 ist sofort erkennbar, dass

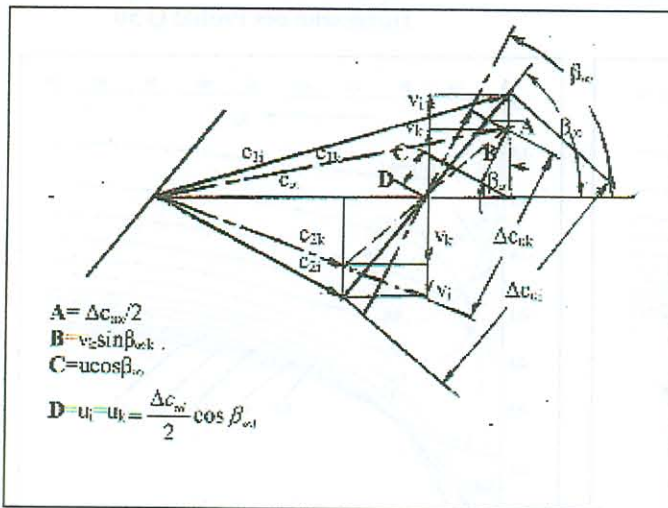


Abb.: 6.3.4.1 Zur Anwendung der Prandtl'-Regel.

$$t_i \cos \beta_{oi} = t_k \cos \beta_{ok}$$

und

$$t_i \sin \beta_{oi} = t_k \sin \beta_{ok} \sqrt{1 - M_\infty^2} \quad 6.3.4.3$$

ist. Daraus folgt unmittelbar

$$\cot \alpha n \beta_{oi} = \frac{\cot \alpha n \beta_{ok}}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \quad 6.3.4.4$$

Weiterhin ist:

$$t_i^2 = t_k^2 \cos^2 \beta_{ok} + t_k^2 \sin^2 \beta_{ok} (1 - M_\infty^2)$$

oder

$$t_i = t_k \sqrt{1 - M_\infty^2 \sin^2 \beta_{ok}} \quad 6.3.4.5$$

Die Transformierung der Umfangskomponente der Geschwindigkeit nehmen wir an Hand der

Abb.: 6.3.4.1 vor. Danach ist:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta c_{uk}}{2} &= u_k \cos \beta_{ok} + v_k \sin \beta_{ok} \\ &= \frac{\Delta c_{ui}}{2} \cos \beta_{oi} \cos \beta_{ok} + \frac{\Delta c_{ui}}{2} \sin \beta_{oi} \sqrt{1 - M_\infty^2} \sin \beta_{ok} \\ &= \frac{\Delta c_{ui}}{2} \cos \beta_{ok} \left[ \cos \beta_{oi} + \frac{\sin \beta_{oi}}{\cot \alpha n \beta_{ok}} \sqrt{1 - M_\infty^2} \right] \end{aligned}$$

Oder mit der Gleichung 6.3.4.4:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta c_{uk}}{2} &= \frac{\Delta c_i}{2} \cos \beta_{\infty k} \left[ \cos \beta_{\infty i} + \frac{\sin \beta_{\infty i}}{\cot \alpha n \beta_{\infty i}} \right] \\ &= \frac{\Delta c_{ui}}{2} \frac{\cos \beta_{\infty k}}{\cos \beta_{\infty i}} \left[ \cos^2 \beta_{\infty i} + \frac{\cos \beta_{\infty i} \sin \beta_{\infty i}}{\cot \alpha n \beta_{\infty i}} \right] \\ &= \frac{\Delta c_{ui}}{2} \frac{\cos \beta_{\infty k}}{\cos \beta_{\infty i}} \left[ \cos^2 \beta_{\infty i} + \sin^2 \beta_{\infty i} \right] \\ \frac{\Delta c_{uk}}{2} &= \frac{\Delta c_{ui}}{2} \frac{\cos \beta_{\infty k}}{\cos \beta_{\infty i}} \end{aligned} \quad 6.3.4.6$$

Erweitert man diese Beziehung mit  $\sin \beta_{\infty i}$ , so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta c_{uk}}{2} &= \frac{\Delta c_{ui}}{2} \frac{\cos \beta_{\infty k}}{\cot \alpha n \beta_{\infty i} \sin \beta_{\infty i}} = \frac{\Delta c_{ui}}{2} \frac{\cos \beta_{\infty k} \sqrt{1 + \frac{\cot \alpha n^2 \beta_{\infty k}}{1 - M_\infty^2}}}{\cot \alpha n \beta_{\infty k} \sqrt{1 - M_\infty^2}} \\ \frac{\Delta c_{uk}}{2} &= \frac{\Delta c_{ui}}{2} \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \beta_{\infty k}}{\sin^2 \beta_{\infty k} (1 - M_\infty^2)}} \sqrt{1 - M_\infty^2} \sin \beta_{\infty k} \\ \frac{\Delta c_{uk}}{2} &= \frac{\Delta c_{ui}}{2} \sqrt{\sin^2 \beta_{\infty k} (1 - M_\infty^2) + \cos^2 \beta_{\infty k}} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$\frac{\Delta c_{uk}}{2} = \frac{\Delta c_{ui}}{2} \sqrt{1 - M_\infty^2 \sin^2 \beta_{\infty k}} \quad 6.3.4.7$$

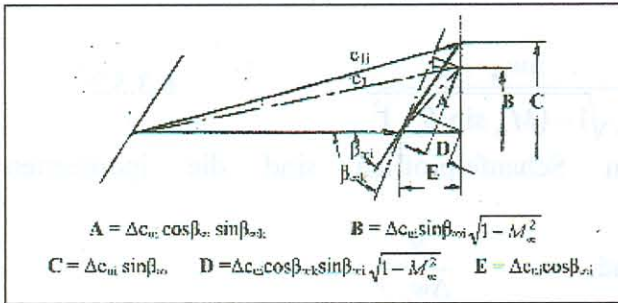


Abb.: 6.3.4.2 Zur Anwendung der Prandtl'-Regel.

zusätzliche axiale Geschwindigkeitskomponente auf. Nach Abb.: 6.3.4.2 gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta c_{ax}}{2} &= \frac{\Delta c_{ui}}{2} \cos \beta_{\infty i} \sin \beta_{\infty k} - \frac{\Delta c_{ui}}{2} \sin \beta_{\infty i} \cos \beta_{\infty k} \sqrt{1 - M_\infty^2} \\ &= \frac{\Delta c_{ui}}{2} \sin \beta_{\infty k} \left[ \cos \beta_{\infty i} - \sin \beta_{\infty i} \cot \alpha n \beta_{\infty k} \sqrt{1 - M_\infty^2} \right] \end{aligned}$$

oder mit der Gl.: 6.3.4.4:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta c_{ax}}{2} &= \frac{\Delta c_{ui}}{2} \sin \beta_{\infty k} \left[ \cos \beta_{\infty i} - \sin \beta_{\infty i} \cot \alpha n \beta_{\infty i} (1 - M_\infty^2) \right] \\ &= \frac{\Delta c_{ui}}{2} \sin \beta_{\infty k} \left[ \cos \beta_{\infty i} - \cos \beta_{\infty i} (1 - M_\infty^2) \right] \end{aligned}$$

Wie sich leicht nachweisen lässt, ist die Gesamtzirkulation in der kompressiblen Ebene und in der inkompressiblen Ebene gleich. Mit den Gleichungen 6.3.4.6 und 6.3.4.3 wird:

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \Delta c_{uk} \frac{\cos \beta_{\infty k}}{\cos \beta_{\infty i}} t_k \frac{\cos \beta_{\infty i}}{\cos \beta_{\infty k}} \\ \Gamma_i &= \Delta c_{uk} t_k = \Gamma_k \end{aligned} \quad 6.3.4.8$$

Durch die Transformation tritt eine

$$\frac{\Delta c_{ax}}{2} = \frac{\Delta c_{ui}}{2} \sin \beta_{\infty k} \cos \beta_{\infty i} M_{\infty}^2$$

Mit Gleichung 6.3.4.7 folgt dann:

$$\frac{\Delta c_{ax}}{2} = \frac{\Delta c_{uk}}{2} \frac{\sin \beta_{\infty k} \cos \beta_{\infty i} M_{\infty}^2}{\sqrt{1 - (M_{\infty} \sin \beta_{\infty k})^2}} \quad 6.3.4.9$$

Da die Profilkontur innerhalb einer Potentialströmung eine Stromlinie darstellt, gilt auch:

$$\left( \frac{F_p}{l^2} \right)_k = \left( \frac{F_p}{l^2} \right)_i \sqrt{1 - M_{\infty}^2} \quad 6.3.4.10$$

Damit sind alle Gleichungen, die zur Bestimmung der Gitterparameter benötigt werden, gegeben.

### 6.3.5 Ermittlung der Gitterparameter und der Profilkordinaten.

Bei der Ermittlung der induzierten Geschwindigkeiten wurde festgestellt, dass die einzelnen Anteile aus der Zirkulations- und der Quell- Senkenverteilung additiv behandelt werden können. Diese Methode soll hier, wie auch bei dem Verfahren von Schröder /58/, zur Ermittlung der Gitterparameter benutzt werden.

Wie bereits aus den Gleichungen 6.3.22 und 6.3.23 für die induzierten Geschwindigkeiten hervorgeht, ist u. a. die aus der Kinematik bekannte Umlenkung der Strömung als Maß für die Belastung eines Profilgitters anzusehen. Setzen wir zum Unterschied zur Zirkulation  $\Gamma = \Delta w_u t$  den Ausdruck

$$\bar{\Gamma} = \frac{\Delta w_u}{2w_{\infty}} \quad 6.3.5.1$$

als Belastungszahl für das Profilgitter an, so gilt hierfür in der inkompressiblen Ebene mit der Gl.: 6.3.4.7:

$$\bar{\Gamma}_i = \frac{\Delta w_{ui}}{2w_{\infty}} = \frac{\Delta w_{uk}}{2w_{\infty} \sqrt{1 - (M_{\infty} \sin \beta_{\infty k})^2}} \quad 6.3.5.2$$

Aus der Zirkulationsverteilung an den Schaufelprofilen sind die induzierten Geschwindigkeiten in der Form

$$\frac{v_{\gamma}}{\Delta w_u / 2} \quad \text{und} \quad \frac{u_{\gamma}}{\Delta w_u / 2}$$

an der Vorder- und Hinterkante der Profile für den inkompressiblen Strömungszustand gegeben. Multipliziert man diese Werte mit der Gl.: 6.3.5.2, so erhält man die durch die Zirkulationsverteilung hervorgerufenen Zusatzgeschwindigkeiten für den Profileintritt:

$$\left( \frac{v_{\gamma}}{w_{\infty}} \right)_i = \bar{\Gamma}_i \frac{v_{\gamma}}{\Delta w_u / 2} \quad \text{und} \quad \left( \frac{u_{\gamma}}{w_{\infty}} \right)_i = \bar{\Gamma}_i \frac{u_{\gamma}}{\Delta w_u / 2} \quad 6.3.5.3$$

und für die Profilaustrittskante:

$$\left( \frac{v_{\gamma H}}{w_{\infty}} \right)_i = \bar{\Gamma}_i \frac{v_{\gamma H}}{\Delta w_u / 2} \quad \text{und} \quad \left( \frac{u_{\gamma H}}{w_{\infty}} \right)_i = \bar{\Gamma}_i \frac{u_{\gamma H}}{\Delta w_u / 2} \quad 6.3.5.4$$

Bei der Umrechnung der Geschwindigkeiten von der kompressiblen in die inkompressible Ebene ergaben sich zusätzliche Komponenten der Axialgeschwindigkeit. Nach Gl.: 6.3.4.9 war:

$$\frac{\Delta c_{ax}}{2} = \frac{\Delta c_{uk}}{2} \frac{\sin \beta_{\infty k} \cos \beta_{\infty i} M_\infty^2}{\sqrt{(1 - M_\infty \sin \beta_{\infty k})^2}}$$

Dividiert man diese Beziehung durch die ungestörte Anströmgeschwindigkeit, erhält man nach Abb.: 6.3.4.2 für die Komponenten in der x- und y-Richtung:

$$\left( \frac{u_{\Delta cax/2}}{w_\infty} \right)_i = \bar{\Gamma}_i \cos \beta_{\infty i} (M_\infty \sin \beta_{\infty k})^2 \quad 6.3.5.5$$

$$\left( \frac{v_{\Delta cax/2}}{w_\infty} \right)_i = \bar{\Gamma}_i \cos \beta_{\infty i} (M_\infty \sin \beta_{\infty k})^2 \cot \alpha n \beta_{\infty i} \quad 6.3.5.6$$

Hinzu kommen noch die Axialgeschwindigkeitsunterschiede vor und hinter dem Gitter aus der kompressiblen Ebene in dimensionsloser Form auf die einzelnen Richtungen bezogen:

$$\left( \frac{u_{\Delta cax}}{w_\infty} \right)_i = \frac{c_{ax2} - c_{ax1}}{2w_\infty} \sin \beta_{\infty k} \quad 6.3.5.7$$

$$\left( \frac{v_{\Delta cax}}{w_\infty} \right)_i = \frac{c_{ax2} - c_{ax1}}{2w_\infty} \sin \beta_{\infty k} \cot \alpha n \beta_{\infty i} \quad 6.3.5.8$$

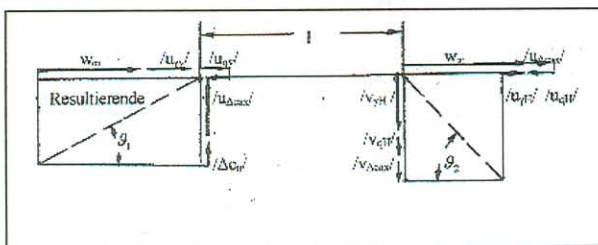


Abb.: 6.3.5.1 Addition der induzierten Geschwindigkeiten beim Verzögerungsgitter.

Entsprechend der Abb.: 6.3.5.1 muss für den Eintritt in das Profilvergitter für die Geschwindigkeiten in Richtung von  $w_\infty$  ein negatives und in Richtung senkrecht zu  $w_\infty$  ein positives Vorzeichen eingesetzt werden. Am Austritt des Profilvergitters drehen sich die Vorzeichen in Richtung  $w_\infty$  um.

Aus der Quell-Senkenverteilung sind weiterhin die bezogenen induzierten Geschwindigkeiten für den Ein- und Austritt eines Profilvergitters nach den Gleichungen 6.3.3.34 bis 6.3.3.37 in der Form

$$\frac{v_q}{\left( \frac{F_p}{l^2} \right)_i w_\infty} \quad \text{und} \quad \frac{u_q}{\left( \frac{F_p}{l^2} \right)_i w_\infty}$$

gegeben. Für den kompressiblen Fall ist die Profilverfläche durch die Gleichung 6.3.2.56 in der Form  $\frac{F_p}{l^2} = C \frac{d}{l}$  (siehe Abschnitt 6.3.2) bekannt.

Mit der Prandtl'schen Regel gilt für den inkompressiblen Fall:

$$\left( \frac{F_p}{l^2} \right)_i = \frac{\left( \frac{F_p}{l^2} \right)_k}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} = \frac{C d / l}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \quad 6.3.5.9$$

Für die auf die Geschwindigkeit  $w_\infty$  bezogenen und durch die Quell- und Senkenverteilung induzierten Geschwindigkeiten gilt dann für den Gittereintritt:

$$\left(\frac{v_{qV}}{w_\infty}\right)_i = \frac{Cd/l}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \frac{v_{qV}}{w_\infty \left(F_p/l^2\right)_i} \quad \left(\frac{u_{wV}}{w_\infty}\right)_i = \frac{Cd/l}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \frac{u_{qV}}{w_\infty \left(F_p/l^2\right)_i} \quad 6.3.5.10$$

und für den Gitteraustritt:

$$\left(\frac{v_{qH}}{w_\infty}\right)_i = \frac{Cd/l}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \frac{v_{qH}}{\left(F_p/l^2\right)_i} \quad \left(\frac{u_{qH}}{w_\infty}\right)_i = \frac{Cd/l}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \frac{u_{qH}}{\left(F_p/l^2\right)_i} \quad 6.3.5.11$$

Fasst man die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten zusammen, erhält man für den Gittereintritt:

$$\left(\frac{v}{w_\infty}\right)_i = \bar{\Gamma}_i \frac{v_{\mathcal{W}}}{\Delta w_u/2} + \cot an\beta_{\infty i} \left[ \bar{\Gamma}_i \cos \beta_{\infty i} (M_\infty \sin \beta_{\infty k})^2 + \frac{c_{ax2} - c_{ax1}}{2w_\infty} \sin \beta_{\infty k} \right] - \frac{Cd/l}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \frac{v_{\mathcal{W}}}{w_\infty \left(F_p/l^2\right)_i} \quad 6.3.5.12$$

$$\left(\frac{u}{w_\infty}\right)_{iV} = 1 + \bar{\Gamma}_i \frac{u_{\mathcal{W}}}{\Delta w_u/2} - \left[ \bar{\Gamma}_i \cos \beta_{\infty i} (M_\infty \sin \beta_{\infty k})^2 + \frac{c_{ax2} - c_{ax1}}{2w_\infty} \sin \beta_{\infty k} \right] + \frac{Cd/l}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \frac{u_{qV}}{w_\infty \left(F_p/l^2\right)_i} \quad 6.3.5.13$$

und für den Gitteraustritt:

$$\left(\frac{v}{w_\infty}\right)_{iH} = \bar{\Gamma}_i \frac{v_{\mathcal{H}}}{\Delta w_u/2} + \cot an\beta_{\infty i} \left[ \bar{\Gamma}_i \cos \beta_{\infty i} (M_\infty \sin \beta_{\infty k})^2 + \frac{c_{ax2} - c_{ax1}}{2w_\infty} \sin \beta_{\infty k} \right] + \frac{Cd/l}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \frac{v_{qH}}{\left(F_p/l^2\right)_i} \quad 6.3.5.14$$

$$\left(\frac{u}{w_\infty}\right)_{iH} = 1 - \bar{\Gamma}_i \frac{u_{\mathcal{H}}}{\Delta w_u/2} + \left[ \bar{\Gamma}_i \cos \beta_{\infty i} (M_\infty \sin \beta_{\infty k})^2 + \frac{c_{ax2} - c_{ax1}}{2w_\infty} \sin \beta_{\infty k} \right] - \frac{Cd/l}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \frac{u_{qH}}{\left(F_p/l^2\right)_i} \quad 6.3.5.15$$

Berechnet man das Leitgitter, so gilt:

$$\Delta w_u = \Delta c_u$$

$$w_\infty = c_\infty$$

Beim Laufgitter gilt für die Machzahl:

$$M_\infty^2 = \frac{w_\infty^2}{\kappa R \left[ T_{rel}^* - \frac{w_\infty^2}{2c_p} \right]} = \frac{w_\infty^2}{\kappa R \left[ T_1^* - \frac{1}{2c_p} (c_1^2 - w_1^2 + w_\infty^2) \right]} \quad 6.3.5.16$$



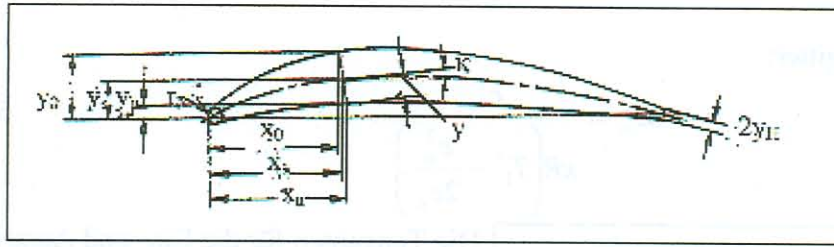


Abb.: 6.3.5.3 Zur Ermittlung der Profilkordinaten.

$$y_u = y_s - y \cos \kappa = y_s - \frac{y}{\sqrt{1 + \tan^2 \kappa}} \quad 6.3.5-27$$

$$x_u = x_s + y \sin \kappa = x_s + \frac{y \tan \kappa}{\sqrt{1 + \tan^2 \kappa}} \quad 6.3.5-28$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen können die Profile aufgezeichnet werden. Die bisher angegebenen Gleichungen gelten für Verzögerungsgitter. Das Vorleitgitter ist im Gegensatz dazu ein Beschleunigungsgitter. Es gelten hierfür die gleichen theoretischen Unterlagen nur mit anderen Vorzeichen.

Für die induzierten Geschwindigkeiten am Vorleitgittereintritt gilt:

$$\left( \frac{v}{c_\infty} \right)_{iV} = \bar{\Gamma}_i \frac{v_{\mathcal{W}}}{\Delta c_{uV}/2} + \cot \alpha_{oiV} \left[ \bar{\Gamma}_i M_\infty^2 \sin^2 \alpha_{oiV} + \frac{c_{ax1} - c_{ax0}}{2c_{oiV}} \sin \alpha_{ok} \right] - \frac{C d/l}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{v_{qV}}{c_{oiV} (F_P/l^2)} \quad 6.3.5-29$$

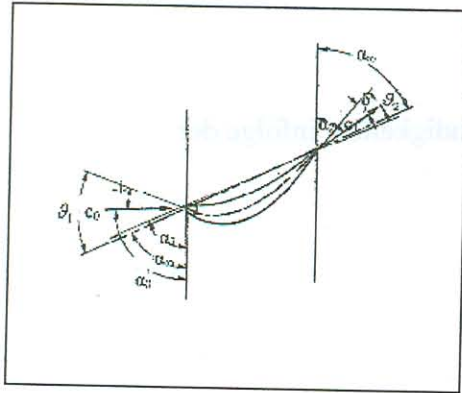
$$\left( \frac{u}{c_\infty} \right)_{iV} = 1 - \bar{\Gamma}_i \frac{u_{\mathcal{W}}}{\Delta c_{uV}/2} - \left[ \bar{\Gamma}_i \cos \alpha_{oi} (M_\infty \sin \alpha_{ok})^2 + \frac{c_{ax1} - c_{ax0}}{2c_{oiV}} \sin \alpha_{ok} \right] + \frac{C d/l}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{u_{qV}}{c_{oiV} (F_P/l^2)} \quad 6.3.5-30$$

und für den Gitteraustritt:

$$\left( \frac{v}{c_\infty} \right)_{iH} = \bar{\Gamma}_i \frac{v_{\mathcal{H}}}{\Delta c_{uV}/2} + \cot \alpha_{oi} \left[ \bar{\Gamma}_i \cos \alpha_{oi} (M_\infty \sin \alpha_{ok})^2 + \frac{c_{ax1} - c_{ax0}}{2c_{oiV}} \sin \alpha_{ok} \right] + \frac{C d/l}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{v_{qH}}{c_{oiV} (F_P/l^2)} \quad 6.3.5-31$$

$$\left( \frac{u}{c_\infty} \right)_{iH} = 1 + \bar{\Gamma}_i \frac{u_{\mathcal{H}}}{\Delta c_{uV}/2} + \left[ \bar{\Gamma}_i \cos \alpha_{oi} (M_\infty \sin \alpha_{ok})^2 + \frac{c_{ax1} - c_{ax0}}{2c_{oiV}} \sin \alpha_{ok} \right] - \frac{C d/l}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \frac{u_{qH}}{c_{oiV} (F_P/l^2)} \quad 6.3.5-32$$





Die weitere Ermittlung der Winkel  $g_{1k}$  und  $g_{2k}$  erfolgt wie beim Verzögerungsgitter.

Nach Abb.: 6.3.5.4 gilt :

Für den Stafflungswinkel

$$\alpha_T = \alpha_\infty - \frac{1}{2}(g_{2k} - g_{1k}) \quad 6.3.5.33$$

für die Minderablenkung

$$\delta = g_{2k} + (\alpha_1 - \alpha_\infty) \quad 6.3.5.34$$

Abb.: 6.3.5.4 Bezeichnungen am Beschleunigungsgitter.

und für den Stoßwinkel

$$i = -(\alpha_\infty + g_{1k} - \alpha_0) \quad 6.3.5.35$$

### 6.3.6 Geschwindigkeiten und Druckverlauf auf der Profilkontur und die maximale Profildicke

Die Geschwindigkeiten auf der Profilkontur setzen sich aus der Überlagerung der Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  und den induzierten Geschwindigkeiten sowohl aus der Quell-Senkenbelegung als auch aus der Zirkulationsbelegung zusammen. Über die Richtungsorientierung der induzierten Geschwindigkeiten geben die Abbildungen 6.3.5.1 und 6.3.6.2 Auskunft.

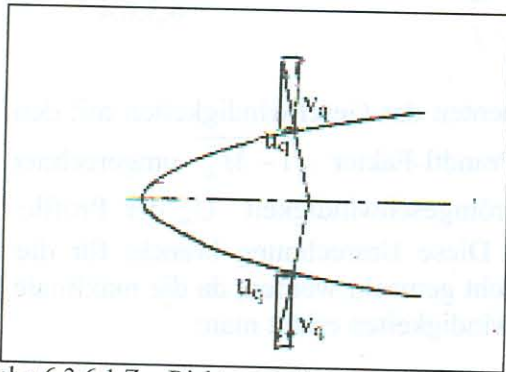


Abb.: 6.3.6.1 Zur Richtungsorientierung der induzierten Geschwindigkeiten  $u_q$  und  $v_q$ .

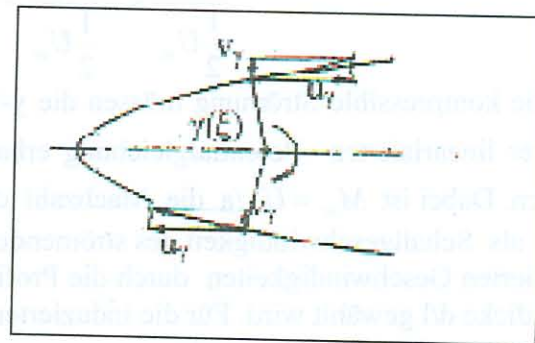


Abb.: 6.3.6.2 Zur Richtungsorientierung der induzierten Geschwindigkeiten  $u_\gamma$  und  $v_\gamma$ .

Für die Vorzeichen der induzierten Geschwindigkeiten infolge der Dickenverteilung der Profile gilt nach Abb.: 6.3.6.1:

- Auf der Saugseite des Profils

$$\begin{aligned} \uparrow & \quad v = v_q \\ \rightarrow & \quad u = -u_q \end{aligned}$$

- Auf der Druckseite des Profils

$$\begin{aligned} \uparrow & v = -v_q \\ \rightarrow & u = -u_q \end{aligned}$$

Analog gilt für die Vorzeichen der induzierten Geschwindigkeiten infolge der Skelettlinienkrümmung nach Abb.: 6.3.6.2

:

- Auf der Saugseite des Profils

$$v = +v_\gamma$$

$$u = +u_\gamma$$

- auf der Druckseite des Profils

$$v = +v_\gamma$$

$$u = -u_\gamma$$

Für die induzierten Geschwindigkeiten bei inkompressibler Strömung gilt dann:

- auf der Profilsaugseite

$$\frac{v_i}{\frac{1}{2}U_\infty} = \frac{v_\gamma}{\frac{1}{2}U_\infty} + \frac{v_q}{\frac{1}{2}U_\infty} \frac{d}{l} \quad 6.3.6.1$$

$$\frac{u_i}{\frac{1}{2}U_\infty} = \frac{u_\gamma}{\frac{1}{2}U_\infty} + \frac{u_q}{\frac{1}{2}U_\infty} \frac{d}{l} \quad 6.3.6.2$$

- auf der Profildruckseite

$$\frac{v_i}{\frac{1}{2}U_\infty} = \frac{v_\gamma}{\frac{1}{2}U_\infty} - \frac{v_q}{\frac{1}{2}U_\infty} \frac{d}{l} \quad 6.3.6.3$$

$$\frac{u_i}{\frac{1}{2}U_\infty} = -\frac{u_\gamma}{\frac{1}{2}U_\infty} - \frac{u_q}{\frac{1}{2}U_\infty} \frac{d}{l} \quad 6.3.6.4$$

Für die kompressible Strömung müssen die y-Komponenten der Geschwindigkeiten mit den aus der linearisierten Potentialgleichung erhaltenen Prandtl-Faktor  $\sqrt{1-M_\infty^2}$  umgerechnet werden. Dabei ist  $M_\infty = U_\infty/a$  die Machzahl der Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  der Profile mit  $a$  als Schallgeschwindigkeit des strömenden Gases. Diese Umrechnung braucht für die induzierten Geschwindigkeiten durch die Profilform nicht gemacht werden, da die maximale Profildicke  $d/l$  gewählt wird. Für die induzierten Geschwindigkeiten erhält man:

- auf der Profilsaugseite

$$\frac{v}{\frac{1}{2}U_\infty} = \frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \frac{v_\gamma}{\frac{1}{2}U_\infty} + \frac{v_q}{\frac{1}{2}U_\infty} \frac{d}{l} \quad 6.3.6.5$$

$$\frac{u}{\frac{1}{2}U_\infty} = \frac{u_\gamma}{\frac{1}{2}U_\infty} + \frac{u_q}{\frac{1}{2}U_\infty} \frac{d}{l} \quad 6.3.6.6$$

- auf der Profildruckseite

$$\frac{v}{\frac{1}{2}U_\infty} = \frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \frac{v_\gamma}{\frac{1}{2}U_\infty} - \frac{v_q}{\frac{1}{2}U_\infty} \frac{d}{l} \quad 6.3.6.7$$

$$\frac{u}{\frac{1}{2}U_\infty} = -\frac{u_\gamma}{\frac{1}{2}U_\infty} - \frac{u_q}{\frac{1}{2}U_\infty} \frac{d}{l} \quad 6.3.6.8$$

Für inkompressible Strömungsmedien gehen die Gleichungen 6.3.6.5 bis 6.3.6.8 wieder in die Gleichungen 6.3.6.1 bis 6.3.6.4 über. Nun können die Geschwindigkeiten auf der Profilkontur angegeben werden. Auf Grund der angegebenen Gleichungen ist bereits zu erkennen, dass auf der Profilsaugseite die größeren Strömungsgeschwindigkeiten zu erwarten sind. Für die Geschwindigkeit auf der Profilkontur gilt:

$$w^2 = (U_\infty + u)^2 + v^2$$

bzw.

$$w = \frac{U_\infty}{2} \sqrt{\left(2 + \frac{u}{\frac{1}{2}U_\infty}\right)^2 + \left(\frac{v}{\frac{1}{2}U_\infty}\right)^2}$$

Mit den Gleichungen 6.3.6.5 bis 6.3.6.8 erhält man

- für die Profilsaugseite

$$w = \frac{U_\infty}{2} \sqrt{\left(2 + \frac{u_\gamma}{\frac{1}{2}U_\infty} + \frac{u_q}{\frac{1}{2}U_\infty} \frac{d}{l}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \frac{v_\gamma}{\frac{1}{2}U_\infty} + \frac{v_q}{\frac{1}{2}U_\infty} \frac{d}{l}\right)^2} \quad 6.3.6.9$$

- für die Profildruckseite

$$w = \frac{U_\infty}{2} \sqrt{\left(2 - \frac{u_\gamma}{\frac{1}{2}U_\infty} - \frac{u_q}{\frac{1}{2}U_\infty} \frac{d}{l}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} \frac{v_\gamma}{\frac{1}{2}U_\infty} - \frac{v_q}{\frac{1}{2}U_\infty} \frac{d}{l}\right)^2} \quad 6.3.6.10$$

Sind die Geschwindigkeiten auf der Profilkontur nach der linearisierten gasdynamischen Potentialtheorie durch Einführung des Prandtl - Faktors entsprechend den Gleichungen 6.3.6.9 und 6.3.6.10 ermittelt, darf bei konsequentem Handeln die Druckverteilung auf der Profiloberfläche nicht nach der gasdynamischen Bernoulli-Gleichung ermittelt werden, sondern diese muss auch linearisiert werden.

Ausgegangen wird von der Euler-Gleichung:

$$w dw = -\frac{dp}{\rho}$$

$$p - p_\infty = -\int_{U_\infty}^{U_\infty + \Delta w} \rho w dw$$

Mit den Voraussetzungen  $\rho = \rho_\infty + \Delta\rho$  und  $w = U_\infty + \Delta w$  gilt dann:

$$p - p_\infty = -\int_{U_\infty}^{U_\infty + \Delta w} (\rho + \Delta\rho)(U_\infty + \Delta w) dw$$

Werden nun die Produkte der kleinen Größen vernachlässigt, so ist auch:

$$p - p_\infty = -\rho_\infty U_\infty \int dw = -\rho_\infty U_\infty \Delta w$$

oder:

$$\frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2} = \frac{\Delta p}{q} = -2 \frac{\Delta w}{U_\infty} = -2 \frac{w - U_\infty}{U_\infty} = -\left(\frac{w}{U_\infty} - 1\right) \quad 6.3.6.11$$

wobei q der Staudruck der Anströmgeschwindigkeit des Profils ist.

Die Gleichung 6.3.6.11 wurde für ein Profil der Systematik

$$\left(\frac{d}{l}\right)_{\max} Q \frac{x_d}{l} \left(\frac{s}{l}\right) - \Theta P \frac{x_f}{l}$$

mit

$$\left(\frac{d}{l}\right)_{\max} = 0,2 \quad \text{als maximales Dickenverhältnis des Profils}$$

Q = Profilform nach der Quell-Senkenbelegung

$$\frac{x_d}{l} = 50 \quad \text{als Dickenrücklage der Profilform in \%}$$

$$\left(\frac{s}{l}\right) = 0,1 \quad \text{als Hinterkantendicke des Profils}$$

Θ = 22,6 als Wölbungswinkel des Profils

P = parabolische Skelettlinie

$$\frac{x_f}{l} = 50 \quad \text{als Wölbungsrücklage der Skelettlinie in \%}$$

mit den Anstellwinkeln  $\alpha = 0^\circ; 2^\circ$  und  $4^\circ$  als Parameter bei einer Anströmmachzahl von

$$M_\infty = \frac{U_\infty}{a} = 0,8 \quad \text{ausgewertet.}$$

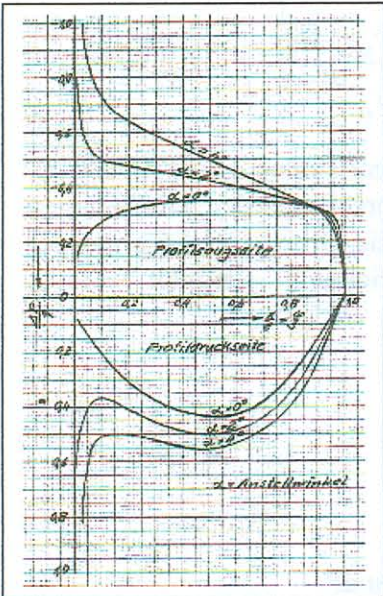


Abb.: 6.3.6.3 Theoretischer Druck-

Verlauf auf der Profilkontur bei einer Anströmmachzahl  $M_\infty = 0,8$

Die Ergebnisse zeigt die Abb.:6.3.6.3. Diese Abbildung verdeutlicht auch, dass auf der Saugseite eines Profils immer die größeren Strömungsgeschwindigkeiten vorhanden sind. An der Profilnase erkennt man bei den Druckverteilungen insbesondere bei den Anstellwinkeln  $\alpha > 0^\circ$  die Unstetigkeitsstellen der Theorie. In der Praxis sind diese nicht real und der Praktiker hält sich hierbei besser an die Darstellung der Abb.: 6.3.2.3 auf der die Konstante  $B_0$  in Abhängigkeit von der kritischen Anströmmachzahl mit den Anstellwinkel  $\alpha$  als Frage, bei welcher Anströmgeschwindigkeit  $U_{\infty \text{krit}}$  auf der Profilkontur gerade die Schallgeschwindigkeit  $w/a = 1$  auftritt. Mathematisch ist dies Eine einfache Extremwertaufgabe mit einem komplizierten Rechengang. Zur Lösung dieser Aufgabe führt aber auch eine Einfache Überlegung zum Ziel.

Für die Extremwertbedingung  $\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0$  ist der Tangens der Strömungsgeschwindigkeit auf der Profilkontur

gegenüber der Richtung der ungestörten Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung ( $\alpha = 0$ ) der Profile Null. Das bedeutet, dass an der Stelle der maximalen Geschwindigkeit auf der Profilkontur die Summe aller induzierten Geschwindigkeiten in y-Richtung der Profile Null sein müssen.

Für  $w/a = 1$ , d.h. bei Schallgeschwindigkeit auf der Profilkontur, liefert die Gl.: 6.3.6.9

$$\frac{2w/a}{U_\infty/a} = \frac{2}{M_{\infty kr}} = 2 + \frac{u_\gamma}{\frac{1}{2}U_\infty} + \frac{u_q}{\frac{1}{2}U_\infty}$$

oder mit den Gleichungen 6.3.2.27 und 6.3.2.34 bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung der Profile:

$$\frac{2}{M_{\infty kr}} = 2 + A_1 \cot an \varphi_k + A_2 \sin(2\varphi_k) + A_3 \sin(3\varphi_k) + \dots + B_0 - B_1 \cos \varphi_k - B_2 \cos(2\varphi_k) - B_3 \cos(3\varphi_k) - \dots \quad 6.3.6.12$$

Die dazugehörige Randbedingung, dass die Summe aller induzierten Geschwindigkeiten in y-Richtung Null sein müssen, ergibt sich mit den Gleichungen 6.3.2.26 und 6.3.2.33 bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung der Profile zu:

$$\frac{1}{\sqrt{1-M_\infty^2}} [A_1 \cos \varphi_k + A_2 \cos(2\varphi_k) + A_3 \cos(3\varphi_k) + \dots] + B_0 \cot an \left( \frac{\varphi_k}{2} \right) + B_1 \sin \varphi_k + B_2 \sin(2\varphi_k) + B_3 \sin(3\varphi_k) + \dots \quad 6.3.6.13$$

Dies ist die Bestimmungsgleichung für den Winkel  $\varphi_k$ , bei dem die Summe der induzierten Geschwindigkeiten in y-Richtung Null sein müssen.

Für eine parabolische Skelettlinie mit einer Wölbungsrücklage von 50% gehen die Gleichungen über in:

$$\frac{2}{M_{\infty kr}} = 2 + 8 \frac{f}{l} \sin \varphi_k + \frac{d}{l} \left[ \frac{B_0}{d/l} - \frac{B_1}{d/l} \cos \varphi_k - \frac{B_2}{d/l} \cos(2\varphi_k) - \frac{B_3}{d/l} \cos(3\varphi_k) + \dots \right]$$

oder die zugehörige maximale Profildicke:

$$\left( \frac{d}{l} \right)_{kr} = \frac{2 \left( \frac{1}{M_{\infty kr}} - 1 \right) - 8 \frac{f}{l} \sin \varphi_k}{\left[ \frac{B_0}{d/l} - \frac{B_1}{d/l} \cos \varphi_k - \frac{B_2}{d/l} \cos(2\varphi_k) - \frac{B_3}{d/l} \cos(3\varphi_k) - \dots \right]} \quad 6.3.6.14$$

Ein Vergleich der induzierten Geschwindigkeiten zeigt, dass die Skelettlinienwölbung einen größeren Einfluss auf den Wert  $\left( \frac{d}{l} \right)_{kr}$  ausübt als die Dickenrücklage der Profilform.

Die Ermittlung der kritischen Anströmmachzahlen ist für das Profil vom Typ Q50-P50 besonders einfach. Bei diesem Profil liegt sowohl die maximale Zirkulationsverteilung als auch die maximale Quell-Senkenverteilung bei einem Winkel  $\varphi_k = 90^\circ$  entsprechend  $\frac{\pi}{2}$  ( $\xi = 0,5$ ). Damit liegt aber auch die maximale Strömungsgeschwindigkeit auf der Profilkontur bei  $\varphi_k = 90^\circ$ .

Die trigonometrischen Werte aus Gl.: 6.3.6.14 werden dann:

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2} &= 1 & \cos \frac{\pi}{2} &= 0 & \cot \alpha_n \left( \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \right) &= 1 \\ \sin \left( 2 \frac{\pi}{2} \right) &= 0 & \cos \left( 2 \frac{\pi}{2} \right) &= -1 \\ \sin \left( 3 \frac{\pi}{2} \right) &= -1 & \cos \left( 3 \frac{\pi}{2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Damit werden die induzierten Geschwindigkeiten in y-Richtung der Profile Null.

$$\frac{v_y}{\frac{1}{2} U_\infty} = 8 \frac{f}{l} 0 = 0$$

$$\frac{v_q}{\frac{1}{2} U_\infty} = B_0 + B_1 - B_3 = 0$$

Der letzte Ausdruck kann mit den Konstanten des Abschnittes 6.3.2 für das Profil Q 50 überprüft werden.

Sowohl aus der Gl.: 6.3.6.9 als auch aus der Gl.: 6.3.6.14 ergibt sich:

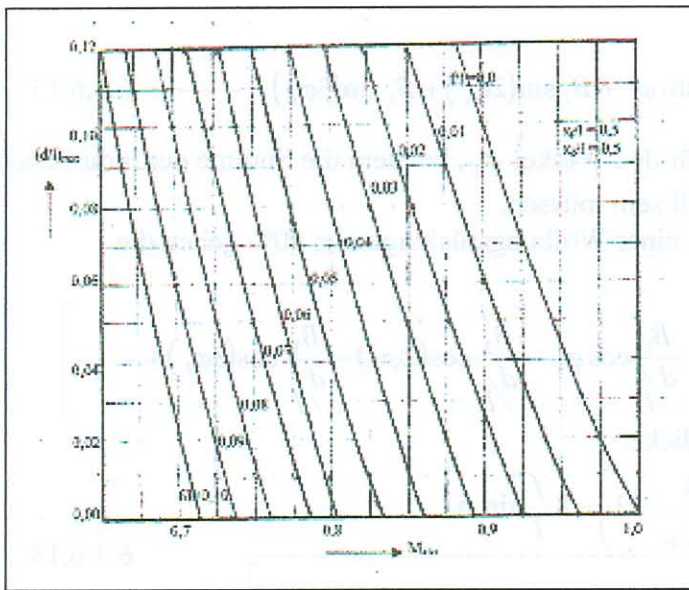


Abb.: 6.3.6.4 Maximale relative Profildicke  $d/l$  in Abhängigkeit von der kritischen Anströmmachzahl  $M_{\infty kr}$  mit der Skelettlinienwölbung

als Parameter bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung.

$$\frac{2}{M_{\infty kr}} = 2 + 8 \frac{f}{l} + \left( \frac{B_0}{d/l} + \frac{B_2}{d/l} \right) \left( \frac{d}{l} \right)_{kr}$$

oder nach  $d/l$  aufgelöst:

$$\left( \frac{d}{l} \right)_{kr} = \frac{2 \left( \frac{1}{M_{\infty kr}} - 1 \right) - 8 \frac{f}{l}}{\frac{B_0}{d/l} + \frac{B_2}{d/l}}$$

bzw. mit den Konstanten des Abschnittes 6.3.2 für das Profil Q 50.

$$\left( \frac{d}{l} \right)_{kr} = \frac{2 \left( \frac{1}{M_{\infty kr}} - 1 \right) - 8 \frac{f}{l}}{2,27558}$$

6.3.6.15

Aus dieser Gleichung 6.3.6.15 erhält man noch zwei Spezial

Für  $d/l = 0$  haben wir es mit einer gewölbten dünnen Platte zu tun. Man erhält hierfür aus Gl.: 6.3.6.15:

$$M_{\infty kr} = \frac{1}{4 \frac{f}{l} + 1} \quad 6.3.6.16$$

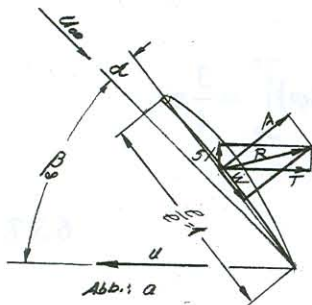
Für  $\frac{f}{l} = 0$  ergibt sich ein ungewölbtes Profil Q 50. Nach Gl.: 6.3.6.15 gilt dann:

$$\left(\frac{d}{l}\right)_{kr} = \frac{2 \left( \frac{1}{M_{\infty kr}} - 1 \right)}{2,27558} \quad 6.3.6.17$$

Eine Auswertung der Gleichungen 6.3.6.15 bis 6.3.6.17 zeigt die Abb.: 6.3.6.4 Bei der Wahl der Gitterprofillicken für einen Axialverdichter kann diese Abbildung eine gute Unterstützung geben.

### 6.3.7 Die Kräfte am Profil und deren Wirkungen.

Die Kräfte und Kraftwirkungen an einem Profil auslösende Anströmgeschwindigkeit ist jene, die ein auf einem Profil sitzender Beobachter messen kann. Bei einem ruhenden Profil ist es eine Absolutgeschwindigkeit. Hierzu zählen die Profile in den Vorleitgittern und in den Leitgittern der Axialverdichter. Bei den Profilen der Laufgitter ist es die Relativgeschwindigkeit des Strömenden Gases. In einem Axialverdichter wird im Vorleitgitter das Gas beschleunigt und in den Lauf- und Leitgitter verzögert.



Die Abb.: 6.3.7 zeigt jeweils ein aus einem Profilgitter herausgegriffenes Profil sowohl für eine verzögerte als auch für eine beschleunigte Strömung des Gases mit den Winkelbezeichnungen  $\beta_\infty$  und dem Anstellwinkel  $\alpha$  des Profils mit den am Profil wirkenden Kräften. Die Auftriebskraft A am Profil (siehe Abb.: 6.3.7) wurde im Abschnitt 6.3.1 (Gl.: 6.3.1.14) mit

$$A = \rho U_\infty \int_{x=0}^l \gamma(x) dx$$

angegeben. Dabei ist

$$\Gamma = \int_{x=0}^l \gamma(x) dx$$

die Gesamtzirkulation um das Profil. Mit der Gleichung 6.3.2.11 und

$$dx = \frac{l}{2} \sin \varphi d\varphi$$

nach Gl.: 6.3.2.10 erhält man für die Gesamtzirkulation um ein Profil:

- a) Verzögerungsgitter  
b) Beschleunigungsgitter  
Abb.:6.3.7.1 Kräfte am Profil.

$$\Gamma = U_\infty \frac{l}{2} \int_0^\pi \left[ A_0 \cot \alpha n \left( \frac{\varphi}{2} \right) \sin \varphi + A_1 \sin^2 \varphi + A_2 \sin(2\varphi) \sin \varphi + A_3 \sin(3\varphi) \sin \varphi \right] d\varphi$$

Mit den trigonometrischen Umformungen

$$\cot \alpha n \left( \frac{\varphi}{2} \right) \sin \varphi = \frac{\cos \left( \frac{\varphi}{2} \right)}{\sin \left( \frac{\varphi}{2} \right)} 2 \sin \left( \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left( \frac{\varphi}{2} \right) = 2 \cos^2 \left( \frac{\varphi}{2} \right) = 1 + \cos \varphi$$

$$\sin(2\varphi) \sin \varphi = 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi$$

$$\sin(3\varphi) \sin \varphi = 3 \sin^2 \varphi - 4 \sin^4 \varphi$$

lässt sich für die Gesamtzirkulation schreiben:

$$\Gamma = U_\infty \frac{l}{2} \left[ A_0 \int_0^\pi (1 - \cos \varphi) d\varphi + A_1 \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi + 2A_2 \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi + A_3 \int_0^\pi 3 \sin^2 \varphi d\varphi - A_3 \int_0^\pi 4 \sin^4 \varphi d\varphi \right]$$

Für die einzelnen Integrale gilt:

$$A_0 \int_0^\pi (1 - \cos \varphi) d\varphi = A_0 [\varphi + \sin \varphi]_0^\pi = A_0 \pi$$

$$A_1 \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_0^\pi = A_1 \frac{\pi}{2}$$

$$A_2 \int_0^\pi 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{3} A_2 \left[ \sin^3 \varphi \right]_0^\pi = 0$$

$$A_3 \int_0^\pi 3 \sin^2 \varphi d\varphi = A_3 \frac{3}{2} \pi$$

$$A_3 \int_0^\pi 4 \sin^4 \varphi d\varphi = 4A_3 \left[ \frac{3}{8} \varphi - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) + \frac{1}{32} \sin(4\varphi) \right]_0^\pi = \frac{3}{4} \pi A_3$$

Dann wird für die Gesamtzirkulation eines Profils:

$$\Gamma = U_\infty \frac{l}{2} \left[ \pi A_0 + \frac{\pi}{2} A_1 + \frac{3}{4} \pi A_3 \right] \quad 6.3.7.1$$

und die zugehörige Auftriebskraft am Profil:

$$A = U_\infty \rho \Gamma = \frac{\rho}{2} U_\infty^2 l \left[ A_0 \pi + A_1 \frac{\pi}{2} + A_3 \frac{3}{4} \pi \right] \quad 6.3.7.2$$

Wird die Auftriebskraft A mit dem Staudruck der Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  des Profils mit der Breitereinheit  $b=1$  dividiert, erhält man den dimensionslosen Auftriebsbeiwert des Profils. Allgemein gilt:

$$c_a = \frac{A}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2 l} = A_0 \pi + A_1 \frac{\pi}{2} + A_3 \frac{3}{4} \pi \quad 6.3.7.3$$

Die Dickenverteilung des Profils geht in den Auftriebsbeiwert nicht ein, da sich deren Komponenten gegenseitig aufheben. Die Gleichungen 6.3.7.2 und 6.3.7.3 geben die theoretischen Werte für die Auftriebskraft und für den dimensionslosen Auftriebsbeiwert an. Einen weiteren Zusammenhang zwischen der Auftriebskraft und der Druckverteilung auf der Profilkontur (siehe hierzu Abschnitt 6.3.6) erhält man durch:

$$A = \frac{\rho}{2} U_\infty^2 l \int_{x/l=0}^1 \left[ \left( \frac{\Delta p}{q_\infty} \right)_{Dr} + \left( \frac{\Delta p}{q_\infty} \right)_S \right] d \frac{x}{l}$$



Dabei ist:

$$\left(\frac{\Delta p}{q_\infty}\right)_{Dr} = \text{der auf den Staudruck bezogene Druckverlauf auf der Profildruckseite.}$$

$$\left(\frac{\Delta p}{q_\infty}\right)_S = \text{der auf den Staudruck bezogene Druckverlauf auf der Profilsaugseite.}$$

Der Druckverlauf auf der Profilkontur wurde mit Hilfe des Prandtl-Faktors auf die Geschwindigkeit des kompressiblen Gases korrigiert.

Setzt man für die Gleichungen 6.3.7.2 und 6.3.7.3 eine parabolische Skelettlinie mit einer Wölbungsrücklage von 50% voraus, so kann man mit den in Abschnitt 6.3.2 gefundenen Konstanten unter Beachtung der Gl.: 6.3.2.29 für die Auftriebskraft und den Auftriebsbeiwert eines Profils mit einem Anstellwinkel  $\alpha \geq 0^\circ$  gegenüber der Anströmgeschwindigkeit  $U_\infty$  schreiben:

$$A = \frac{\rho}{2} U_\infty^2 l 2\pi \left[ \tan \alpha + 2 \frac{f}{l} \right] \quad 6.3.7.4$$

$$c_a = 2\pi \left[ \tan \alpha + 2 \frac{f}{l} \right] \quad 6.3.7.5$$

Der Machzahleinfluss für diese Gleichungen ist bereits in den Wert  $f/l$  enthalten.

Der Auftriebsbeiwert besteht aus zwei Anteilen. Setzt man  $f/l = 0$ , hat man den Fall einer unter den Winkel  $\alpha$  gegenüber der Strömungsgeschwindigkeit  $U_\infty$  angestellten ebenen Platte. Setzt man den Winkel  $\alpha = 0$ , ergibt sich der Fall der aerodynamisch stoßfreien Anströmung eines gewölbten Profils.

Mit der Widerstandskraft  $W$  am Profil (siehe Abb.: 6.3.7.1) ist der Widerstandsbeiwert

$$c_w = \frac{W}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2 F} = \frac{W}{\frac{\rho}{2} U_\infty^2 l} \quad 6.3.7.6$$

definiert. Dabei ist  $F$  die vom Profil durch die Profiltiefe  $l$  und von der Breitereinheit  $b=1$  gebildete Fläche. Die am Profil angreifende resultierende Kraft ist:

$$R^2 = A^2 + W^2 \quad 6.3.7.7$$

Das Verhältnis der Widerstandskraft zur Auftriebskraft

$$\tan \varepsilon = \frac{W}{A} = \frac{c_w}{c_a} \quad 6.3.7.8$$

wird als Tangens des Gleitwinkels  $\varepsilon$  bezeichnet.

Bei einer Anströmungsgeschwindigkeit  $U_\infty$  unter einen Winkel  $\beta_\infty$  (siehe Abb.: 6.3.7.1), wie sie in Strömungsmaschinen auftritt, ist noch die Tangentialkraft und die Schubkraft von Interesse. Hier gelten folgende Zusammenhänge:

$$A = \frac{S}{\cos \beta_\infty} + W \tan \beta_\infty \quad 6.3.7.9$$

$$T = S \tan \beta_\infty + \frac{W}{\cos \beta_\infty} \quad 6.3.7.10$$

Aus den Gleichungen 6.3.7.9 und 6.3.7.10 folgt für die Schubkraft:

$$S = A \cos \beta_\infty - W \sin \beta_\infty \quad 6.3.7.11$$

und für die Tangentialkraft:

$$T = A \sin \beta_\infty + W \cos \beta_\infty \quad 6.3.7.12$$

Auf ein einzelnes Profil von der Breitenerstreckung  $dr$  wirkt ein Drehmoment

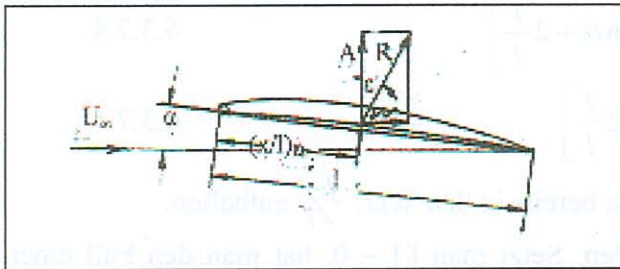
$$T dr r \omega = T dr u$$

und bewirkt eine Schubleistung

$$S dr c_m$$

Die Tangentialkräfte und die Schubkräfte beim Leitgitter werden von Stator eines Verdichters aufgenommen. Beim Laufgitter bewirkt die Schubkraft am Profil einen Axialschub des Rotors der von der Lagerung des Rotors im Stator aufgenommen werden muss. Die Tangentialkräfte an den Profilen bestimmen die Antriebsmomente der Laufgitter.

Von Interesse ist weiterhin noch die Lage des Druckpunktes am Profil, d.h. der Wert  $\left(\frac{x}{l}\right)_{Dr}$  bei dem die Auftriebskraft  $A$  am Profil angreift. Eine schematische Darstellung dazu zeigt die Abb.: 6.3.7.2.



Für das durch die Auftriebskraft auf die Profilverdickung bezogene Moment gilt:

$$M = \rho U_\infty l^2 \int_{\frac{x}{l}=0}^1 \frac{x}{l} \gamma \left(\frac{x}{l}\right) d\frac{x}{l} \quad 6.3.7.13$$

Mit  $\frac{x}{l} = \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi)$

Abb.: 6.3.7.2 Die Druckpunktlage am Profil.

$$d\left(\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi$$

und der Glauert'schen Gleichung (Gl.: 6.3.2.11) für die Zirkulationsverteilung folgt:

$$M = \frac{\rho}{4} U_\infty^2 l^2 \int_0^\pi (\sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi) \left[ A_0 \cot an\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^n A_n \sin(n\varphi) \right] d\varphi \quad 6.3.7.14$$

Bei der Ausmultiplizierung der einzelnen Faktoren unter dem Integral und deren Aufspaltung in Einzelintegrale ergaben sich Ausdrücke die nach den trigonometrischen Additionstheoremen umgeformt werden können. Diese Ausdrücke und deren Umformungen sind:

$$\cot an\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi = 1 + \cos \varphi \quad \cot an\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi \cos \varphi = \cos \varphi + \cos^2 \varphi$$

$$\sin(2\varphi) = 2 \sin \varphi \cos \varphi \quad \sin(2\varphi) \sin \varphi = 2 \sin^2 \varphi \cos \varphi$$

$$\sin(2\varphi) \cos \varphi = 2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \quad \sin(3\varphi) \sin \varphi = 3 \sin^2 \varphi - 4 \sin^4 \varphi$$

$$\sin(3\varphi) \sin \varphi \cos \varphi = 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi - 4 \sin^4 \varphi \cos \varphi$$

Diese Ausdrücke in die Gleichung 6.3.7.14 eingesetzt und gleiche Integralausdrücke zusammengefasst ergibt für das Moment:

$$M = \frac{\rho}{4} U_\infty^2 l^2 \left\{ A_0 \int_0^\pi (1 + \cos \varphi) d\varphi - A_0 \int_0^\pi \cos \varphi d\varphi - A_0 \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi \right\} +$$

$$\frac{\rho}{4} U_\infty^2 l^2 \left\{ [A_1 + 3A_3] \int_0^\pi \sin^2 \varphi d\varphi - [A_1 - 2A_2 + A_3] \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi \right\} -$$

$$\frac{\rho}{4} U_\infty^2 l^2 \left\{ 2A_2 \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi - 4A_3 \int_0^\pi \sin^4 \varphi d\varphi + 4A_4 \int_0^\pi \sin^4 \varphi \cos \varphi d\varphi \right\}$$

Die Lösungen der einzelnen Integrale sind:

$$\int_0^{\pi} (1 + \cos \varphi) d\varphi = (\varphi - \sin \varphi) \Big|_0^{\pi} = \pi$$

$$\int_0^{\pi} \cos \varphi d\varphi = \sin \varphi \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \left[ \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \left[ \frac{\varphi}{8} - \frac{\sin(4\varphi)}{32} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^4 \varphi d\varphi = \left[ \frac{3}{8} \varphi - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) + \frac{1}{32} \sin(4\varphi) \right]_0^{\pi} = \frac{3}{8} \pi$$

$$\int_0^{\pi} \sin^4 \varphi \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{5} \sin^5 \varphi \Big|_0^{\pi} = 0$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Momentengleichung ein, erhält man für das von der Auftriebskraft auf die Profilvorderkante ausgeübte Moment:

$$M = \frac{\rho}{4} U_{\infty}^2 l^2 \left[ A_0 \pi - A_0 \frac{\pi}{2} + A_1 \frac{\pi}{2} + A_3 \frac{3}{2} \pi - A_2 \frac{2}{8} \pi - A_3 4 \frac{3}{8} \pi \right]$$

bzw.:

$$M = \frac{\rho}{4} U_{\infty}^2 l^2 \pi \left[ \frac{A_0}{2} + \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{4} \right] \quad 6.3.7.15$$

Dies ist das Moment in der allgemeinen Form.

Für ein Profil mit einer parabolischen Skelettlinie und einer Wölbungsrücklage von 50% erhält man durch Einsetzen der in Abschnitt 6.3.2 gefundenen Konstanten:

$$M = \frac{\rho}{2} U_{\infty}^2 l^2 \frac{\pi}{2} \left[ \tan \alpha + 4 \frac{f}{l} \right] \quad 6.3.7.16$$

Ähnlich wie bei der Auftriebskraft bietet sich hier die Bildung eines Momentenbeiwertes an:

$$c_m = \frac{M}{\frac{\rho}{2} U_{\infty}^2 l^2} = \frac{\pi}{2} \left[ \tan \alpha + 4 \frac{f}{l} \right] \quad 6.3.7.17$$

Ist nun nach Abb.: 6.2.7.2  $x_{Dr}$  die Lage des Angriffspunktes der Auftriebskraft von der Profilvorderkante aus gerechnet, so gilt auch für das ausgeübte Moment:

$$M = A x_{Dr} \quad 6.3.7.18$$

Oder mit den Gleichungen 6.3.7.2 und 6.3.7.15:

$$\frac{\rho}{4} U_{\infty}^2 l^2 \pi \left[ \frac{A_0}{2} + \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{4} \right] = \frac{\rho}{2} U_{\infty}^2 l^2 \pi \left[ A_0 + \frac{A_1}{2} + \frac{3}{4} A_3 \right] \left( \frac{x}{l} \right)_{Dr}$$

Daraus erhält man die Druckpunktlage der Auftriebskraft am Profil in der allgemeinen Form zu:

$$\left(\frac{x}{l}\right)_{Dr} = \frac{\frac{A_0}{2} + \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{4} + \frac{9}{8}A_3}{2\left[A_0 + \frac{A_1}{2} + \frac{3}{4}A_3\right]} \quad 6.3.7.19$$

oder bei einer parabolischen Skelettlinie der Profile mit einer Wölbungsrücklage von 50%:

$$\left(\frac{x}{l}\right)_{Dr} = \frac{\tan \alpha + 4 \frac{f}{l}}{4\left[\tan \alpha + 2 \frac{f}{l}\right]} \quad 6.3.7.20$$

Am konkreten Beispiel der Gleichung 6.3.7.20 lassen sich einige Schlussfolgerungen ziehen:

- Für  $\frac{f}{l} = 0$  wird  $\left(\frac{x}{l}\right)_{Dr} = \frac{1}{4}$   
Das ist die Druckpunktlage einer ungewölbten Skelettlinie oder der angeströmten ebenen Platte mit den Anstellwinkel  $\alpha$ .

- Für  $\alpha = 0$  wird  $\left(\frac{x}{l}\right)_{Dr} = \frac{1}{2}$   
Dieser Wert gilt für Profile mit einer parabolischen Skelettlinie und 50 prozentiger Wölbungsrücklage bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung der Profile.

Mit der Gleichung 6.3.7.19 kann man für Profile mit beliebiger Skelettlinienform Diagramme aufstellen, die Aussagen über die Druckpunktlage an den Profilen in Abhängigkeit vom Profilanstellwinkel  $\alpha$  und der relativen Profilwölbung ergeben.

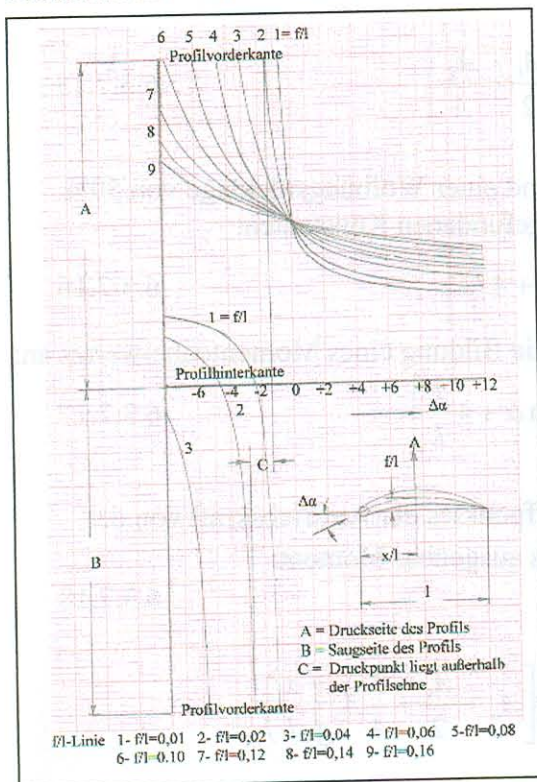


Abb.: 6.3.7.3 Änderung der Druckpunktlage am Profil mit parabolischer Skelettlinie und einer Wölbungsrücklage von 50%.

Als Beispiel wurde die Gleichung 6.3.7.20 für Profile mit parabolischer Skelettlinie und einer Wölbungsrücklage von 50% ausgewertet. Die Ergebnisse zeigt die Abb.: 6.3.7.3.

Grundsätzlich sind stabile Arbeitsweisen mit den Profilen nur möglich, solange die Lage des Druckmittelpunktes der Auftriebskraft in den Grenzen

$$0 \leq \left(\frac{x}{l}\right)_{Dr} \leq +1$$

liegt.

Ausgehend von der aerodynamisch stoßfreien Anströmung der Profile ( $\alpha = 0$ ) nähert sich die Druckpunktlage mit zunehmend positiven Anströmwinkel  $\alpha$  je nach Wölbung der Skelettlinie mehr oder weniger dem Wert für die angestellte ebene Platte. In diesem Bereich sind in dieser Hinsicht immer stabile Arbeitszustände der Profile zu erwarten. Beim Übergang von der aerodynamisch stoßfreien Anströmung der Profile ( $\alpha = 0$ ) zu negativen Anstellwinkeln laufen die Druckpunktlagen über die Hinterkante.

des Profils weg und die Auftriebskraft erhält einen negativen Wert. Der negative Anstellwinkel, bei dem dieser Fakt auftritt hängt stark von der maximalen Wölbung der Skelettlinie ab. Der negative Profilanstellwinkel bei dem die Profile stabil arbeiten wird um so größer, je größer die maximale Skelettlinienwölbung wird.

Ein instabiles Arbeiten der Profile kann erwartet werden, wenn der Druckpunkt über die Profilverkante oder über die Profilhinterkante hinausläuft.

Für die Stabilitätsgrenze der Profilverkante gilt:

$$\left(\frac{x}{l}\right)_{Dr} = 0 = \frac{\frac{A_0}{2} + \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{4} + \frac{9}{8}A_3}{2\left[A_0 + \frac{A_1}{8} + \frac{3}{4}A_3\right]} \quad 6.3.7.21$$

oder bei einer parabolischen Skelettlinie mit einer Wölbungsrücklage von 50% der Profiltiefe

$$\left(\frac{x}{l}\right)_{Dr} = 0 = \frac{\tan \alpha + 4\frac{f}{l}}{4\left[\tan \alpha + 2\frac{f}{l}\right]} \quad 6.3.7.22$$

Daraus erhält man:

$$\tan \alpha = -4\frac{f}{l}$$

bzw.

$$\alpha_{St} = \arctan\left(-4\frac{f}{l}\right) \quad 6.3.7.23$$

Für die Stabilitätsgrenze der Profilhinterkante gilt:

$$\left(\frac{x}{l}\right)_{Dr} = 1 = \frac{\frac{A_0}{2} + \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{4} + \frac{9}{8}A_3}{2\left[A_0 + \frac{A_1}{8} + \frac{3}{4}A_3\right]} \quad 6.3.7.24$$

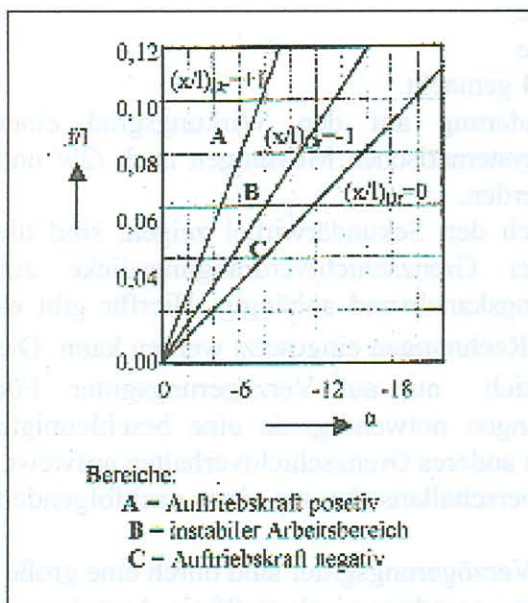


Abb.: 6.3.7.4 Der Instabilitätsbereich von Profilen mit parabolischer Skelettlinie und 50% Wölbungsrücklage.

oder mit einer parabolischen Skelettlinie mit 50% Wölbungsrücklage:

$$\left(\frac{x}{l}\right)_{Dr} = 1 = \frac{\tan \alpha + 4\frac{f}{l}}{4\left[\tan \alpha + 2\frac{f}{l}\right]} \quad 6.3.7.25$$

Daraus ergibt sich:

$$\alpha_{St} = \arctan\left(-\frac{4}{3}\frac{f}{l}\right) \quad 6.3.7.26$$

Eine weitere Stabilitätsgrenze ergibt sich für den Fall, wenn der Druckmittelpunkt auf der Druckseite des Profils über die Hinterkante hinausgelaufen ist und auf der Saugseite wieder über die Hinterkante eintritt.

Dann gilt die Bedingung:

$$\left(\frac{x}{l}\right)_{Dr} = -1 = \frac{\frac{A_0}{2} + \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{4} + \frac{9}{8}A_3}{2\left[A_0 + \frac{A_1}{2} + \frac{3}{4}A_3\right]} \quad 6.3.7.27$$

oder für das Profil mit parabolischer Skelettlinie und einer Wölbungsrücklage von 50%:

$$\left(\frac{x}{l}\right)_{Dr} = -1 = \frac{\tan \alpha + 4 \frac{f}{l}}{4\left[\tan \alpha + 2 \frac{f}{l}\right]} \quad 6.3.7.28$$

Daraus ergibt sich der kritische Anstellwinkel:

$$\alpha_{St} = \arctan\left(-\frac{12}{5} \frac{f}{l}\right) \quad 6.3.7.29$$

Ermittelt man aus den Gleichungen 6.3.7.24 und 6.3.7.22 für eine bestimmte Profilwölbung jeweils die zugehörigen Profilanstellwinkel, so ergibt deren Differenz den Anstellwinkelbereich, in dem die Druckpunktage außerhalb der Profiltiefe liegt.

Als Beispiel wurden die Gleichungen 6.3.7.23; 6.3.7.26 und 6.3.7.29 für Profile mit parabolischer Skelettlinie und einer Wölbungsrücklage von 50% ausgewertet. Die Ergebnisse sind auf der Abbildung 6.3.7.4 dargestellt.

#### 6.4 Die Verluste im ebenen Profilvergitter.

In Axialverdichtern werden Beschleunigungsgitter als Vorleitgitter und Verzögerungsgitter als Lauf- und Leitgitter verwendet (siehe Abb.: 1.1).

Grundsätzliche Aussagen über

- die Profilverluste
- die Randverluste
- die Spaltverluste

in Verzögerungsgittern wurden bereits in Abschnitt 4 gemacht.

Die Aussagen zum Spaltverlust über die Änderung auf den Wirkungsgrad einer Verdichterstufe beruhen auf eine Auswertung der systematischen Messungen nach /29/ und können auf eine Axialverdichterstufe angewendet werden.

Wie die Ausführungen über die Randverluste durch den Sekundärwirbel zeigen, sind die auftretenden Verluste von dem Verhältnis der Grenzschichtverdrängungsdicke zur Schaufelhöhe an der inneren und äußeren Strömungskanalwand abhängig. Hierfür gibt es nach /21/ einen Grenzwert von  $\delta_1^* / l = 0,04$  der für Rechnungen eingesetzt werden kann. Die Ausführungen über die Randverluste beziehen sich nur auf Verzögerungsgitter. Für Beschleunigungsgitter sind gesonderte Untersuchungen notwendig, da eine beschleunigte Strömung gegenüber einer verzögerten Strömung ein anderes Grenzschichtverhalten aufweist. Dies gilt insbesondere auch für Vorleitgitter bei Überschallanströmung eines nachfolgenden Laufgitters.

Die in Abschnitt 4.1 angegebenen Profilverluste für Verzögerungsgitter sind durch eine große Anzahl von Messwerten fundiert und gelten für eine aerodynamisch stoßfreie Anströmung der Profile. Einflüsse durch die Anströmmachzahl, der Reynolds-Zahl, die Oberflächenrauigkeit und die Abweichungen von der aerodynamisch stoßfreien Anströmung der Profile sind in den in Abschnitt 4.1 angegebenen Zusammenhängen nicht enthalten.

### 6.4.1 Die Einflüsse auf die Profilverluste beim Verzögerungsgitter.

Der in Abschnitt 4.1 angegebene Profilverlust

$$c_{wp} = 0,01326 + \left[ 0,086 \frac{c_r}{t/l} - 0,0127 \right]^2 + \left[ 0,125 \frac{t}{l} - 0,116 \right]^2$$

hat für den inkompressiblen Strömungszustand bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung der Profile Gültigkeit. Versuche an Profiligittern zeigten, dass sich die Profilverluste bei Aerodynamisch stoßfreier Anströmung der Profile bis in die Nähe der kritischen Machzahl

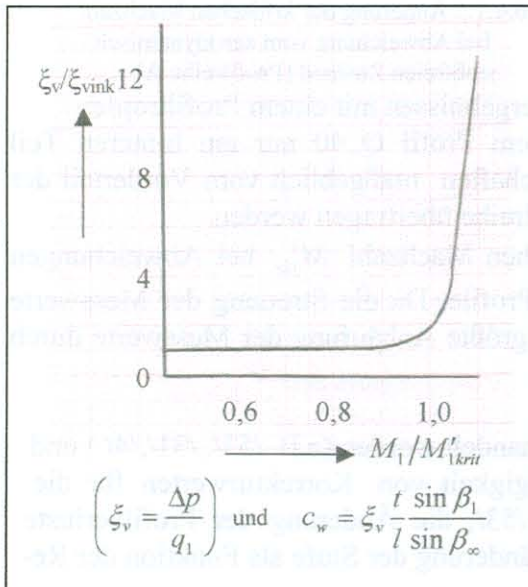


Abb.:6.4.1.1 Verlustbeiwerte als Funktion der Anströmmachzahl.

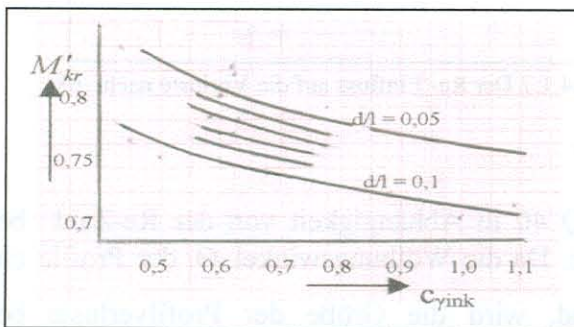
nicht verändern. Wenn an keiner Stelle der Profiloberfläche Schallgeschwindigkeit Erreicht wird, können die Werte der oben Angegebenen Gleichung auch für die kompressible Strömung verwendet werden. Die Abb.: 6.4.1.1 zeigt die Abhängigkeit der Profilverluste von der Anströmmachzahl. Die Kurve gibt die Mittelwerte von Messergebnissen wieder.

In Abweichung von der sonst üblichen kritischen Machzahl  $M_{1kr}$ , bei der auf der Profiloberfläche Schallgeschwindigkeit erreicht wird, definierte Wolf /66/ eine kritische Machzahl  $M'_{1kr}$ , bei der das örtliche Überschallgebiet an den Profilen durch einen Verdichtungsstoß geschlossen wird und die Grenzschichtablösung an der Profiloberfläche eintritt. Die Machzahl  $M'_{1kr}$  zeigt bei aerodynamisch günstiger Umströmung

$$\left( \xi_v = \frac{\Delta p}{q_1} \right) \text{ und } \left( c_w = \xi_v \frac{t \sin \beta_1}{l \sin \beta_\infty} \right)$$

der Profile nach Messergebnissen eine

Abhängigkeit vom Zirkulationsbeiwert, dem Profildickenverhältnis und von der Dicken- und Wölbungsrücklage. Die Zusammenhänge sind auf den Abbildungen 6.4.1.2 bis 6.4.1.4 dargestellt.



6.4.1.2 Die kritische Machzahl als Funktion des Zirkulationsbeiwertes und der Profildicke für Profile mit parabolischer Skelettlinie Für Profile mit parabolischer Skelettlinie  $x_d/l = 0,45$  und der Dickenrücklage  $x_d/l = 0,4$ .

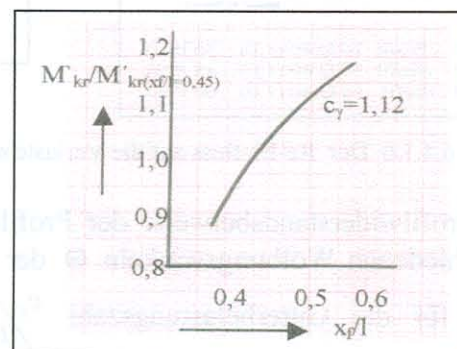


Abb.: 6.4.1.3 Änderung der kritischen Machzahl mit der Wölbungsrücklage.

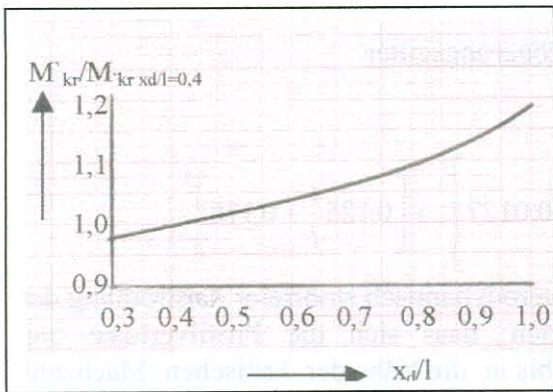


Abb.: 6.4.1.4 Änderung der kritischen Machzahl bei mit der Dickenrücklage

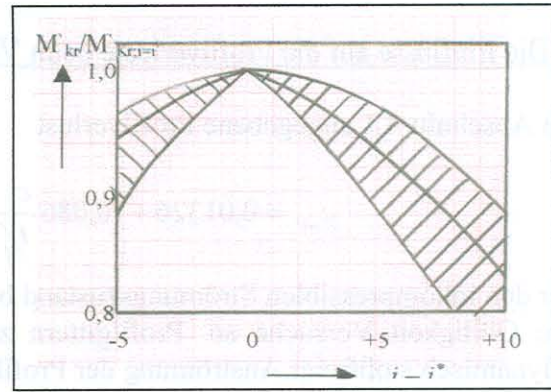


Abb.:6.4.1.5 Änderung der kritischen Machzahl bei Abweichung vom aerodynamisch stoßfreien Zustand (Profilleihe A)

Die Abb.: 6.4.1.2 wurde auf der Grundlage von Messergebnissen mit einem Profiltropfen A 10 aufgestellt. Dieser Tropfen hat gegenüber dem Profil Q 40 nur am hinteren Teil Abweichungen. Da die Hochgeschwindigkeitseigenschaften maßgeblich vom Vorderteil der Profile abhängig sind, können die Werte auf die Profilleihe übertragen werden.

Die Abb.: 6.4.1.5 zeigt die Veränderung der kritischen Machzahl  $M'_{kr}$  bei Abweichungen von der aerodynamisch stoßfreien Anströmung der Profile. Da die Streuung der Messwerte bei den einzelnen Gittern recht groß war, wurde die größte Anhäufung der Messwerte durch den mittleren Kurvenzug markiert.

Der Einfluss der Reynoldszahl ist schon mehrfach behandelt worden (z.B. /53/, /31/, /4/ ) und /60/). Man findet Darstellungen wie die Abhängigkeit von Korrekturwerten für die Umlenkung der Strömung im Gitter von der Re-Zahl /53/, die Änderung der Profilverluste von der Re-Zahl /31/ und /4/ und die Wirkungsgradänderung der Stufe als Funktion der Re-Zahl. Die Abb.: 6.4.1.6 zeigt z.B. die Abhängigkeit

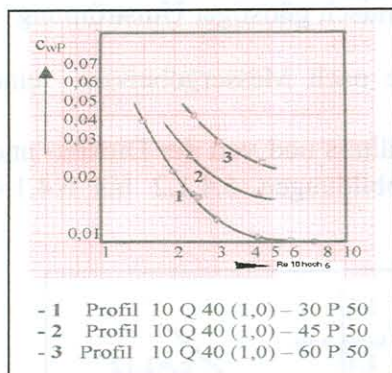


Abb.: 6.4.1.6 Der Re-Einfluss auf die Verluste nach /67/

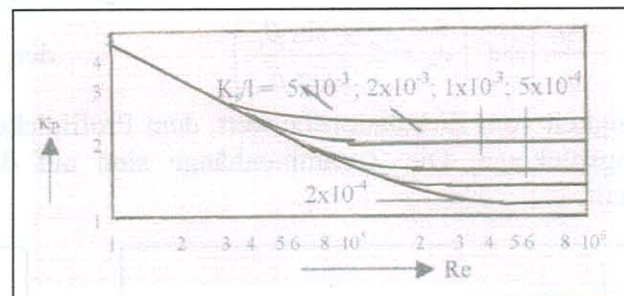


Abb.:6.4.1.7 Der Re- Einfluss auf die Verluste nach /68/

der Profilwiderstandsbeiwerte der Profilleihe Q 40 in Abhängigkeit von der Re-Zahl bei verschiedenen Wölbungswinkeln  $\Theta$  der Profile. Da die Wölbungswinkel  $\Theta$  der Profile ein Maß für die Gitterbelastungszahl  $c_r / t/l$  sind, wird die Größe der Profilverluste bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung der Profile und überkritischer Re-Zahl bereits durch die Gleichung 4.1.2 erfasst. Die Abb.: 6.4.1.7 zeigt den Korrekturwert für die Verluste in Abhängigkeit von der Re-Zahl mit der relativen Oberflächenrauigkeit der als Parameter nach /68/. Dieser Wert, der nur mit den Wert der Gl.: 4.1.2 multipliziert werden braucht, hat sich in der Praxis gut eingeführt.



### 6.4.2 Das Verhalten der Profilhinter bei Abweichungen von der aerodynamisch stoßfreien Anströmung.

Theoretische Ansätze zur Ermittlung der Strömungszustände für Profilhinter bei Betriebszuständen die vom Auslegungspunkt abweichen wurden bereits in /59/ und /69/ angegeben. Allerdings sind diese Methoden für den in der Praxis tätigen Ingenieur zu aufwendig. Die Berechnung des Profilhinterstandes an einzelnen Profilen bereitet schon erhebliche Schwierigkeiten. Wesentlich schwieriger werden die Verhältnisse bei Gitterprofilen. Aus diesem Grunde ist man in der Praxis auf die Ergebnisse von Untersuchungen an Gitterprofilen angewiesen. Die aus der Literatur bekannten Unterlagen über die Veränderung der Umlenkung des Strömungsmediums  $\Delta\beta$  und der Verlustbeiwerte bei veränderten Anströmrichtungen der Gitterprofile ist recht spärlich. In der Praxis hat sich die Darstellung von Howell /70/ mit  $c_w = f(\Delta i / \Delta\beta_0)$  und  $(\Delta\beta / \Delta\beta_0) = f(\Delta i / \Delta\beta_0)$  bewährt. Dabei ist  $\Delta\beta$  die Umlenkung des strömenden Gases bei einem beliebigen Zuströmwinkel,  $\Delta\beta_0$  die Umlenkung des Gases beim Auslegungszustand des Gitters und  $\Delta i = i - i_0$  die Änderung des Anströmwinkels gemessen vom Auslegungszustand. Die folgenden Ergebnisse wurden durch Vermessungen von Gitterprofilen der Profilhinterreihe Q 40 und Q 50 im Windkanal des VEB Entwicklungsbau Pirna gewonnen und die Ergebnisse durch Wolf /66/ in die vorliegende Form verarbeitet.

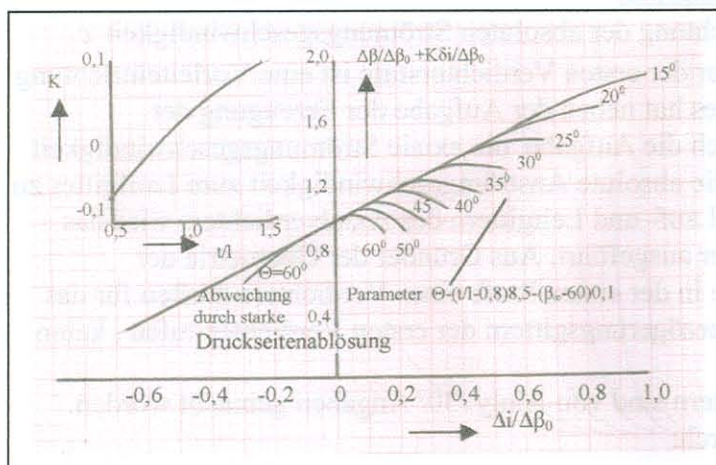


Abb.:6.4.2.1 Das Regelverhalten von Gittern mit der Profilhinterreihe 10 Q 40 – P50- (Unveröffentlichte Betriebsunterlagen des Veb Entwicklungsbau Pirna nach Wolf.)

$$\Theta = \left( \frac{t}{l} - 0,8 \right) 8,5 - (\beta_T - 60) 0,1$$

gefunden. Der geradlinige Verlauf der Kurven

$$\frac{\Delta\beta}{\Delta\beta_0} = f\left(\frac{\Delta i}{\Delta\beta_0}\right)$$

ist praktisch von der Profilhinterwölbung unabhängig. Die zulässigen Stoßwinkeländerungen bei gesunder Umströmung der Gitterprofile ist dagegen stark vom Wölbungswinkel der Profilskelettlinie abhängig. Einen entsprechenden Verlauf zeigen auch die Verlustkurven Der Abb.: 6.4.2.2.

Die Abbildungen 6.4.2.1 und 6.4.2.2 zeigen die auf Grund von Messergebnissen an der Profilhinterreihe Q 40 von Wolf /66/ ermittelten Darstellungen über die Umlenkungseigenschaften und Veränderungen der Profilhinterverluste in Abhängigkeit der Stoßwinkeländerung. Bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung der Profile ist die Stoßwinkeländerung Null. Als Maß für die Profilhinterwölbung wurde der Parameter

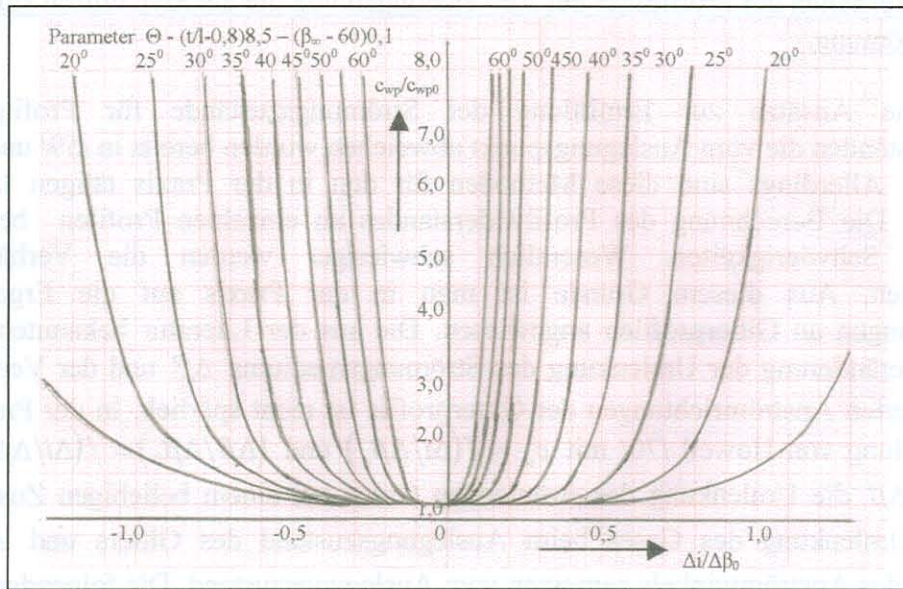


Abb.: 6.4.2.2 Verlustkurven für Gitter mit Profilen der 10 Q 40 – P 50 Reihe.

#### 4.3 Verluste und Grenzen im Vorleitgitter.

Zur Erzeugung der erforderlichen Richtung der absoluten Strömungsgeschwindigkeit  $c_1$  (siehe z.B. Abb.: 5.1.1) zum Laufgitter der ersten Verdichterstufe ist eine Vorleiteinrichtung b.z.w. Vorleitgitter erforderlich. Dieses hat neben der Aufgabe der Erzeugung der erforderlichen Strömungsrichtung noch die Aufgabe, die axiale Strömungsgeschwindigkeit des Gases am Verdichtereinlauf auf die absolute Anströmgeschwindigkeit zum Laufgitter zu beschleunigen. Im Gegensatz zu den Lauf- und Leitgittern des Axialverdichters wird das Vorleitgitter als Beschleunigungsgitter ausgeführt. Aus Gründen der Geometrie der Geschwindigkeitsvektordiagramme in der ersten Stufe eines Verdichters dürften für das Vorleitgitter, im Gegensatz zu den Verzögerungsgittern der ersten Verdichterstufen, kaum Machzahlschwierigkeiten auftreten.

Über Verluste in Beschleunigungsgittern sind von Ainly /30/ Angaben gemacht worden. Die Verlustbeiwerte sind definiert durch:

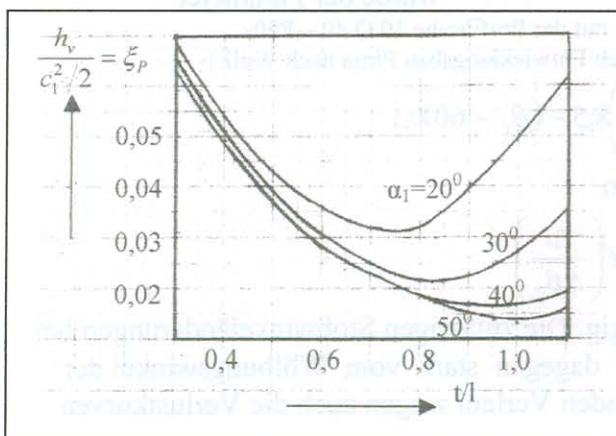


Abb.: 6.4.3.1 Profilverluste für Beschleunigungsgitter  
Mit axialer Zuströmung des Gases .

$$\xi_p = \frac{h_v}{\frac{c_1^2}{2}} = \frac{\Delta p^*}{\frac{\rho^*}{2} c_1^2} \quad 6.4.3.1$$

Dabei ist  $\Delta p^*$  der Gesamtdruckverlust im Beschleunigungsgitter und  $c_1$  die Abströmgeschwindigkeit des Gases aus dem Profilvergitter. Die Abb.: 6.4.3.1 zeigt die Verlustbeiwerte vom Teilungsverhältnis des Profilvergitters mit dem Winkel  $\alpha_1$  als Parameter für eine axiale Zuströmung des Gases ( $\alpha_0 = 90^\circ$ ) und einem Stoßwinkel  $i = 0^\circ$ .

Rechnet man die Profilverlustbeiwerte entsprechend dem Vorbild des Abschnittes 3.6 in den Widerstandsbeiwert bezogen auf den Abströmwinkel um, erhält man:

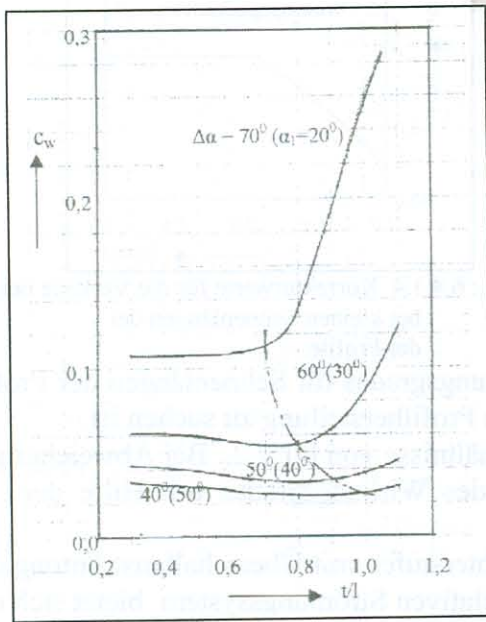


Abb.: 6.4.3.2 Profilwiderstandsbeiwerte für

Beschleunigungsgitter mit axialer

Zuströmung ( $\alpha_0 = 90^\circ$ )

$$c_w = \xi_P \frac{t \sin \alpha_\infty}{l \sin^2 \alpha_1} \quad 6.4.3.2$$

oder mit

$$\sin \alpha_\infty = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \cot^2 \alpha_1}}$$

und

$$\sin^2 \alpha_1 = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha_1}$$

$$c_w = \xi_P \frac{t}{l} \frac{1 + \cot \alpha_1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha_1}} \quad 6.4.3.3$$

Die Abb.: 6.4.3.2 zeigt diese Werte. Diese Darstellung gibt einen besseren Anhalt über die zweckmäßige Wahl des Teilungsverhältnisses des Beschleunigungsgitters. Aus Gründen eines guten Wirkungsgrades der analog zu Abschnitt 3.4 zu

$$\eta_{VL} = 1 - \frac{1}{\psi_{thVL}} \frac{c_{wVL}}{t/l} \frac{\varphi_{\infty VL}^2}{\sin^3 \alpha_{\infty VL}} \quad 6.4.3.4$$

definiert ist, wird man die oberhalb der strichpunktierten Linie liegenden Werte der Abb.: 6.4.3.2 vermeiden. Für den Beiwert der Verluste durch die Grenzschichten an der Nabe und dem Gehäuse wird die Beziehung

$$\xi_0 = 0,02 \frac{l}{h} \quad 6.4.3.5$$

und für den Sekundärverlustbeiwert

$$\xi_S = 0,04 \left( 1 - \frac{1}{90 - \alpha_1} \right) c_{\Gamma(c_1)}^2 \quad 6.4.3.6$$

angegeben. Der Zirkulationsbeiwert  $c_{\Gamma(c_1)}$  bezieht sich dabei auf die Austrittsgeschwindigkeit  $c_1$  des Gases am Gitteraustritt. Analog zu den Ausführungen des Abschnittes 3.5 kann man dafür setzen:

$$c_{\Gamma(c_1)} = c_{\Gamma VL} \frac{1 + \cot \alpha_1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \cot^2 \alpha_1}} = \frac{2 \Delta c_{uVL}}{c_{\infty VL}} \frac{1 + \cot \alpha_1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \cot^2 \alpha_1}} \quad 6.4.3.7$$

Der gesamte Verlust des Vorleitgitters ist somit:

$$\xi_{VL} = \xi_P + \xi_0 + \xi_S \quad 6.4.3.8$$

Die Angaben sind auf eine Re-Zahl von etwa  $2 \text{ mal } 10^5$  bezogen. Eine Umrechnung auf andere Re-Zahlen kann mit den Werten der Abb.: 6.4.3.3 erfolgen wobei die Re-Zahl mit der Sehnenlänge der Profile und der Abströmgeschwindigkeit gebildet wird.

$$\text{Re} = \frac{l c_1}{\nu} \quad 6.4.3.9$$

Die kinematische Zähigkeit des Gases kann den einschlägigen Tabellenwerten entnommen werden.

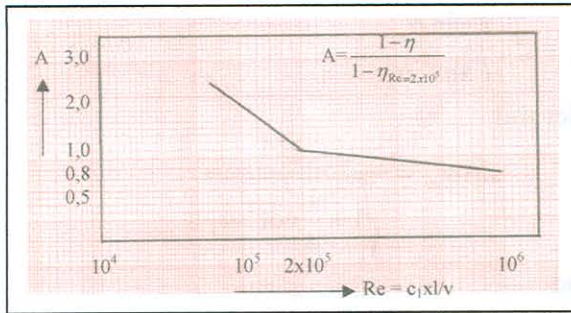


Abb.: 6.4.3.3 Korrekturwerte für die Verluste bei Der Reynoldszahl.

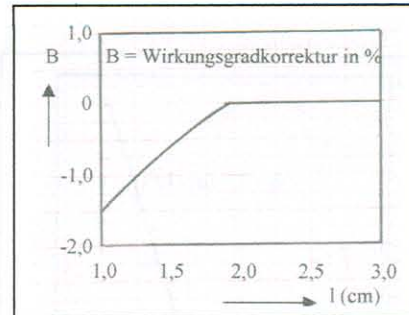


Abb.: 6.4.1.4 Korrekturwerte für die Verluste bei kleinen Sehnenlängen der Profile.

Die Abb.: 6.4.3.3 gibt noch eine Korrektur des Wirkungsgrades für Sehnenlängen der Profile unter 2 cm an deren Ursache in der relativ ungenauen Profilverstellung zu suchen ist.

Die Gleichung 6.4.3.6 bezieht sich auf ein Seitenverhältnisse von  $h/l = 2$ . Bei Abweichungen von diesem Seitenverhältnis kann eine Korrektur des Wirkungsgrades mit Hilfe der Abb.: 6.4.3.5 vorgenommen werden.

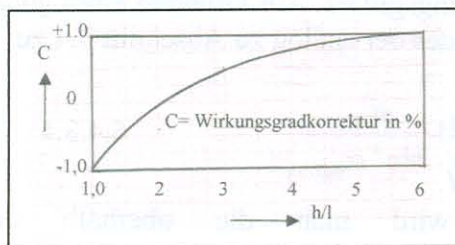


Abb.: 6.4.3.5 Korrekturwerte der Verluste abhängig vom Schaufelhöhenverhältnis.

Für Axialverdichterstufen mit Überschallanströmung des Laufgitters im relativen Strömungssystem bietet sich das Vorleitgitter zur Erhöhung der Anströmmachzahl des Laufgitters zur Erhöhung der Anströmmachzahl  $M_{w1}$  des Laufgitters an (siehe auch Abb.: 5.6.4.3).

Der Grenzfall zur Erhöhung der Anströmmachzahl  $M_{w1}$  im relativen Strömungssystem des Laufgitters ergibt sich, wenn sich im absoluten Strömungssystem am

Vorleitgitteraustritt die Schallgeschwindigkeit bzw. die Machzahl  $M_{c1}$  auftritt.

Für den Abströmwinkel (siehe hierzu auch Abb.: 5.6.4.2) gilt:

$$\sin \alpha_1 = \frac{c_0}{c_1} \quad 6.4.3.10$$

Für den Massendurchsatz des Gases in der Strömungsebene 0 gilt:

$$\dot{m}_0 = t \rho_0 c_0 \quad 6.4.3.11$$

oder mit den gasdynamischen Zusammenhängen zwischen des Gesamt- und statischen Zustandswerten des Gases:

$$\dot{m}_0 = t \rho_0^* \frac{M_0 \sqrt{\kappa R} \sqrt{T_1^*}}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2\right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}} \quad 6.4.3.12$$

Analog dazu gilt für die Strömungsebene I am Vorleitgitteraustritt:

$$\dot{m}_1 = t \rho_1 \sin \alpha_1 c_1 \quad 6.4.3.13$$

oder

$$\dot{m}_1 = t \rho_1^* \sin \alpha_1 \frac{M_{c1} \sqrt{\kappa R} \sqrt{T_1^*}}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{c1}^2\right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}} \quad 6.4.3.14$$

Unter der Voraussetzung, dass die Austrittsgeschwindigkeit  $c_1$  der Machzahl  $M_{c_1} = 1$  entspricht und die Gasmassen  $\dot{m}_0 = \dot{m}_1$  sein müssen, ergibt sich unter Beachtung von

$$\rho^* = \frac{p^*}{RT^*}$$

$$\frac{\frac{p_0^*}{RT_0^*} M_0 \sqrt{T_0^*}}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2\right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}} = \frac{\sin \alpha_1 \frac{p_1^*}{RT_1^*} \sqrt{T_1^*}}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2}\right)^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}}$$

oder

$$\sin \alpha_1 = \frac{p_0^* T_1^*}{p_1^* T_0^*} \sqrt{\frac{T_0^*}{T_1^*}} M_0 \left[ \frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2}}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2} \right]^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}} \quad 6.4.3.15$$

Dabei ist:

$$p_0^* - p_1^* = \Delta p^* \quad \text{der Druckverlust}$$

$$T_1^* - T_0^* = \Delta T^* \quad \text{die Temperaturerhöhung}$$

des Gases durch die Verluste im Strömungskanal des Vorleitgitters.  
bei einer verlustlosen Strömung sind folgende Strömungswinkel zu erwarten:

$M_0$	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$\alpha_1(^{\circ})$	38,96	48,275	57,31	66,02	74,83

Der Verlustfaktor in der Gl.: 6.4.3.15 ist immer, wie leicht nachprüfbar ist,

$$K_V = \frac{p_0^* T_1^*}{p_1^* T_0^*} \sqrt{\frac{T_0^*}{T_1^*}} > 1$$

und der Winkel  $\alpha_1$  vergrößert sich um mehrere Grade bei verlustbehafteter Strömung durch das Leitgitter. Diese Winkelvergrößerung von  $\alpha_1$  ist dabei beträchtlich größer als die technologisch üblichen Fertigungstoleranzen von  $\Delta\alpha = \pm 20$  Min gegenüber dem Nominalwert. Für  $\alpha_1 = 90^{\circ}$  kann das Vorleitgitter entfallen.

### 6.5 Schwerpunkte, Flächen, Trägheitsmomente und Drillmomente der Profile.

Zum Nachweis der Festigkeitseigenschaften der Gitterbeschaukelung von Axialverdichtern werden die Schwerpunkte, die Trägheits- und Drillmomente sowie die Querschnittsflächen der Gitterprofile benötigt. Die Werte dafür hängen von der Dickenverteilung der Profile, der Dickenrücklage, der Wölbung und der Wölbungsrücklage bei der Skelettlinie sowie dem Nasenradius und der Hinterkantendicke ab.

Für den Schwerpunktsabstand des Profils von der Profilvorderkante aus in x-Richtung gesehen gilt:

$$\frac{x_S}{l} = \frac{\int_l^x dF_P}{F_P} \quad 6.5.1$$

Mit Hilfe der Beziehungen 6.3.2.10 und 6.3.2.35 wird:

$$\begin{aligned} \frac{x_S}{l} &= \frac{2 \int_0^l \frac{x}{l} \frac{y}{l} d \frac{x}{l}}{\frac{F_P}{l^2}} = \frac{2}{F_P} \left\{ \frac{1}{8} (2B_0 + B_1) \int_0^\pi \varphi (1 - \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi + \frac{B_0}{4} \int_0^\pi \sin^2 \varphi (1 - \cos \varphi) d\varphi \right\} \\ &+ \frac{2}{F_P} \left\{ -\frac{B_1}{8} \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cos \varphi (1 - \cos \varphi) d\varphi + \frac{B_2}{6} \int_0^\pi \sin^4 \varphi (1 - \cos \varphi) d\varphi \right\} \\ &+ \frac{2}{F_P} \left\{ \frac{B_3}{4} \int_0^\pi \sin^4 \varphi \cos \varphi (1 - \cos \varphi) d\varphi \right\} \end{aligned}$$

oder nach der Integration:

$$\begin{aligned} \frac{x_S}{l} &= \frac{2}{F_P} \left\{ \frac{1}{8} (2B_0 + B_1) \left[ \sin \varphi - \varphi \cos \varphi - \frac{\sin(2\varphi)}{8} + \frac{\varphi \cos(2\varphi)}{4} \right] \right\} \\ &+ \frac{2}{F_P} \left\{ \frac{B_0}{4} \left[ \frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right] - \frac{B_0}{4} \frac{\sin^3 \varphi}{3} - \frac{B_1}{8} \frac{\sin^3 \varphi}{3} + \frac{B_1}{8} \left[ \frac{\varphi}{8} - \frac{\sin(4\varphi)}{32} \right] \right\} \\ &+ \frac{2}{F_P} \left\{ \frac{B_2}{6} \left[ \frac{3}{8} \varphi - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) + \frac{1}{32} \sin(4\varphi) \right] - \frac{B_2}{6} \frac{\sin^5 \varphi}{5} + \frac{B_3}{4} \frac{\sin^5 \varphi}{5} \right\} \\ &- \frac{2}{F_P} \left\{ \frac{B_3}{4} \left[ \frac{\sin^3 \varphi \cos^3 \varphi}{6} + \frac{\varphi}{16} - \frac{\sin(4\varphi)}{64} \right] \right\} \end{aligned}$$

Setzt man die Integrationsgrenzen von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = \pi$  ein, so wird mit Gl.: 6.3.2.42:

$$\frac{x_S}{l} = \frac{2\pi}{32} \left\{ \frac{1}{8} B_3 + 3B_0 + \frac{9}{8} B_1 + \frac{B_2}{2} \right\} = \frac{\pi}{16} [6B_0 + 2B_1 + B_2]$$

oder

$$\frac{x_S}{l} = \frac{3B_0 + \frac{9}{8} B_1 + \frac{1}{2} B_2 - \frac{1}{8} B_3}{6B_0 + 2B_1 + B_2} \quad 6.5.2$$

Für die Schwerpunktlage der Profile in y-Richtung gilt:

$$\frac{y_S}{f} = \frac{2 \int \frac{y'_S}{f} \frac{y}{l} d \frac{x}{l}}{\frac{F_P}{l^2}} \quad 6.5.3$$

Mit der Gleichung 6.3.2.14 gilt für  $y_s/l$  der Skelettlinie an einem beliebigen Punkt der Längenkoordinate

$$\frac{y'_s}{f} = \frac{1}{\left(\frac{x_f}{l}\right)^2} \left[ 2 \frac{x_f}{l} \frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right]$$

oder, da eine Wölbungsrücklage von  $x/l = 0,5$  vorausgesetzt wurde,:

$$\frac{y'_s}{f} = 4 \left[ \frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] \quad 6.5.4$$

Mit

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi)$$

erhält man daraus

$$\frac{y'_s}{f} = 4 \left[ (1 - \cos \varphi) - \frac{1}{4}(1 - \cos \varphi)^2 \right]$$

oder nach einer einfachen Umformung:

$$\frac{y'_s}{f} = \sin^2 \varphi \quad 6.5.5$$

Mit Hilfe der Gleichungen 6.5.5 und 6.3.2.35 geht die Beziehung 6.5.5 für den Schwerpunkt des Profils in y-Richtung über in:

$$\begin{aligned} \frac{y_s}{f} = \frac{1}{F_p/l^2} & \left\{ \int_0^\pi \frac{1}{8} (2B_0 + B_1) \varphi \sin^3 \varphi d\varphi + \frac{B_0}{4} \int_0^\pi \sin^4 \varphi d\varphi - \frac{B_1}{8} \int_0^\pi \sin^4 \varphi \cos \varphi d\varphi \right\} \\ & + \frac{1}{F_p/l^2} \left\{ \frac{B_2}{2} \int_0^\pi \sin^6 \varphi d\varphi + \frac{B_3}{4} \int_0^\pi \sin^6 \varphi \cos \varphi d\varphi \right\} \end{aligned}$$

oder nach der Integration:

$$\begin{aligned} \frac{y_s}{f} = \frac{1}{F_p/l^2} & \left\{ \frac{1}{8} (2B_0 + B_1) \left[ \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{3}{4} \varphi \cos \varphi - \frac{1}{36} \sin(3\varphi) + \frac{\varphi \cos(3\varphi)}{12} \right]_0^\pi \right\} \\ & + \frac{1}{F_p/l^2} \left\{ \frac{B_0}{4} \left[ \frac{3}{8} \varphi - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) + \frac{1}{32} \sin(4\varphi) \right]_0^\pi \right\} \\ & + \frac{1}{F_p/l^2} \left\{ \frac{B_2}{6} \left[ -\frac{\sin^5 \varphi \cos \varphi}{6} + \frac{15}{48} \varphi - \frac{5}{24} \sin(2\varphi) + \frac{5}{192} \sin(4\varphi) \right]_0^\pi \right\} \end{aligned}$$

Setzt man die Integrationsgrenzen und die Gl.: 6.3.2.56 ein, so erhält man nach kurzer Umformung:

$$\frac{y_s}{f} = \frac{12,5B_0 + 4B_1 + \frac{15}{6}B_2}{3[6B_0 + 2B_1 + B_2]} \quad 6.5.6$$

Für das maximale Trägheitsmoment der Profile kann man schreiben:

$$\frac{I_{\max}}{l^4} = \int_0^1 \left(\frac{x}{l}\right)^2 \frac{y}{l} d\frac{x}{l} - \left(\frac{x_S}{l}\right)^2 \frac{F_P}{l^2} \quad 6.5.7$$

Mit

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{2}(1 - \cos \varphi) \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{x_S}{l}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi$$

und mit Gl.: 6.3.2.35

$$\frac{I_{\max}}{l^4} = \int_0^\pi \left\{ \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \right] \left[ \frac{1}{8} (2B_0 + B_1) \varphi + \frac{B_0}{4} \sin \varphi - \frac{B_1}{8} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{B_2}{6} \sin^3 \varphi \cos \varphi \right] \sin \varphi d\varphi \right\} - \left(\frac{x_S}{l}\right)^2 \frac{F_P}{l^2}$$

Nach der Integration erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{I_{\max}}{l^4} &= \frac{1}{2} \frac{F_P}{l^2} - \frac{1}{16} (2B_0 + B_1) \left[ \frac{\sin(2\varphi)}{8} - \frac{\varphi \cos(2\varphi)}{4} \right]_0^\pi - \frac{B_0}{8} \sin^3 \varphi \Big|_0^\pi + \frac{B_1}{16} \left[ \frac{\varphi}{8} - \frac{\sin(4\varphi)}{32} \right]_0^\pi - \frac{B_2}{12} \frac{\sin^5 \varphi}{5} \Big|_0^\pi \\ &- \frac{B_3}{8} \left[ \frac{\sin^3 \varphi \cos^3 \varphi}{6} + \frac{\varphi}{16} - \frac{\sin(4\varphi)}{64} \right]_0^\pi - \frac{2B_0 + B_1}{32} \left[ \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{3}{4} \varphi \cos \varphi - \frac{\sin(3\varphi)}{36} + \frac{\varphi \cos(3\varphi)}{12} \right]_0^\pi \\ &- \frac{B_0}{16} \left[ \frac{3}{8} \varphi - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) + \frac{1}{32} \sin(4\varphi) \right]_0^\pi + \frac{B_1}{32} \frac{\sin^5 \varphi}{5} \Big|_0^\pi \\ &- \frac{B_2}{24} \left[ \frac{15}{48} \varphi + \frac{5}{192} \sin(4\varphi) - \frac{5}{24} \sin(2\varphi) - \frac{\sin^5 \varphi \cos \varphi}{6} \right]_0^\pi - \frac{B_3}{16} \frac{\sin^7 \varphi}{7} \Big|_0^\pi \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Integrationsgrenzen und der Gl.: 6.3.2.56 ergibt sich nach einigen Umformungen:

$$\frac{I_{\max}}{l^4} = \frac{\pi}{384} [59B_0 + 25B_1 + 7B_2 - 3B_3] - \left(\frac{x_S}{l}\right)^2 \frac{F_P}{l^2} \quad 6.5.8$$

Für das minimale Trägheitsmoment der Profile kann man unter Benutzung der Gl.: 6.3.2.48 setzen:

$$I_{\min} = 2 \int y_d^2 dF + 2 \int y_f^2 dF - y_S^2 F_P \quad 6.5.9$$

oder:

$$\begin{aligned} \frac{I_{\min}}{l^4} &= \frac{2}{3} \int_{\frac{x}{l}=0}^1 \left(\frac{y'_d}{l}\right)^3 d\frac{x}{l} + 2 \left(\frac{f}{l}\right)^2 \int_0^1 \left(\frac{y_f}{l}\right)^2 \frac{y'_d}{l} d\frac{x}{l} - \left(\frac{f}{l}\right)^2 \frac{F_P}{l^2} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{d}{l}\right)^3 \int_0^1 \left(\frac{y'_d}{d}\right)^3 d\frac{x}{l} + 2 \left(\frac{f}{l}\right)^2 \frac{d}{l} \int_0^1 \left(\frac{y_f}{f}\right)^2 \frac{y'_d}{d} d\frac{x}{l} - \left(\frac{f}{l}\right)^2 \left(\frac{y_S}{f}\right)^2 \frac{F_P}{l^2} \\ &= \left(\frac{d}{l}\right)^3 \frac{2}{3} \sum \left(\frac{y'_d}{l}\right)^3 \Delta \frac{x}{l} + 2 \left(\frac{f}{l}\right)^2 \frac{d}{l} \sum \left(\frac{y_f}{f}\right)^2 \frac{y'_d}{d} \Delta \frac{x}{l} - \left(\frac{f}{l}\right)^2 \left(\frac{y_S}{f}\right)^2 \frac{F_P}{l^2} \end{aligned}$$

oder mit

$$\frac{F_P}{l^2} = C \frac{d}{l}$$



$$\frac{I_{\min}}{l^4} = \left(\frac{d}{l}\right)^3 \frac{2}{3} \sum \left(\frac{y'_d}{d}\right)^3 \Delta \frac{x}{l} + 2 \left(\frac{f}{l}\right)^2 \frac{d}{l} \sum \left(\frac{y_f}{f}\right)^2 \frac{y'_d}{d} \Delta \frac{x}{l} - \left(\frac{f}{l}\right)^2 \left(\frac{y_s}{f}\right)^2 C \frac{d}{l}$$

Fassen wir alle Glieder zusammen, so folgt:

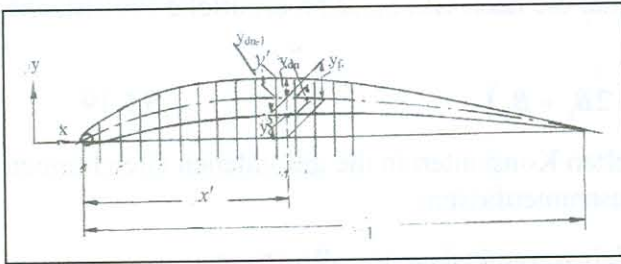
$$\frac{I_{\min}}{l^4} = \left[ D_1 \left(\frac{d}{l}\right)^2 + D_2 \left(\frac{f}{l}\right)^2 \right] \frac{d}{l} \quad 6.5.10$$

Dabei bedeutet:

$$D_1 = \frac{2}{3} \sum_{x=0}^1 \left(\frac{y'_d}{d}\right)^3 \Delta \frac{x}{l} \quad 6.5.11$$

$$D_2 = 2 \sum_{x/l=0}^1 \left(\frac{y_f}{f}\right)^2 \frac{y'_d}{d} \Delta \frac{x}{l} - \left(\frac{y_s}{f}\right)^2 C \quad 6.5.12$$

$\frac{y_f}{f}$  erhält man aus der Gleichung für die Skelettlinie des Profils mit einer Wölbungsrücklage von 50% zu:



$$\frac{y_f}{f} = 4 \frac{x'}{l} \left(1 - \frac{x'}{l}\right) \quad 6.5.13$$

Entsprechend der Abb.: 6.5.1 gilt für

$$\frac{y'_d}{d} = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{y_d}{d}\right)_{n-1} + \left(\frac{y_d}{d}\right)_n \right] \quad 6.5.14$$

wobei für  $\frac{y_d}{d}$  das jeweilige  $x/l$

Abb.: 6.5.1 Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes.

aus der Gl.: 6.3.2.58 zu bestimmen ist. Mit

Hilfe der Abb.: 6.5.1 kann man für die Summenausdrücke der Gleichungen 6.5.11 und 6.5.12 die folgenden Ausdrücke bestimmen:

$$\frac{2}{3} \sum_0^1 \left(\frac{y'_d}{d}\right)^3 \Delta \frac{x}{l} = \frac{3}{2} \left[ \left(\frac{y_d}{d}\right)_1 \left(\frac{x}{l}\right)_1 \right] + \frac{1}{12} \sum_1^n \left[ \left(\frac{y_d}{d}\right)_{n-1} + \left(\frac{y_d}{d}\right)_n \right]^3 \left[ \left(\frac{x}{l}\right)_n - \left(\frac{x}{l}\right)_{n-1} \right] \quad 6.5.15$$

$$2 \sum_0^1 \left(\frac{y_f}{f}\right)^2 \left(\frac{y'_d}{d}\right) \Delta \frac{x}{l} = \left\{ 2 \left(\frac{x}{l}\right)_1 \left[ 1 - \left(\frac{x}{l}\right)_1 \right] \right\}^2 \left(\frac{y_d}{d}\right)_1 \left(\frac{x}{l}\right)_1$$

$$+ \left\{ 4 \left[ \left(\frac{x}{l}\right)_{n-1} + \frac{\left(\frac{x}{l}\right)_n - \left(\frac{x}{l}\right)_{n-1}}{2} \right] \left[ 1 - \left(\frac{x}{l}\right)_{n-1} + \frac{\left(\frac{x}{l}\right)_n - \left(\frac{x}{l}\right)_{n-1}}{2} \right] \right\}^2 \left[ \left(\frac{y_d}{d}\right)_{n-1} + \left(\frac{y_d}{d}\right)_n \right] \left[ \left(\frac{x}{l}\right)_n - \left(\frac{x}{l}\right)_{n-1} \right]$$

6.5.16

Für den Drillwiderstand des Profils gilt:

$$\Theta^* = \int r^2 dF \quad 6.5.17$$

Bei einer Verdrehung des Profils passen sich die Schubspannungen der Profilkontur an (siehe Abb.: 6.5.2). Folglich gilt für die Ober- und Unterseite des Profils:

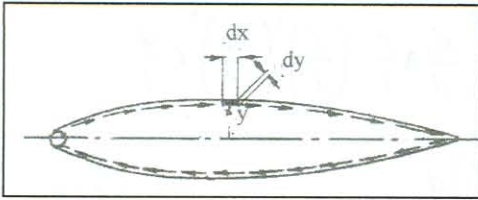


Abb.: 6.5.2 Zur Bestimmung des Drillmoments.

$$\frac{\Theta^*}{l^4} = \int_{\frac{y}{l}=0}^{\frac{y}{l}=1} \int_{\frac{x}{l}=0}^1 \left(2 \frac{y}{l}\right)^2 2d \frac{y}{l} d \frac{x}{l} = 8 \int \int \left(\frac{y}{l}\right)^2 d \frac{y}{l} d \frac{x}{l}$$

$$\frac{\Theta^*}{l^4} = \frac{8}{3} \int \left(\frac{y}{l}\right)^3 d \frac{x}{l} = 4 \frac{2}{3} \int \left(\frac{y}{l}\right)^3 d \frac{x}{l}$$

Das Integral  $\frac{2}{3} \int \left(\frac{y}{l}\right)^3 d \frac{x}{l}$  wurde bereits in Zusammenhang mit dem Trägheitsmoment  $I_{\min}$  ausgewertet und kann übernommen werden. Deshalb kann das Drillmoment in der einfachen Form

$$\frac{\Theta^*}{l^4} = 4D_1 \left(\frac{d}{l}\right)^3 = D_3 \left(\frac{d}{l}\right)^3 \quad 6.5.18$$

dargestellt werden.

Der Vollständigkeit halber soll hier noch einmal die nach Gl.: 5.3.2.56 ermittelte Profilfläche angegeben werden:

$$\frac{F_p}{l^2} = \frac{\pi}{16} (6B_0 + 2B_1 + B_2) \quad 6.5.19$$

Setzen wir nun die im Abschnitt 6.3.2 ermittelten Konstanten in die gefundenen Gleichungen ein, lassen sich die Ergebnisse wie folgend zusammenfassen:

$$\frac{x_s}{l} = A \quad \text{Schwerpunktslage in x-Richtung}$$

$$\frac{y_s}{l} = B \frac{f}{l} \quad \text{Schwerpunktslage in y-Richtung}$$

$$\frac{F_p}{l^2} C \frac{d}{l} \quad \text{Profilfläche}$$

$$\frac{I_{\min}}{l^4} = \left[ D_1 \frac{d}{l} + D_2 \left(\frac{f}{l}\right)^2 \right] \frac{d}{l} \quad \text{Flächenträgheitsmoment um die flache Kante}$$

$$\frac{I_{\max}}{l^4} = E \frac{d}{l} \quad \text{Flächenträgheitsmoment um die hohe Kante}$$

$$I_p = I_{\max} + I_{\min} \quad \text{Polares Flächenträgheitsmoment}$$

$$\frac{\Theta^*}{l^4} = D_3 \left(\frac{d}{l}\right)^3 \quad \text{Drillwiderstand}$$

Für eine parabolische Skelettlinie der Profile mit 50% Wölbungsrücklage  $\left(\frac{x_f}{l} = 0,5\right)$  gelten folgende Konstanten:

Profil	Q 30	Q40	Q 50
Konstanten	Vorleitgitter	Laufgitter	Leitgitter
A	0,42512	0,43766	0,44103
B	0,73967	0,76806	0,75852
C	0,7510	0,70363	0,7273
$D_1$	0,045305	0,040501	0,041795
$D_2$	0,049965	0,039603	0,042437
$D_3$	0,18122	0,162005	0,16718
E	0,05739	0,04429	0,053349

6.6 Die Gestaltung des Laufgitters unter Berücksichtigung des Ausgleiches der an den Profilen durch die Luft- und Fliehkräfte hervorgerufenen Momente.

Die Laufgitterschaufelblätter eines Axialverdichters sind hinsichtlich der Materialfestigkeit hoch beanspruchte Bauteile. Kräftemäßig unterliegen sie in axialer Richtung den statischen Druckunterschieden und den Impulsunterschieden vor und nach dem Laufgitter. Diese durch das strömende Gas hervorgerufenen Kräfte üben in Bezug auf das Fußprofil der Schaufelblätter nicht unbeträchtliche Momente aus, die das Fußprofil festigkeitsmäßig belasten. Neigt man das Schaufelblatt in bezug auf die Schwerpunktshauptachse des Fußprofils, so kann das durch die Gaskräfte hervorgerufene Moment am Fußprofil durch die entgegengesetzt wirkende Fliehkraft des Schaufelblattes aufgehoben werden.

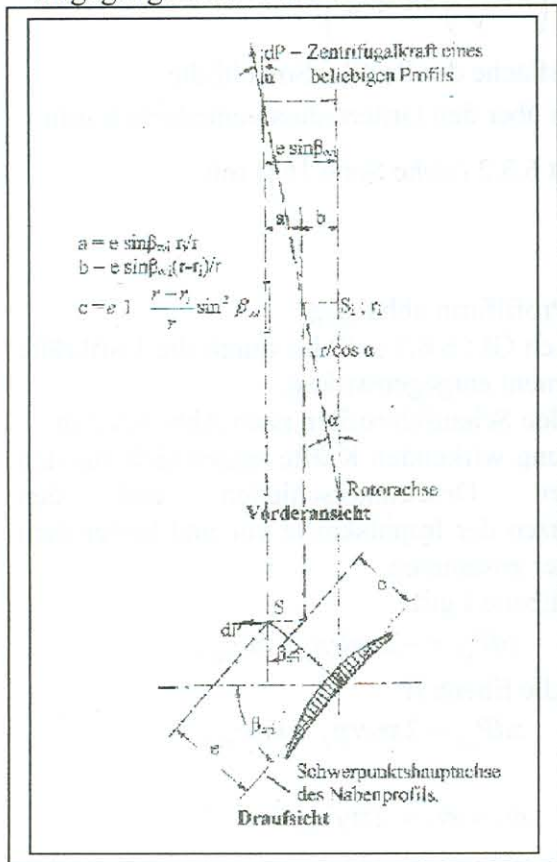


Abb.: 6.6.1 Die Projektion der Schaufelprofile zu einem Schaufelblatt.

Die Projektion der Profilschwerpunkte S auf die Ebene des Fußprofils sollen nach Abb.: 6.6.1 auf einer Geraden liegen die rechtwinklig zur Schwerpunktshauptachse durch dessen Schwerpunkt läuft und sich linear mit den Radius auf dieser verteilt. Es gilt:

$$e = e_a \frac{r - r_i}{r_a - r_i} = e_a \frac{v - v_i}{1 - v_i} \quad 6.6.1$$

wobei  $e_a$  aus den durch die auf das Schaufelblatt wirkenden Kräfte ermittelt werden muss. Auf Abb.:6.6.1 ist D der Durchstoßpunkt der Kraft P durch die Ebene des Fußprofils. Aus der Abb.: 6.6.1 können noch folgende Verhältnisse abgelesen werden, wenn man die Lage der Schwerpunktshauptachsen der Profile annähernd gleich dem Strömungswinkel  $\beta_{\infty}$  setzt.

Es verhält sich:

$$\frac{e \sin \beta_{\infty}}{r} = \frac{a}{r_i} \quad \text{oder}$$

$$a = e \sin \beta_{\infty} \frac{r_i}{r} = e \sin \beta_{\infty} \frac{v_i}{v} \quad 6.6.2$$

Weiterhin ist:

$$b = e \sin \beta_{\infty i} - a$$

$$b = e \sin \beta_{\infty i} \frac{r - r_i}{r} = e \sin \beta_{\infty i} \frac{v - v_i}{v} \quad 6.6.3$$

und

$$\sin \beta_{\infty i} = \frac{d}{e \sin \beta_{\infty i} \frac{v - v_i}{v}}$$

daraus folgt:

$$d = e \sin^2 \beta_{\infty i} \frac{v - v_i}{v} \quad 6.6.4$$

Damit erhalten wir schließlich:

$$c = e \left( 1 - \frac{v - v_i}{v} \sin^2 \beta_{\infty i} \right) \quad 6.6.5$$

Für die Flieh- bzw. Zentrifugalkraft des Schaufelblattes gilt:

$$dP = dm \frac{r}{\cos \alpha} \omega^2 = \gamma F_p \frac{r}{\cos \alpha} \frac{u_a^2}{r_a^2} dr \quad 6.6.6$$

und für das Fliehkraftmoment beim Durchstoßpunkt D des Fußprofils:

$$dM_C = dP \cos \alpha e \left( 1 - \frac{v - v_i}{v} \sin^2 \beta_{\infty i} \right)$$

oder mit Gl.: 6.6.6

$$M_C = \gamma u_a^2 \frac{e_a}{1 - v_i} \int \frac{F_p}{l^2} l^2 v^2 \left( 1 - \frac{v_i}{v} \right) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{v_i}{v} \right) \sin^2 \beta_{\infty i} \right] dv \quad 6.6.7$$

Dabei ist  $l$  die Sehnenlänge und  $F_p$  die Querschnittsfläche der Profile. Sowohl die Sehnenlänge als auch die Querschnittsfläche können über den Gitterradius veränderlich sein.

Den Ausdruck  $\frac{F_p}{l^2}$  hatten wir bereits im Abschnitt 6.3.2 (siehe Seite 168) mit

$$\frac{F_p}{l^2} = C \frac{d}{l}$$

kennen gelernt. Die Konstante  $C$  ist von der Art der Profilform abhängig.

Dem Fliehkraftmoment bezüglich des Fußprofils nach Gl.: 6.6.7 soll das durch die Luftkräfte hervorgerufene und auf das Fußprofil bezogene Moment entgegenwirken.

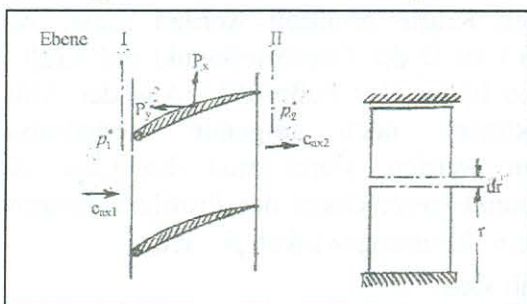


Abb.: 6.6.2 Zur Bestimmung der Luftkräfte.

Die an den Schaufelprofilen nach Abb.:6.6.2 in  $y$ -Richtung wirkenden Kräfte setzen sich aus den statischen Druckunterschieden und den Differenzen der Impulskräfte vor und hinter dem Laufgitter zusammen.

Für die Ebene I gilt:

$$zdP_{y1} = -2\pi r dr p_1 - \dot{m}_1 c_{ax1}$$

und für die Ebene II:

$$zdP_{y2} = 2\pi r dr p_2 + \dot{m}_2 c_{ax2}$$

Da

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = 2\pi r \rho c_{ax} dr$$

ist folgt:

$$\frac{zdP_y}{r dr} = 2\pi [(p_2 - p_1) - \rho c_{ax1} (c_{ax2} - c_{ax1})] \quad 6.6.8$$

Für die Luftkraft in Umfangsrichtung gilt dagegen:

$$dP_x = \frac{dm}{z} \Delta w_u = \frac{2\pi}{z} \rho_1 c_{ax1} \Delta w_u dr \quad 6.6.9$$

Mit

$$u = r\omega \quad \text{und} \quad u\Delta w_u = h_{th}$$

folgt

$$\frac{zdP_x}{dr} = \frac{2\pi\rho_1 c_{ax1} h_{th}}{\omega} \quad 6.6.10$$

Diese Beziehung gilt für das Laufgitter. Für das Leitgitter kann gesetzt werden:

$$\frac{zdP_x}{dr} = 2\pi r c_{ac2} \rho_2 \Delta c_u \quad 6.6.11$$

Für die Kraft an einem Profil des Laufgitters senkrecht zur Schwerpunktschwerachse gilt:

$$dA = \frac{dP_x}{\sin \beta_\infty}$$

Dieser Wert hat nur für ein beliebiges Profil Gültigkeit. Auf das Fußprofil bezogen ergibt sich nach Abb.: 6.6.3:

$$dA' = dA \cos(\beta_{\infty i} - \beta_\infty) = dP_x \frac{\cos \beta_{\infty i} - \cos \beta_\infty}{\sin \beta_\infty}$$

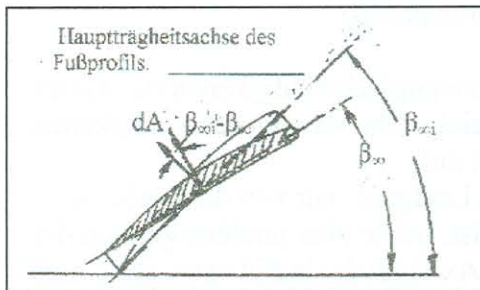


Abb.: 6.6.3 Zur Bestimmung der Luftkraftmomente.

Das durch die Luftkräfte an allen Schaufelschnitten verursachte Moment bezogen auf das Fußprofil ist dann unter Beachtung der Gl.: 6.6.10

$$M_L = \frac{2\pi r_a}{z\omega} \int_{v_i}^1 h_{th} \rho_1 c_{ax1} \frac{\cos(\beta_{\infty i} - \beta_\infty)}{\sin \beta_\infty} (v - v_i) dv$$

oder mit Hilfe einer trigonometrischen Umformung:

$$M_L = \frac{2\pi r_a}{z\omega} \int_{v_i}^1 h_{th} \rho_1 c_{ax1} \frac{1 + \cot \alpha n \beta_{\infty i} - \cot \alpha n \beta_\infty}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha n^2 \beta_{\infty i}}} (v - v_i) dv \quad 6.6.12$$

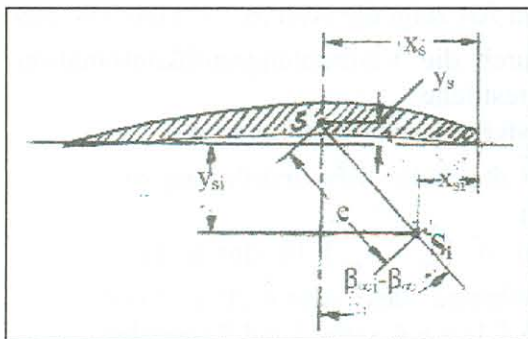


Abb.: 6.6.4 Zur Koordinatenbestimmung der Schwerpunkte.

Da die Fliehkraftmomente und die Luftkraftmomente sich im Fußquerschnitt der Schaufeln aufheben sollen, können die Gleichungen 6.6.7 und 6.6.12 gleich gesetzt werden. Für den Abstand  $e_a$  des Kopfprofils zum Fußprofil ergibt sich dann:

$$e_a = \frac{2\pi r_a^2 (1 - v_i) \int_{v_i}^1 h_{th} \rho_1 c_{ax1} \frac{1 + \cot an\beta_{\infty i} \cot an\beta_{\infty} (v - v_i) dv}{\sqrt{1 + \cot an^2 \beta_{\infty i}}} }{\gamma z u_a^3 \int_{v_i}^1 \frac{F_P}{l^2} l^2 v \left(1 - \frac{v_i}{v}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{v_i}{v}\right) \sin^2 \beta_{\infty i}\right] dv} \quad 6.6.13$$

Ist der Schwerpunktsabstand  $e_a$  des Kopfprofils bekannt, lassen sich die einzelnen Profile auf ihren Schwerpunkt über den Abstand  $e$  nach dem Schema der Abb.: 6.6.4 auffädeln und zu der gewünschten Laufgitterschaukel gestalten.

### 6.7 Hinweise zur Ermittlung der Profilformen für die Laufgitter mit Überschallanströmung.

In den vorhergehenden Abschnitten wurde die Ermittlung der Profilformen für die Lauf- und Leitgitter mit Unterschallanströmung durch das Gas behandelt. Entsprechend den dort vorhandenen Randbedingungen und Verwendungszweck konnte eine immer wieder verwendbare Profilsystematik aufgebaut werden, die entsprechend dem Verwendungszweck eine freie Wahl einer größeren Anzahl von Profilparametern zulassen. Bei diesen Profilen erfolgt die Energiezufuhr an das zu verdichtende Gas nur durch eine Difusorströmung im Laufgitter. Im Gegensatz dazu erfolgt die Energiezufuhr in einem Laufgitter für Überschallanströmung durch

- eine Kombination gasdynamischer Verdichtungsstöße
- und der Difusorströmung.

Entsprechend dem Abschnitt 5.6.4 bewegen sich die Strömungsgeschwindigkeiten des Gases im absoluten Strömungssystem immer im Unterschallbereich. Überschallgeschwindigkeiten treten nur im relativen Strömungssystem, also am Laufgitter auf.

Da die Axialgeschwindigkeit des Gases vor und hinter dem Laufgitter nur von dem radialen Kräftegleichgewicht am strömenden Gasteilchen abhängig ist, ist sie aber unabhängig von der Art der Energieübertragung an das Gas im Laufgitter. Die Axialgeschwindigkeiten des Gases kann somit mit den im Abschnitt 5.1 dargelegten Ausführungen unter Beachtung der kinematischen Größen nach Abschnitt 5.6.4.6 ermittelt werden.

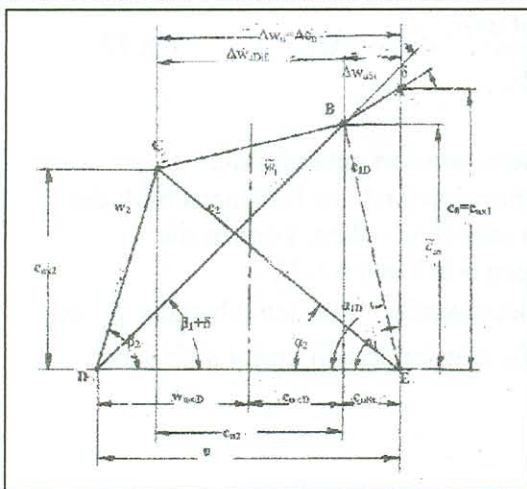


Abb.:6.7.1 Geschwindigkeitsvektordiagramm  
Zur Profilformbestimmung.

Der Punkt C ergibt sich aus den oben genannten Ausführungen zur Axialgeschwindigkeitsermittlung.

Eine schematische Darstellung eines Geschwindigkeitsvektordiagrammes in einer für die Ermittlung der Profilform relevanten Art zeigt die Abb.:6.7.1. Dabei ist das  $\triangle ABE$  durch die Verdichtungsstoßkombination und das restliche Geschwindigkeitsvektordiagramm  $\triangle BCDEB$  durch die Difusorströmung zu realisieren.

Der Punkt A ( $c_0 = c_{ax1}$ ) ist durch die Zusammenhänge des Abschnittes 5.6.4 (Abb.: 5.6.4.1; 5.6.4.3 und 5.6.4.8) gegeben. Der Punkt B ist durch die physikalischen Vorgänge der Verdichtungsstoßkombination nach den Abschnitten 2.2 und 5.6.4 gegeben.

Das Geschwindigkeitsvektordiagramm  $\overline{ABCDEB}$  entspricht dem einer Unterschallverdichterstufe. Damit kann die Profilform für den Unterschallteil unter Beachtung der Anschlussbedingungen an den Überschallteil des Profils auch wie ein Unterschallprofil nach den Abschnitten 6.1 bis 6.16 behandelt werden. Die Anschlussbedingungen des Unterschallteiles der Profilform wird durch den Überschallteil der Profilform vorgeschrieben.

Nach den Abschnitten 2.2 und 5.6.4 sind entsprechend den Voraussetzungen folgende Kennwerte als bekannt anzusehen:

- Der Anströmwinkel  $\beta_1$  des Gases zum Laufgitter.
- Der Stoßfrontwinkel  $\Theta$  für den schrägen Verdichtungsstoß.
- Der Keilwinkel  $\delta$  des Überschallprofils.  $\delta$  ist auch der Ablenkwinkel des strömenden Gases gegenüber der Anströmrichtung  $\beta_1$ .
- Die Stoßfront des nachfolgenden geraden Verdichtungsstoßes steht senkrecht zum Winkel  $\beta_1 + \delta$ .
- Das Querschnittsverhältnis  $F_1 / F_{\min}$  im Strömungskanal des Profilhitters.
- Nach den senkrechten Verdichtungsstoß sei unmittelbar hinter der Stoßfront die Geschwindigkeit des strömenden Gases  $\tilde{w}$ .

Die Abb.: 6.7.2 veranschaulicht die geometrischen Verhältnisse eines Profilhitters für eine Überschallanströmung des Laufgitters durch das zu verdichtende Gas.

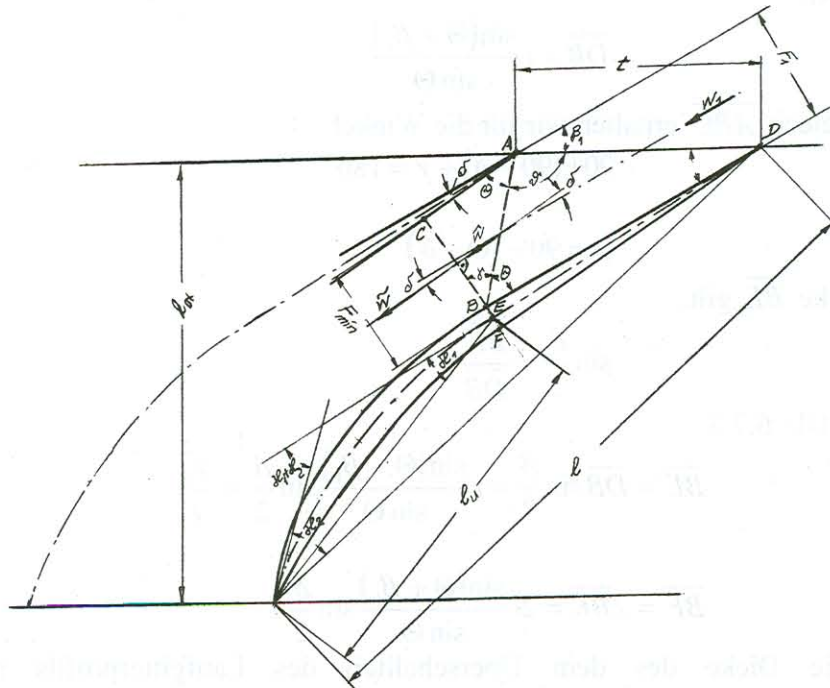


Abb.: 6.7.2 Bezeichnungen am Profil.

Aus den gegebenen geometrischen Werten sind die Stoßfrontlagen im Schaufelkanal festzulegen.

Man betrachte das Dreieck  $\overline{ABD}$ . Danach gilt:

$$\Theta + \beta_1 + \vartheta = 180^\circ$$

oder

$$\vartheta = 180^\circ - (\Theta + \beta_1) \quad 6.7.1$$

Nach den Sinussatz des schiefwinkligen Dreieckes gilt auch:

$$\overline{DB} : \overline{AB} : \overline{AD} = \sin \vartheta : \sin \beta_1 : \sin \Theta$$

Bei den Profilvergittern soll die Teilung der Profile  $\overline{AD}$  mit  $t$  vorgegeben sein. Es ist:

$$\frac{\overline{AB}}{t} = \frac{\sin \beta_1}{\sin \Theta}$$

$$\overline{AB} = t \frac{\sin \beta_1}{\sin \Theta} \quad 6.7.2$$

Damit ist auch:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \vartheta}{\sin \beta_1} = \frac{\sin[180 - (\Theta + \beta_1)]}{\sin \beta_1}$$

oder mit Gl.: 6.7.2:

$$\overline{DB} = t \frac{\sin[180 - (\Theta + \beta_1)]}{\sin \Theta}$$

Mit

$$\sin[180 - (\Theta + \beta_1)] = \sin(\Theta + \beta_1)$$

gilt dann auch:

$$\overline{DB} = t \frac{\sin(\Theta + \beta_1)}{\sin \Theta} \quad 6.7.3$$

Aus dem Dreieck  $\overline{ABC}$  erhalten wir für die Winkel

$$90 + (90 - \delta) + \gamma = 180^\circ$$

oder

$$\gamma = 90 - (\Theta - \delta) \quad 6.7.4$$

Für die Strecke  $\overline{BE}$  gilt:

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{\overline{BE}}{\overline{DB}}$$

oder mit der Gl.: 6.7.3

$$\overline{BE} = \overline{DB} \sin \frac{\delta}{2} = t \frac{\sin(\Theta + \beta_1)}{\sin \Theta} \sin \frac{\delta}{2} = \frac{y_V}{l} \quad 6.7.5$$

und

$$\overline{BF} = 2\overline{BE} = 2t \frac{\sin(\Theta + \beta_1)}{\sin \Theta} \sin \frac{\delta}{2} \quad 6.7.6$$

Dies ist die Dicke des dem Überschallteil des Laufgitterprofils nachgeschalteten Unterschallteil an der Verbindungsstelle  $\overline{BF}$  der Abb.: 6.7.2

Für ein dem Überschallteil eines Profils folgenden Unterschallteil gilt analog der Abb.: 6.3.1.1 hinsichtlich der Quell- und Senkenbelegung die analoge Abb.: 6.7.3.

Für die Profilkontur hatten wir auf Seite 161 gefunden:

$$y = \int_0^{\pi} \frac{q(x)}{2U_\infty} dx = \frac{l}{4} \int_0^{\pi} \left[ B_0 \cot \operatorname{ar} \left( \frac{\varphi}{2} \right) \sin \varphi + \sum_{n=1}^n B_n \sin(n\varphi) \sin \varphi \right] d\varphi$$



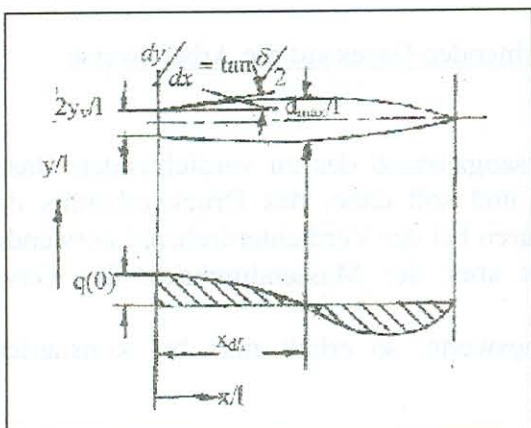


Abb.: 6.7.3 Die Dickenverteilung und die

Singularitätenverteilung.

$$\frac{y_v}{l} = \frac{1}{4} [B_0 (1 - \cos \varphi)] = \frac{B_0}{2}$$

$$B_0 = \frac{2y_v}{l_u} = 2 \frac{t}{l_u} \frac{\sin(\Theta + \beta_1)}{\sin \Theta} \sin \frac{\delta}{2} \quad 6.7.7$$

Dabei ist  $l_u$  die Profilsenhnenlänge für den Unterschallteil des Profils.

Um einen knickfreien Übergang an der Stelle  $\overline{BF}$  der Abb.: 6.7.2 von den Keilwinkel  $\delta$  bei der Dickenverteilung des Profils für den Unterschallteil zu erhalten, folgt auch die Bedingung:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad 6.7.8$$

die bei der Ermittlung der Konstanten  $B_n$  in der oben genannten Gleichung für die Profildicke zu berücksichtigen ist.

Um eine konstante Axialgeschwindigkeit im Strömungskanal der Stufe am Profileintritt des Überschallteiles zu erhalten ist ein bestimmtes Seitenverhältnis  $l_{ax}/2h$  der Gitterprofile nach Abschnitt 5.6.4 (siehe Seite 143) einzuhalten. Dies ist nach den Ermittlungen der Profilparameter für den Unterschallteil nach Abschnitt 6.3.2 bis 6.3.5 mit den auf Abb.: 6.7.2 dargelegten geometrischen Zusammenhängen leicht möglich.

Die Gl.: 6.7.7 zeigt aber auch, dass der Aufbau einer Profilsystematik nicht mehr möglich ist, da sich über den Radius eines Laufgitters die Stoßfrontlage für den schrägen Verdichtungsstoß mit den Winkel  $\Theta$  und den Keilwinkel  $\delta$  und damit auch die Lage der Stoßfront für den geraden Verdichtungsstoß laufend ändert.

Bei Verwendung einer parabolischen Skelettlinie mit 50% Wölbungsrücklage können die Induzierten Geschwindigkeiten durch die Wirbelbelegung nach den Abbildungen 6.3.3.2 und 6.3.3.3 verwendet werden. Dies gilt aber nicht für die induzierten Geschwindigkeiten durch die Quell-Senkenbelegung nach den Abbildungen 6.3.3.4 bis 6.3.3.15 da sich die Anschlussbedingungen an der Trennstelle  $\overline{BF}$  (siehe Abb.: 6.7.2) zwischen den Überschallteil und Unterschallteil über den Laufgitterradius laufend ändern.

Da der rechnerische Aufwand sehr groß ist, ist die Erstellung eines Rechenprogramms für einen Computer zu empfehlen.

wobei  $y_v/l$  durch die Gleichungen

6.7.5 und 6.7.6 bekannt ist.

Nun ist aber

$$\cot \operatorname{an}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi = 1 + \cos \varphi$$

und damit:

$$\frac{y}{l} = \frac{1}{4} \int_0^\pi [B_0 (1 - \cos \varphi) + \sum_1^n B_n \sin(n\varphi) \sin \varphi] d\varphi$$

Für die Profilverkante ist  $\varphi = 0$  und

$$\sin \varphi = 0 \quad \cos \varphi = 1$$

Damit wird dann:

## 7. Das Betriebsverhalten der Axialverdichter.

### 7.1 Der Einfluss des Ansaugzustandes des zu verdichtenden Gases auf die Arbeitsweise des Axialverdichters.

Axialverdichter werden für einen bestimmten Ansaugzustand des zu verdichtenden Gases ausgelegt. Verändern sich diese Ansaugzustände und soll dabei das Druckverhältnis des Verdichters konstant bleiben, machen sich Korrekturen bei der Verdichterdrehzahl notwendig wobei der Gasvolumendurchsatz konstant bleibt aber der Massendurchsatz des Gases veränderlich ist

Bezeichnet man mit den Index 0 die Auslegungswerte, so erhält man bei konstantem Druckverhältnis des Verdichters:

$$\pi = \pi_0 = \frac{p_2^*}{p_1^*}$$

mit Hilfe der Gl.:2.1.11:

$$\frac{h_{th}}{h_{th0}} = \frac{T_1^*}{T_{10}^*} \quad 7.1.1$$

Dabei wurde vorausgesetzt, dass sich die spez. Wärme bzw. der Isentropenexponent des Gases am Eintritt in den Verdichter bei den hier betrachteten Temperaturunterschieden nicht verändert. Über den Einfluss des Isentropenexponenten auf die Arbeitsweise eines Verdichters gibt die Arbeit von Cordes und Beckmann /71/ Aufschluss. Da die Geometrie der Geschwindigkeitsvektordiagramme der Stufen bereits durch die Auslegung vorgegeben ist, kann die nach der Beziehung 2.1.11 gegebene Energieumsetzung nur verarbeitet werden, wenn die Druckzahlen in den einzelnen Stufen konstant gehalten werden:

$$\psi_{th} = \frac{2h_{th}}{u^2} = \psi_{th0} = \frac{2h_{th0}}{u_0^2}$$

Daraus erhält man die mit der veränderten Ansaugtemperatur des Gases zu verändernde Umfangsgeschwindigkeit der Laufgitter bzw. Drehzahl des Verdichterrisors.

$$\zeta^* = \frac{u}{u_0} = \frac{n}{n_0} = \sqrt{\frac{T_1^*}{T_{10}^*}} \quad 7.1.2$$

Für die einzelnen Geschwindigkeiten in den Stufen und den Volumendurchsatz des Gases gilt analog:

$$\frac{c}{c_0} = \sqrt{\frac{T_1^*}{T_{10}^*}} \quad 7.1.3$$

$$\frac{V^*}{V_0^*} = \sqrt{\frac{T_1^*}{T_{10}^*}} \quad 7.1.4$$

Die Änderung des Massendurchsatzes durch den Verdichter ergibt sich, wenn man die Dichte des angesaugten Gases

$$\frac{\rho_1^*}{\rho_{10}^*} = \frac{p_1^*}{p_{10}^*} \frac{T_{10}^*}{T_1^*}$$

in die Beziehung für das Volumen einführt:

$$\frac{\dot{m}_1}{\dot{m}_{10}} = \frac{p_1^*}{p_{10}^*} \sqrt{\frac{T_{10}^*}{T_1^*}} \quad 7.1.5$$

Die vom Verdichter durch die veränderten Ansaugzustände des Gases aufgenommene Leistung folgt aus den Beziehungen 7.1.5 und 7.1.1:

$$\frac{N}{N_0} = \frac{p_1^*}{p_{10}^*} \sqrt{\frac{T_1^*}{T_{10}^*}} \quad 7.1.6$$

Um ein Verdichterkennfeld von Veränderungen des Ansaugzustandes des Gases unabhängig zu machen ist es notwendig mit den Größen  $u/\sqrt{T^*}$  und  $V/\sqrt{T^*}$  bzw. mit den Kennzahlen

$$\zeta^{**} = \frac{u}{u_0} \sqrt{\frac{T_{10}^*}{T_1^*}} = \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{T_{10}^*}{T_1^*}} \quad 7.1.7$$

und

$$\zeta^* = \frac{V_1}{V_{10}} \sqrt{\frac{T_{10}^*}{T_1^*}} \quad 7.1.8$$

zu arbeiten. Ein mit diesen Kennzahlen aufgestelltes Verdichterkennfeld hat im praktischen Gebrauch für alle Zulaufbedingungen des Gases Gültigkeit.

## 7.2 Die Ermittlung des Verdichterkennfeldes.

Mit den Einfluss der wichtigsten Auslegungsparameter eines Axialverdichters auf dessen Betriebsverhalten haben sich schon eine Reihe von Autoren u.a. /48/; /72/; /73/ und /74/ beschäftigt. Unter dem Teillastverhalten sei hier die Lage der Kennlinien im Kennfeld eines Verdichters, ihre Steigung bei veränderlichem Gasdurchsatz und die Lage der Betriebsgrenzen verstanden. Da die numerische Berechnung der räumlichen Strömung auf zu große Schwierigkeiten stößt, soll wie bei allen anderen Arbeiten auch, von einer Mittelschnittsbetrachtung ausgegangen werden. Dabei denkt man sich das Verhalten eine Stufe durch die Werte am Mittelschnitt der Stufe wiedergegeben. Die Treffsicherheit wird dadurch in qualitativer Hinsicht eingeschränkt, da die räumlichen Strömungsvorgänge in einer Stufe im Mittel durch das Verhalten der Gitterprofile auf einen mittleren Radius wiedergeben lassen. Das trifft insbesondere auf die Druckpunktlage der Auftriebskraft an den Profilen (siehe Abb.: 6.3.7.3 und Abb.: 6.3.7.4) zu, durch die ein Abreißen der Strömung zuerst an den Außenradien einer Stufe zu erwarten ist und der Stabilitätsgrenze (Abreißgrenze einer Stufe), wo sich die druckseitigen und saugseitigen Auftriebskräfte an den Profilen eines Gitters im Gleichgewicht befinden, zu.

Zur Bestimmung des Kennfeldes eines mehrstufigen Axialverdichters, z.B. nach Salzmann /75/, Held /76/ und Beckmann /77/ ist allgemein ein großer Rechenaufwand erforderlich.

Die Verfahren gehen von einer relativen Kennlinie der Einzelstufe aus, die entweder durch das Experiment oder durch Rechnung, wobei die Parameter am Mittelschnitt der Stufe zugrunde gelegt werden, ermittelt werden kann. Dabei besteht aber weiterhin die Unsicherheit, dass die durch die vor- und nachgeschalteten Stufen induzierten Zusatzgeschwindigkeiten bei der betrachteten Stufe nach Abschnitt 5.2 nicht berücksichtigt werden können.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass man bei der Berechnung eines

Verdichterkennfeldes keine große Genauigkeit erwarten kann und in der Praxis das Kennfeld experimentell zu ermitteln ist.

Nachfolgend soll ein einfaches Kennfeldberechnungsverfahren angegeben werden, das einen guten Überblick über die Volumenverschiebungen des Gases in Verdichter bei Teillasten angibt und ein etwas ausführlicheres das die Vergrößerung des Lastbereiches eines Verdichters durch Leitkranzverstellung Gasvolumenabbläsung zwischen den Stufe beinhaltet.

## 7.2.1 Eine einfache Kennfeldberechnungsmethode für ein- und mehrstufige Axialverdichter.

Häufig wird vom Projektingenieur schon ein überschlägiges Verdichterkennfeld gefordert, wenn der zu projektierende Axialverdichter nur in seinen überschlägigen kinematischen Mittelschnittswerten bekannt ist. In diesem Falle genügt ein einfaches Kennfeldberechnungsverfahren mit einem kleinen Rechenaufwand den Anforderungen. Dieses Verfahren ist zur überschlägigen Bestimmung der Kennfelder von Axialverdichtern. Mit kleinen Druckverhältnissen geeignet. Die Anwendung des Verfahrens auf Verdichter mit größeren Druckverhältnissen ist durch Stufengruppenaufteilung möglich. Zu dem Verfahren (Siehe auch /78/.)

### 7.2.1.1 Die Einzelstufenkennlinie.

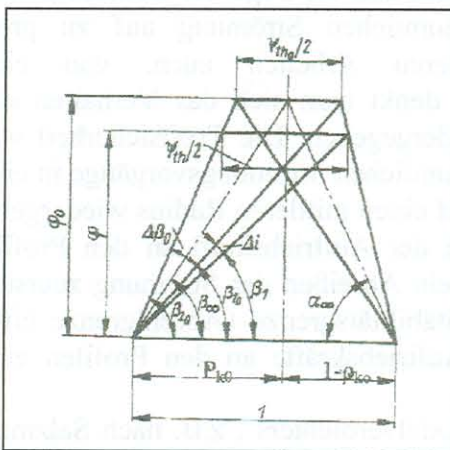
Für die Druckerhöhung in der Stufe eines Axialverdichters ist die isentrope Druckzahl

$$\psi_{is} = \frac{2(h_{th} - h_v)}{u^2} = \psi_{th} - \psi_v \quad 7.2.1.1.1$$

maßgebend. Dabei gibt  $\psi_v$  die Verluste, ausgedrückt durch eine Verlustdruckzahl, wieder. Die Verluste setzen sich aus denen des Laufgitters und denen des Leitgitters zusammen. Der spezifische Energieverlust im Laufgitter kann durch die Beziehung

$$h_{vR} = \frac{c_w w_\infty^2}{2 \left( \frac{t}{l} \right)_R \sin \beta_\infty} \quad 7.2.1.1.2$$

ausgedrückt werden. Die ungestörte Anströmgeschwindigkeit  $w_\infty$  und der zugehörige Sinus



des Winkels  $\beta_\infty$  lassen sich aus der Geometrie des Geschwindigkeitsvektordiagramms der Der Abb.: 7.2.1.1 ermitteln.

Es ist:

$$w_{\infty 0}^2 = (\rho_{k0}^2 + \varphi_0^2) u_0^2 \quad \text{und} \quad w_\infty^2 = (\rho_k^2 + \varphi^2) u^2$$

wobei der Index 0 die Auslegungswerte der Stufe kennzeichnen.

Der kinematische Reaktionsgrad der Stufe kann, wie leicht an der Abbildung nachzuprüfen ist; durch die Beziehung

$$\rho_k = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\varphi}{\varphi_0} (2\rho_{k0} - 1) \right]$$

beschrieben werden. Für den Sinus des Winkels

$\beta_\infty$  gilt dann:

Abb.: 7.2.1.1 Dimensionsloses Geschwindigkeitsdiagramm.

$$\sin \beta_\infty = \frac{\varphi}{w_\infty / u} = \frac{\varphi_0 \frac{\varphi}{\varphi_0}}{\sqrt{\left[ \left( \rho_{k0} - \frac{1}{2} \right) \frac{\varphi}{\varphi_0} + \frac{1}{2} \right]^2 + \varphi_0^2 \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2}}$$

Unter Berücksichtigung der im Kennfeld angewandten Drehzahlkennziffer nach Gl.:7.1.7 lässt sich der spez. Energieverlust des Laufgitter in der Form

$$\zeta^* = \frac{n}{n_o} \sqrt{\frac{T_{10}^*}{T_1^*}} = \frac{u}{u_o} \sqrt{\frac{T_{10}^*}{T_1^*}}$$

lässt sich der Energieverlust des Laufgitters in der Form

$$h_{VR} = \frac{c_{wR}}{2 \left(\frac{t}{l}\right)_R} \frac{u_o^2 \zeta^{*2} \frac{T_1^*}{T_{10}^*} \sqrt{\left\{ \left[ \left( \rho_{ko} - \frac{1}{2} \right) \frac{\varphi}{\varphi_0} + \frac{1}{2} \right]^2 + \varphi_0^2 \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2 \right\}}}{\varphi_0 \frac{\varphi}{\varphi_0}}$$

oder als Verlustdruckzahl ausgedrückt:

$$\psi_{VR} = \frac{2h_{VR}}{u^2} = \frac{c_{wR}}{\left(\frac{t}{l}\right)_R} \frac{\sqrt{\left\{ \left[ \left( \rho_{ko} - \frac{1}{2} \right) \frac{\varphi}{\varphi_0} + \frac{1}{2} \right]^2 + \varphi_0^2 \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2 \right\}^3}{\varphi_0 \frac{\varphi}{\varphi_0}} \quad 7.2.1.1.3$$

Analog hierzu gilt für das Leitgitter:

$$\psi_{VSt} = \frac{2h_{VSt}}{u^2} = \frac{c_{wSt}}{\left(\frac{t}{l}\right)_{St}} \frac{\sqrt{\left\{ \left[ \frac{1}{2} - \left( \rho_k - \frac{1}{2} \right) \frac{\varphi}{\varphi_0} \right]^2 + \varphi_0^2 \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2 \right\}^3}{\varphi_0 \frac{\varphi}{\varphi_0}} \quad 7.2.1.1.4$$

Bei einem kinematischen Reaktionsgrad von  $\rho_k = 0,5$  liefern die beiden Gleichungen unter der Voraussetzung gleicher Widerstandsbeiwerte und Teilungsverhältnisse der Profilkitter gleiche Werte. Werden die Widerstandsbeiwerte der Profilkitter für den Auslegungszustand eingesetzt, müssen bei Abweichungen vom Auslegungszustand zusätzliche Stoßverluste beachtet werden. Zur überschlägigen Berücksichtigung dieser Stoßverluste soll die einfache Beziehung von Pfeleiderer /79/

$$h_{VR} = \sigma \frac{w_{St}^2}{2} \quad 7.2.1.1.5$$

benutzt werden.  $w_{St}$  stellt die Stoßkomponente der Geschwindigkeit nach Abb.:7.2.1.2 dar.

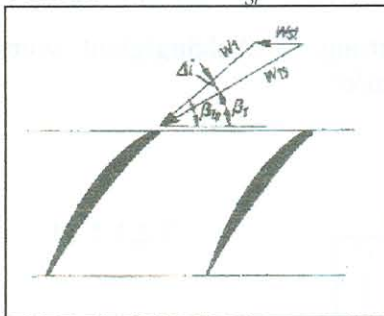


Abb.:7.2.1.2 Zur Bestimmung der Stoßverluste.

Der Stoßverlustbeiwert  $\sigma$  liegt je nach Art des Profilkitters in der Größenordnung von  $\sigma = 0,5$  bis  $0,8$ . Mit Hilfe der Ausdrücke

$$\begin{aligned} w_{1St} &= w_1 \frac{\sin \beta_{10}}{\sin(\beta_{10} - \Delta i)} \\ w_{1u} &= w_1 \cos \beta_{10} \\ w_{1uSt} &= w_{1St} \cos(\beta_{10} - \Delta i) \end{aligned}$$

erhält man die Beziehung

$$w_{1St} = w_{1uSt} - w_{1u} = w_1 \cos \beta_{10} \left[ \frac{\tan \beta_{10}}{\tan(\beta_{10} - \Delta i)} - 1 \right]$$

die sich unter Verwendung des trigonometrischen Additionstheorems in die Form

$$w_{1Sr}^2 = w_1^2 \frac{\tan^2 \Delta i (1 + \tan^2 \beta_{10})}{(\tan \beta_{10} - \tan \Delta i)^2} \quad 7.2.1.1.6$$

umstellen lässt. Dabei ist  $w_{1Sr}$  die auf einen Stoßzustand umgerechnete drehzahlabhängige, stoßfreie Zuströmgeschwindigkeit  $w_1$  zum Profiltgitter. Die Geschwindigkeit  $w_1$  ändert sich noch proportional der Drehzahl

$$w_1 = w_{10} \frac{u}{u_0} \sqrt{\frac{T_{10}^* T_1^*}{T_1^* T_{10}^*}} \frac{\varphi}{\varphi_0} = w_{10} \zeta^* \sqrt{\frac{T_1^*}{T_{10}^*}} \frac{\varphi}{\varphi_0}$$

Mit

$$w_{10}^2 = u_0^2 \left[ \left( \rho_{k0} + \frac{\psi_{th0}}{4} \right)^2 + \varphi_0^2 \right]$$

folgt:

$$w_1^2 = u_0^2 \zeta^{*2} \frac{T_1^*}{T_{10}^*} \left[ \left( \rho_{k0} + \frac{\psi_{th0}}{4} \right)^2 + \varphi_0^2 \right] \frac{\varphi}{\varphi_0} \quad 7.2.1.1.7$$

Die Stoßwinkeländerung an der Vorderkante des Gitterprofils ist definiert zu:

$$\Delta i = i - i_o = \beta_{10} - \beta_1 \quad 7.2.1.1.8$$

Auf Grund eines Geschwindigkeitsvektordiagramms gilt für den Strömungswinkel im Auslegungszustand:

$$\tan \beta_{10} = \frac{\varphi_0}{\rho_{k0} + \frac{\psi_{th0}}{4}} \quad 7.2.1.1.9$$

und bei Vernachlässigung der Abströmwinkeländerungen bei Teillast:

$$\tan \beta_1 = \frac{\varphi_0 \frac{\varphi}{\varphi_0}}{1 - \frac{\varphi}{\varphi_0} \left( 1 - \rho_{k0} - \frac{\psi_{th0}}{4} \right)} \quad 7.2.1.1.10$$

Über das trigonometrische Additionstheorem

$$\tan \Delta i = \tan(\beta_{10} - \beta_1) = \frac{\tan \beta_{10} - \tan \beta_1}{1 + \tan \beta_{10} \tan \beta_1}$$

erhält man nach einigen Umformungen die Stoßwinkeländerung in Abhängigkeit vom Teillastzustand und den kinematischen Auslegungsdaten einer Stufe:

$$\tan \Delta i = \frac{\varphi_0 \left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)}{\left( 1 - \frac{\varphi}{\varphi_0} \right) \left( \rho_{k0} + \frac{\psi_{th0}}{4} \right) + \frac{\varphi}{\varphi_0} \left[ \varphi_0^2 + \left( \rho_{k0} + \frac{\psi_{th0}}{4} \right)^2 \right]} \quad 7.2.1.1.11$$

Damit lässt sich der Stoßverlust, ausgedrückt durch eine Verlustdruckzahl, angeben.

Für das Laufgitter gilt:

$$\psi'_{VR} = \frac{2h'_{VR}}{u^2} = \sigma \left[ \left( \rho_{k0} + \frac{\psi_{th0}}{4} \right)^2 + \varphi_0^2 \right] \frac{\tan^2 \Delta i \left[ 1 + \frac{\varphi_0^2}{\left( \rho_{k0} + \frac{\psi_{th0}}{4} \right)} \right]^2}{\left[ \frac{\varphi_0}{\rho_{k0} + \frac{\psi_{th0}}{4}} - \tan \Delta i \right]^2} \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2 \quad 7.2.1.1.12$$

und für das Leitgitter:

$$\psi'_{VSt} = \frac{2h'_{VSt}}{u^2} = \sigma \left[ \left( 1 - \rho_{k0} + \frac{\psi_{th0}}{4} \right)^2 + \varphi_0^2 \right] \frac{\tan^2 \Delta i \left[ 1 + \frac{\varphi_0^2}{\left( 1 - \rho_{k0} + \frac{\psi_{th0}}{4} \right)} \right]^2}{\left[ \frac{\varphi_0}{1 - \rho_{k0} + \frac{\psi_{th0}}{4}} - \tan \Delta i \right]^2} \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)^2 \quad 7.2.1.1.13$$

Für die isentrope Druckzahl der Verdichterstufe kann dann gesetzt werden:

$$\psi_{is} = \psi_{th} - (\psi_{VR} + \psi'_{VR}) - (\psi_{VSt} + \psi'_{VSt})$$

oder auf den Auslegungszustand bezogen:

$$\frac{\psi_{is}}{\psi_{is0}} = \frac{\psi_{th} - (\psi_{VR} + \psi'_{VR}) - (\psi_{VSt} + \psi'_{VSt})}{\psi_{th0} - \psi_{VR0} - \psi'_{VSt0}} \quad 7.2.1.1.14$$

wobei sich  $\psi_{th}$  aus dem dimensionslosen Geschwindigkeitsdiagramm der Abb.: 7.2.1.1 der Verdichterstufe ergibt:

$$\psi_{th} = 2 - \frac{\varphi}{\varphi_0} (2 - \psi_{th0}) \quad 7.2.1.1.15$$

Der Verlauf des Stufenwirkungsgrades ist dann durch

$$\frac{\eta_{St}}{\eta_{St0}} = \frac{\psi_{is} / \psi_{is0}}{\psi_{th} / \psi_{th0}} \quad 7.2.1.1.16$$

gegeben. Die Abb.: 7.2.1.3 zeigt als Beispiel eine nach den angegebenen Beziehungen errechnete Einzelstufenkennlinie wobei noch eine Aussage über das kritische Lieferzahlverhältnis  $(\varphi/\varphi_0)_{krit}$  bei dem ein Übergang zur instabilen Arbeitsweise des Gitters zu erwarten ist, gemacht werden.

Formt man die Gl.: 7.2.1.1.11 um in

$$\tan \Delta i = \frac{1 - \frac{\varphi}{\varphi_0}}{\frac{\varphi}{\varphi_0} \left\{ \varphi_0 \left[ 1 + \left( \frac{\rho_{k0}}{\varphi_0} + \frac{1}{4} \frac{\psi_{th0}}{\varphi_0} \right)^2 \right] - \left( \frac{\rho_{k0}}{\varphi_0} + \frac{1}{4} \frac{\psi_{th0}}{\varphi_0} \right) \right\} + \frac{1 - \frac{\varphi}{\varphi_0}}{\frac{\rho_{k0}}{\varphi_0} + \frac{1}{4} \frac{\psi_{th0}}{\varphi_0}}$$

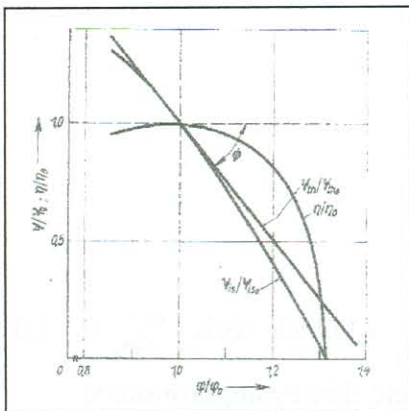


Abb.: 7.2.1.3 Die Stufenkennlinie.

Nach einigen Umformungen der Gleichung unter Berücksichtigung maximal zulässiger Stoßwinkeländerungen erhält man für das kritische Lieferzahlverhältnis:

$$\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_{krit} = \frac{1 - \tan \Delta i_{krit} \left( \frac{\rho_{k0}}{\varphi_0} + \frac{1}{4} \frac{\psi_{th0}}{\varphi_0} \right)}{1 + \tan \Delta i_{krit} \left\{ \varphi_0 \left[ 1 + \left( \frac{\rho_{k0}}{\varphi_0} + \frac{1}{4} \frac{\psi_{th0}}{\varphi_0} \right)^2 \right] - \left( \frac{\rho_{k0}}{\varphi_0} + \frac{1}{4} \frac{\psi_{th0}}{\varphi_0} \right) \right\}} \quad 7.2.1.1.17$$

Verwendet man als Näherung für den kritischen Stoßwinkel  $\Delta i_{krit} \approx \alpha_{krit}$  mit

$$\alpha_{krit} = \arctan \left( -4 \frac{f}{l} \right)$$

nach Gl.: 6.3.7.23 und setzt weiterhin als Vereinfachung den Wölbungswinkel  $\Theta$  der Profilskelettlinie gleich der Strömungsrichtungsänderung  $\Delta\beta$ , so kann nach der Gl.: 6.3.2.20 der Wölbungswinkel  $\Theta$  und damit auch  $\Delta i_{krit} \approx \alpha_{krit}$  berechnet werden.

### 7.2.1.2 Das Verdichter kennfeld.

Die Gasführungsquerschnitte eines Verdichters werden für die Auslegungsparameter, d.h. für den Auslegungspunkt im Kennfeld, berechnet. Die bei einem Axialverdichter ein- und austretende Gasmasse ist:

$$\dot{m}_1 = F_1 \rho_1 c_{ax1} \quad \text{und} \quad \dot{m}_2 = F_2 \rho_2 c_{ax2}$$

Aus Gründen der Kontinuität müssen beide Ausdrücke gleich sein. Unter Verwendung der Lieferzahlen am Ein- und Austritt des Verdichters erhält man die einfache Beziehung

$$\frac{\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)}{\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_1} = \frac{F_1 \varphi_{10} r_1}{F_2 \varphi_{20} r_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Ersetzt man mit der gasdynamischen Beziehung

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left[ 1 - \frac{\kappa - 1}{2} M^{*2} \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$

die statischen Dichten des Gases durch die des Gesamtzustandes und setzt dabei einen polytropen Verdichtungs Vorgang

$$\frac{\rho_2^*}{\rho_1^*} = \left( \frac{p_2^*}{p_1^*} \right)^{\frac{1}{n}} = \pi^{\frac{1}{n}}$$

voraus, so folgt:

$$\frac{\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_2}{\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_1} = \frac{F_1 \varphi_{10} r_1}{F_2 \varphi_{20} r_2} \cdot \frac{1}{\pi^{\frac{1}{n}} \left[ \frac{1 - \frac{\kappa - 1}{2} M_2^{*2}}{1 - \frac{\kappa - 1}{2} M_1^{*2}} \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}}$$

Da für den Auslegungszustand des Verdichters sowohl  $\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_1 = 1,0$  wie auch  $\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_2 = 1,0$  sein muss, erhält man die dem jeweiligen Verdichter zugeordnete Bemessungskonstante:



$$\frac{F_1 \varphi_{01} r_1}{F_2 \varphi_{02} r_2} = \pi^{\frac{1}{n}} \left[ \frac{1 - \frac{\kappa-1}{2} M_{02}^{*2}}{1 - \frac{\kappa-1}{2} M_{01}^{*2}} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

Setzt man diese Beziehung ein, so ergibt sich für das Lieferzahlverhältnis:

$$\frac{\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_2}{\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_1} = \left(\frac{\pi_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\left[ \frac{1 - \frac{\kappa-1}{2} M_{02}^{*2}}{1 - \frac{\kappa-1}{2} M_{01}^{*2}} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}}}{\left[ \frac{1 - \frac{\kappa-1}{2} M_2^{*2}}{1 - \frac{\kappa-1}{2} M_1^{*2}} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}}} \quad 7.2.1.2.1$$

Für  $\frac{\kappa-1}{2} M^{*2} \ll 1$  kann auch geschrieben werden:

$$\frac{\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_2}{\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_1} = \left(\frac{\pi_0}{\pi}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1 - \frac{M_{02}^2}{2} \quad 1 - \frac{M_1^2}{2}}{1 - \frac{M_2^2}{2} \quad 1 - \frac{M_{01}^2}{2}} \quad 7.2.1.2.2$$

Ein beliebiges, vom Auslegungspunkt im Kennfeld abweichendes Druckverhältnis kann offenbar durch eine mittlere Druckzahl, multipliziert mit der Stufenzahl des Verdichters, dargestellt werden.

$$z \psi_{thm} = \frac{z 2 h_{thm}}{u_m^2} = \frac{2}{u_m^2} \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{RT_1^*}{\eta_{is}} \left( \pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right) \quad 7.2.1.2.3$$

Daraus erhält man das Druckverhältnis zu:

$$\pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 1 + z u_{m0}^2 \zeta^{*2} \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\eta_{is0}}{RT_{10}^*} \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right)_{is} \frac{\psi_{thm}}{2} \quad 7.2.1.2.4$$

$u_{m0}^2$  ist das arithmetische Mittel aller Quadrate der Umfangsgeschwindigkeiten der einzelnen Stufen bei der Auslegungsdrehzahl

$$u_{m0}^2 = \frac{\sum_{z=1}^z u_0^2}{z} \quad 7.2.1.2.5$$

Soll die mittlere Druckzahl der Gl.: 7.2.1.2.4 durch

$$\psi_{thm0} = \frac{2 \sum_{z=1}^z h_{th}}{z u_{m0}} \quad 7.2.1.2.6$$

mit der Gl.: 7.2.1.1.15 ausgedrückt werden, so muss analog dazu die mittlere Lieferzahl

$$\varphi_{m0} = \frac{\sum_{z=1}^z c_{ax0}}{z u_{m0}} \quad 7.2.1.2.7$$

Angesetzt werden. Die Gl.: 7.2.1.1.15 geht dann über in

$$\psi_{thm} = 2 - \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)_m (2 - \psi_{th0m})$$

Für das Druckverhältnis kann dann geschrieben werden:

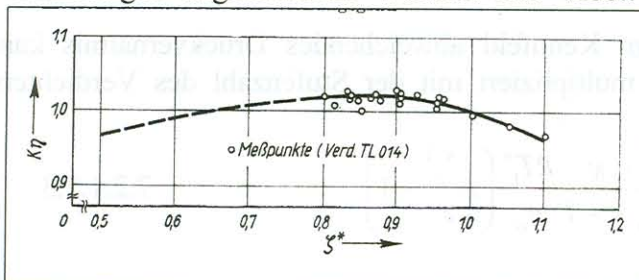
$$\pi = \left\{ 1 + z u_{m0}^2 \zeta^{*2} \eta_{is0} \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right)_{is} \frac{\kappa - 1}{2\kappa R T_{10}^*} \left[ 2 - \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)_m (2 - \psi_{th0m}) \right] \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

Durch diesen Schritt wird das Verhalten eines mehrstufigen Verdichters auf das Verhalten einer Ersatzstufe, deren Kennlinien mit den Gleichungen 7.2.1.2.5 bis 7 ermittelt werden kann, zurückgeführt und deren spezifische Verdichterarbeit, entsprechend der Stufenzahl des Verdichters, dem Ausdruck  $\psi_{thm}$  äquivalent ist. Es ist einleuchtend, dass mit dieser Kennfeldberechnungsmethode auf Axialverdichter mit kleinen Volumenänderungen bzw. kleinen Druckverhältnissen beschränkt wird.

Bei bekannten Auslegungswerten und der bekannten Änderung des mittleren Stufenwirkungsgrades bei Teillast nach der Gl.: 7.2.1.1.16 ist es nicht möglich, die Erhitzungsverluste bei Abweichungen vom Auslegungspunkt zu bestimmen. Aus diesem Grunde wird die Änderung des isentropen Wirkungsgrades bei Teillast durch die Änderung des Stufenwirkungsgrades multipliziert mit einem Korrekturfaktor ersetzt. Es gilt also

$$\eta_{is0} \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right)_{is} = \eta_{is0} \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right)_{St} K_\eta$$

Der Korrekturfaktor  $K_\eta$  kann aus bereits vorhandenen Verdichterkennfeldern oder aus den Erfahrungen angenommen werden. Die Abb.: 7.2.1.4 zeigt z.B. den Korrekturfaktor in



Abhängigkeit von der Drehzahlkennzahl wie er den Kennfeldern vermessener Verdichter entnommen wurde. Obwohl der Verlauf von  $K_\eta$  als Funktion von

$\zeta^*$  noch von der Art der Profilanpassung an die Strömungsverhältnisse und der Anströmmachzahl ist, können die Werte der Abb.: 7.2.1.4 für eine

Abb.: 7.2.1.4 Korrekturfaktor für den Wirkungsgrad.

Überschlagsrechnung als gute Näherung dienen.

Für das Druckverhältnis im Teillastzustand des Verdichters gilt dann:

$$\pi = \left\{ 1 + z u_{m0}^2 \zeta^{*2} \eta_{is0} \left( \frac{\eta}{\eta_0} \right)_{St} K_\eta \frac{\kappa - 1}{2\kappa R T_{10}^*} \left[ 2 - \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)_m (2 - \psi_{thm}) \right] \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad 7.2.1.2.8$$

oder für den Auslegungszustand des Verdichters mit  $\left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)_m = 1,0$  und  $\zeta^* = 1,0$

$$\pi_0 = \left\{ 1 + z u_{m0}^2 \eta_{is0} \frac{\kappa - 1}{2\kappa R T_{10}^*} \psi_{th0m} \right\}^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad 7.2.1.2.9$$

Damit wird das Verhältnis der Lieferzahlen am Aus- und Eintritt des Verdichters:

$$\frac{\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_2}{\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_1} = \left\{ \frac{1 + zu_{m0}^2 \eta_{is0} \frac{\kappa-1}{2\kappa RT_{10}^*} \psi_{th0m}}{1 + zu_{m0}^2 \zeta^{*2} \eta_{is0} \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)_{St} K_\eta \frac{\kappa-1}{2\kappa RT_{10}^*} \left[2 - \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right) (2 - \psi_{th0m})\right]} \right\}^{\frac{\kappa-1}{\kappa-1n}} \frac{1 - \frac{M_{20}^{*2}}{2} \quad 1 - \frac{M_{10}^{*2}}{2}}{1 - \frac{M_2^{*2}}{2} \quad 1 - \frac{M_1^{*2}}{2}} \quad 7.2.1.2.10$$

Zur Bestimmung der in Gl.:7.2.1.2.10 enthaltenen Machzahlen geht man wieder vom dimensionslosen Geschwindigkeitsvektordiagramm der Verdichterstufe aus. Für die Absolutgeschwindigkeit am Verdichtereintritt gilt:

$$\left(\frac{c_1}{u}\right)^2 = \left[ (1 - \rho_k) - \frac{\psi_{thm}}{4} \right]^2 + \varphi^2$$

Mit der Gleichung

$$\rho_k = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\varphi}{\varphi_0} (2\rho_{k0} - 1) \right]$$

und der Beziehung 7.2.1.1.15 folgt für die Machzahl am Verdichtereintritt:

$$M_1^{*2} = \frac{c_1^2}{\kappa RT_1^*} = \frac{u_{m0}^2}{\kappa RT_{10}^*} \zeta^{*2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} - \left(\rho_{k0} - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_m - \frac{1}{4} \left[ 2 - \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_m (2 - \psi_{th0m}) \right] \right]^2 + \varphi_{0m}^2 \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)^2 \right\} \quad 7.2.1.2.11$$

oder für den Auslegungszustand mit  $\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_m = 1,0$  und  $\zeta^* = 1,0$ :

$$M_{10}^{*2} = \frac{u_{m0}^2}{\kappa RT_{10}^*} \left\{ \left[ (1 - \rho_{k0}) - \frac{\psi_{th0m}}{4} \right]^2 + \varphi_{0m}^2 \right\} \quad 7.2.1.2.12$$

Verwendet man das Temperaturverhältnis des Verdichters

$$g^* = \frac{T_2^*}{T_1^*} = 1 + zu_{m0}^2 \zeta^{*2} \frac{\psi_{thm0}}{2c_p T_{10}^*} \frac{\psi_{thm}}{\psi_{thm0}}$$

und die Austrittsgeschwindigkeit

$$c_2^2 = c_{ax}^2 = u^2 \varphi^2 = u_{0m}^2 \zeta^{*2} \frac{T_1^*}{T_{10}^*} \varphi_{0m}^2 \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_2^2$$

dann lässt sich für die Austrittsmachzahl als Näherung schreiben:

$$M_2^{*2} = \frac{c_2^2}{\kappa RT_1^* \frac{T_2^*}{T_1^*}} = \frac{u_{m0}^2 \zeta^{*2} \varphi_{0m}^2 \left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right)_2^2}{\kappa RT_{10}^* \left[ 1 + zu_{0m}^2 \zeta^{*2} \frac{\psi_{th0m}}{2c_p T_{10}^*} \frac{\psi_{thm}}{\psi_{th0m}} \right]} \quad 7.2.1.2.13$$

bzw. für den Auslegungspunkt des Verdichters:

$$M_{20}^{*2} = \frac{u_{0m}^2 \varphi_{0m}^2}{\kappa RT_{10}^* \left[ 1 + zu_{0m}^2 \frac{\psi_{th0m}}{2c_p T_{10}^*} \right]} \quad 7.2.1.2.14$$

Dabei kann für  $(\varphi/\varphi_0)_2$  als Näherung der Wert nach der Gl.: 7.2.1.2.10 ohne Machzahleinfluss verwendet werden. Zur Bestimmung des in der Gl.: 7.2.1.2.10 enthaltenen Polytropenexponenten kann die allgemein bekannte Beziehung

$$\frac{n-1}{n} = \frac{1}{\eta_{pol}} \frac{\kappa-1}{\kappa} \quad 7.2.1.2.15$$

benutzt werden, wobei sich der polytrope Wirkungsgrad entsprechend der Gl.: 2.3.9 aus

$$\eta_{pol} = \frac{\frac{\kappa-1}{\kappa} \lg \pi^*}{\lg \left[ 1 + zu_{om}^2 \zeta^{*2} \frac{\Psi_{th0m}}{2c_p T_{10}^*} \frac{\Psi_{thm}}{\Psi_{th0m}} \right]} \quad 7.2.1.2.16$$

ergibt. Mit den Gleichungen 7.2.1.2.11 bis 7.1.2.1.16 folgt mit  $(\varphi/\varphi_0)_1 = (\varphi/\varphi_0)_m$  aus der Gl.: 7.2.1.2.10 näherungsweise die Lieferzahl am Austritt des Verdichters..

Für die dem jeweiligen Druckverhältnis nach Gl.: 7.2.1.2.8 zugehörige Durchsatzzahl kann man schreiben:

$$\xi^* = \frac{V_1}{V_{10}} \sqrt{\frac{T_{10}^*}{T_1^*}} = \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)_m \zeta^* \frac{\rho/\rho^*}{\rho_0/\rho_0^*}$$

oder mit dem Dichteverhältnis

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \left( 1 - \frac{\kappa-1}{2} M^{*2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

$$\xi^* = \frac{V_1}{V_{10}} \sqrt{\frac{T_{10}^*}{T_1^*}} = \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)_m \zeta^* \left[ \frac{1 - \frac{\kappa-1}{2} M_1^{*2}}{1 - \frac{\kappa-1}{2} M_{10}^{*2}} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad 7.2.1.2.17$$

bzw. mit der Vereinfachung bei  $M^* \ll 1,0$ :

$$\xi^* = \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right)_m \zeta^* \frac{1 - \frac{M_1^{*2}}{2}}{1 - \frac{M_{10}^{*2}}{2}} \quad 7.2.1.2.18$$

wobei die Machzahlen durch die Gleichungen 7.2.1.2.11 und 12 bekannt sind.

Der isentrope Wirkungsgrad wird in der üblichen Weise aus

$$\eta_{is} = \frac{\pi^{*\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{\frac{T_2^*}{T_1^*} - 1}$$

bestimmt. Mit den bisher eingeführten Beziehungen ist es mit der Wahl von  $(\varphi/\varphi_0)_m = (\varphi/\varphi_0)_1$  möglich, die Linien konstanter Drehzahlen, die Linien  $(\varphi/\varphi_0) = \text{konst.}$  für den Verdichterein- und Verdichteraustritt und die Linien konstanten isentropen Wirkungsgrades in einem Verdichterkennfeld darzustellen.

Die Abb.: 7.2.1.5 zeigt einen Vergleich des auf dem Prüfstand gemessenen Kennfeldes eines Vierstufenverdichters nach /47/ mit den nach dieser Methode rechnerisch ermittelten Werten.

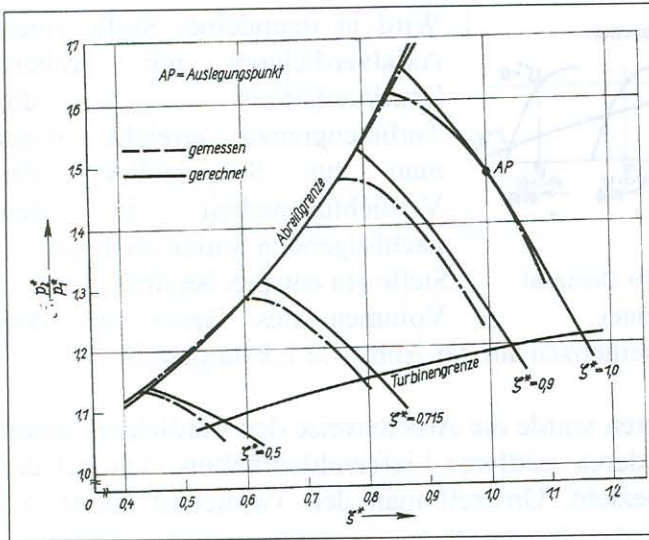


Abb.: 7.2.1.5 Kennfeld eines Modellverdichters /47/

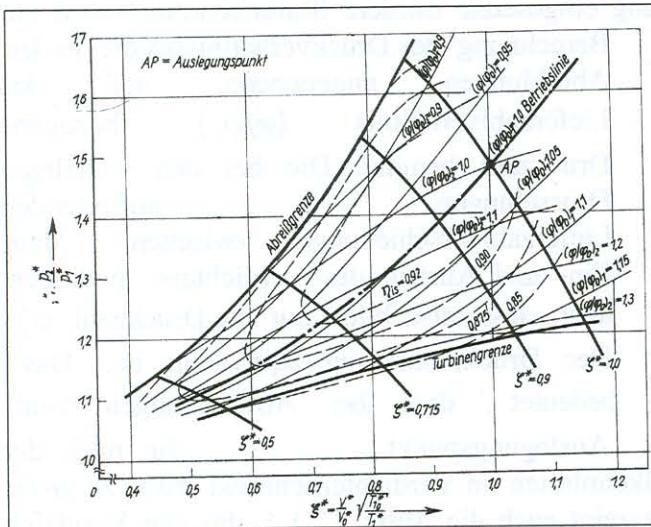


Abb.: 7.2.1.6 Theoretisches Kennfeld.

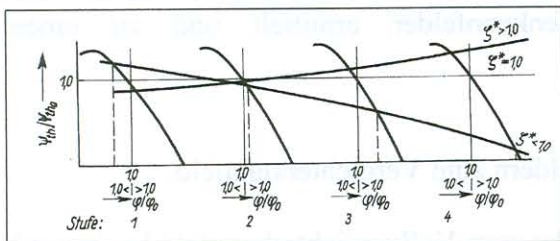


Abb.: 7.2.1.7 Lieferzahländerungen in den Verdichterstufen bei Veränderung der Drehzahl und konstanter Druckdrossel (entlang der Betriebslinie).

Obwohl in dieses Verfahren sehr große Näherungen eingeführt wurden, ist die Übereinstimmung befriedigend.

Die Abb.: 7.2.1.6 zeigt nochmals das Vollständige theoretische Kennfeld des genannten Versuchsverdichters, in denen die Linien  $\eta_{is} = \text{konst.}$  und die Linien  $(\varphi/\varphi_0) = \text{konst.}$  für den Ein- und Austritt des Verdichters eingetragen sind.

Verringert man, ausgehend vom Auslegungspunkt des Verdichters die Drehzahl des Verdichters, so Verringert sich das Lieferzahlverhältnis  $(\varphi/\varphi_0)_1$  am Eintritt des Verdichters gegenüber

dem Auslegungswert. Am Austritt des

Verdichters tritt dagegen eine Vergrößerung des Lieferzahlverhältnisses  $(\varphi/\varphi_0)_2$  gegenüber der Auslegung auf.

Da es sich hier um einen vierstufigen Axialverdichter handelt, lässt sich dieser Vorgang wie in Abb.: 7.2.1.7 darstellen.

Hier wird die Lieferzahländerung gegenüber dem Auslegungswert in Abhängigkeit von der Stufenzahl des Verdichters in Verbindung mit den Stufenkenndaten bei variabler Drehzahl entlang der Betriebslinie dargestellt. Es zeigt sich, dass besonders bei

Teildrehzahlen, also bei  $\zeta^* < 1,0$  eine stärkere Vergrößerung des Lieferzahlverhältnisses  $(\varphi/\varphi_0)_2$  am Austritt des Verdichters zu

erwarten ist Die erste Stufe des Verdichters wird dabei zu kleineren Werten von  $(\varphi/\varphi_0)_1$  gedrosselt. Diese mit der Volumenänderung des Gases im Verdichter zusammenhängenden Lieferzahländerungen sind um so größer, je größer das Auslegungsdruckverhältnis des jeweiligen Axialverdichters ist.

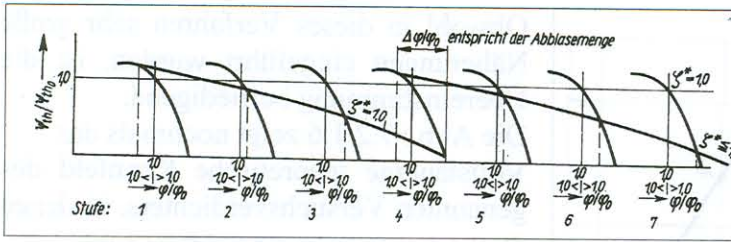
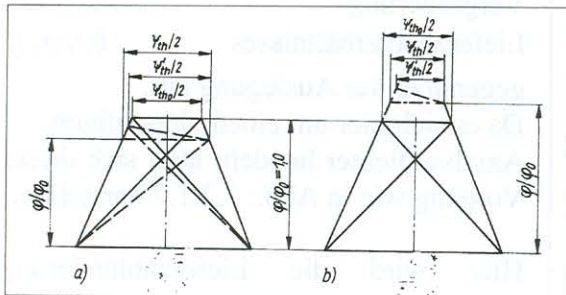


Abb.: 7.2.1.8 Lieferzahländerung bei Veränderung der Drehzahl und konstanter Druckdrossel (entlang der Betriebslinie). Dieser Vorgang ist schematisch auf der Abb.: 7.2.1.8 dargestellt.

Wird in irgendeiner Stufe eines Axialverdichters mit großem Druckverhältnis die Turbinengrenze erreicht, muss man zur Sicherstellung der Verdichtungsarbeit in den nachfolgenden Stufen an dieser Stelle ein entsprechendes Volumen des Gases aus den

Im dargelegten Kennfeldberechnungsverfahren wurde die Arbeitsweise des Verdichters durch eine mittlere Stufenkennlinie beschrieben deren mittleres Lieferzahlverhältnis sich auf die Werte am Eintritt der Verdichterstufen bezieht. Drosselt man den Verdichter (siehe A.: 7.2.1.6) auf der Linie  $\zeta^* = \text{konst.}$  von der Betriebslinie zu größeren oder kleineren Druckverhältnissen, so würde man mit den Lieferzahlverschiebungen nach Abb.: 7.2.1.7 Geschwindigkeitsvektordiagramme erhalten, wie sie auf den Abbildungen 7.2.1.9a und b dargestellt sind. Durch die in die Rechnung eingesetzte mittlere Stufenkennlinie wird zur



$$\pi > \pi_0; \zeta^* = 0,9 \quad \pi < \pi_0; \zeta^* = 0,9$$

Abb.: 7.2.1.9 Geschwindigkeitsdiagramme.

Die nach der angegebenen Methode ermittelten Drehzahlkennlinien im Verdichterkennfeld etwas zu große Druckverhältnisse angeben. Diese Tendenz zeigt auch die Abb.: 7.2.1.5, das den Vergleich zwischen den theoretischen und den auf dem Prüfstand ermittelten Kennfeldwerten des Versuchsverdichters wiedergibt. Die Tatsache der Lieferzahlverschiebung zwischen Ein- und Austritt eines Verdichters entlang der Drehzahlkurven  $\zeta^* = \text{konst.}$  sowie bei konstanter Austrittsdrosselung (entlang der Betriebslinie) beschränkt die Anwendbarkeit dieses Verfahrens auf Axialverdichter mit kleinen Druckverhältnissen. Verdichter mit großen Druckverhältnissen können in Stufen Gruppen, im Extremfall in Einzelstufen, unterteilt und die Stufen Gruppenkennfelder bzw. Einzelstufenkennfelder ermittelt und zu einem Gesamtkennfeld zusammengesetzt werden.

Berechnung des Druckverhältnisses die in den Abbildungen angegebene, auf das Lieferzahlverhältnis  $(\varphi/\varphi_0)_1$  bezogene Druckzahl benutzt. Die bei den jeweiligen Drosselungen auftretenden Lieferzahlverschiebungen zwischen dem Ein- und Austritt des Verdichters bedingen aber, dass tatsächlich nur die Druckzahl  $\psi'_{th}$  der Druckumsetzung äquivalent ist. Das bedeutet, dass bei Abweichungen vom

Auslegungspunkt

## 7.2.2 Zusammenfassung von Stufen Gruppenkennfeldern zum Verdichterkennfeld.

Die Zusammenfassung der Stufen Gruppenkennfelder zum Vollverdichterkennfeld beginnt mit der Wahl des Durchsatzkennwertes  $\zeta^*$  für die erste Stufen Gruppe. Da die Temperatur des Gases am Eintritt in diese Stufen Gruppe konstant vorausgesetzt werden kann gilt:

$$\zeta_1^* = \frac{V_1^*}{V_{10}^*} \quad 7.2.2.1$$

Zu den Wert  $\xi_1^*$  gehört das Druckverhältnis  $\pi_1^*$  und das Temperaturverhältnis  $\mathcal{G}_1^*$ .  
Für das Volumen am Austritt einer Stufengruppe gilt dann:

$$V_2^* = \frac{\dot{m}RT_2^*}{p_2^*} \quad \text{bzw.} \quad V_{20}^* = \frac{\dot{m}_0 RT_{20}^*}{p_{20}^*}$$

oder das Volumenverhältnis am Stufengruppenaustritt:

$$\frac{V_2^*}{V_1^*} = \frac{V_{20}^*}{V_{10}^*} = \frac{T_2^* p_1^* T_{10}^* p_{20}^*}{T_1^* p_2^* T_{20}^* p_{10}^*}$$

Verwendet man wieder die Kennwerte, erhält man:

$$\xi_{2I}^* = \frac{V_1^*}{V_{10}^*} \sqrt{\frac{T_{10}^*}{T_1^*}} \frac{\pi_{0I}^*}{\pi_1^*} \sqrt{\frac{\mathcal{G}_1^*}{\mathcal{G}_{0I}^*}} = \xi_{1I}^* \frac{\pi_{0I}^*}{\pi_1^*} \sqrt{\frac{\mathcal{G}_1^*}{\mathcal{G}_{0I}^*}} \quad 7.2.2.2$$

Dabei ist zu beachten, dass für die Stufengruppen folgender Zusammenhang besteht:

$$\xi_{1n}^* = \xi_{2(n-1)}^* \quad 7.2.2.3$$

wobei n die jeweilige Stufengruppe bedeutet. Mit Hilfe der Gl.: 7.2.2.2 kann man eine gleiche Umrechnung für die Drehzahlkennzahl vornehmen:

$$\zeta_{2I}^* = \zeta_{1I}^* \sqrt{\frac{\mathcal{G}_{0I}^*}{\mathcal{G}_1^*}} \quad 7.2.2.4$$

wobei wieder der Zusammenhang

$$\zeta_{1n}^* = \zeta_{2(n-1)}^* \quad 7.2.2.5$$

zu beachten ist.

Für das Druckverhältnis von n Stufengruppen gilt ab Eintritt in den Verdichter

$$\pi_n^* = \frac{p_{2I}^*}{p_{1I}^*} \frac{p_{2II}^*}{p_{1II}^*} \dots \frac{p_{2n}^*}{p_{1n}^*} = \frac{p_{2n}^*}{p_{1I}^*}$$

wobei wieder

$$p_{2n}^* = p_{1(n-1)}^* \quad 7.2.2.6$$

ist. Daraus erhält man unmittelbar:

$$\pi_n^* = \pi_{1I}^* \pi_{1II}^* \pi_{1III}^* \dots \pi_n^* \quad 7.2.2.7$$

Analog gilt für das Temperaturverhältnis:

$$\mathcal{G}_n^* = \mathcal{G}_{1I}^* \mathcal{G}_{1II}^* \mathcal{G}_{1III}^* \dots \mathcal{G}_n^* \quad 7.2.2.8$$

Damit erhält man für die Volumen Kennzahl einer beliebigen Stufengruppe n:

$$\xi_{1n}^* = \xi_{2(n-1)}^* = \xi_{1I}^* \frac{\pi_{0I}^*}{\pi_1^*} \frac{\pi_{0II}^*}{\pi_{II}^*} \dots \frac{\pi_{0(n-1)}^*}{\pi_{(n-1)}^*} \sqrt{\frac{\mathcal{G}_1^*}{\mathcal{G}_{0I}^*} \frac{\mathcal{G}_{II}^*}{\mathcal{G}_{0II}^*} \dots \frac{\mathcal{G}_{(n-1)}^*}{\mathcal{G}_{0(n-1)}^*}} \quad 7.2.2.9$$

oder:

$$\xi_{1n}^* = \xi_{2(n-1)}^* = \xi_{1I}^* \frac{\pi_{ges(n-1)}^*}{\pi_{ges(n-1)}^*} \sqrt{\frac{\mathcal{G}_{ges(n-1)}^*}{\mathcal{G}_{0ges(n-1)}^*}} \quad 7.2.2.10$$

Nehmen wir an, in der letzten Stufe der ersten Stufengruppe sei die Turbinengrenze erreicht und es soll zur Sicherstellung der Verdichterarbeit in der zweiten Stufengruppe vor dieser eine Abblasestelle für das Gas vorgesehen werden. Dann kann geschrieben werden:

$$\dot{m}_{II} = \dot{m}_I \frac{V_{1soll}}{V_{1list}}$$

Aus der Gl.: 7.2.2.2 der ersten Stufengruppe erhält man:

$$V_{1soll}^* = \xi_{1soll}^* V_{10I}^* \sqrt{\frac{g_{0I}^*}{g_I^*} \frac{\pi_{0I}^*}{\pi_I^*}}$$

und

$$V_{1Ist}^* = \xi_{2Ist}^* V_{10I}^* \sqrt{\frac{g_{0I}^*}{g_I^*} \frac{\pi_{0I}^*}{\pi_I^*}}$$

Da am Eintritt in die erste Stufengruppe die beiden Beziehungen in jedem Falle gleich sind, ergibt sich mit

$$\frac{V_{1soll}^*}{V_{1Ist}^*} = \frac{\xi_{2Ist}^*}{\xi_{1Ist}^*} = \frac{\xi_{1soll}^*}{\xi_{1Ist}^*}$$

oder

$$\dot{m}_{II} = \dot{m}_I \frac{\xi_{1soll}^*}{\xi_{1Ist}^*} = \dot{m}_0 \xi_{1I}^* \frac{\xi_{1soll}^*}{\xi_{1Ist}^*}$$

Die abzublasende Gasmasse ist dann:

$$\Delta \dot{m} = \dot{m}_I - \dot{m}_{II}$$

Für die Weiterrechnung sind die Sollwerte  $\pi_{1soll}^*$ ;  $g_{1soll}^*$  und  $\xi_{1soll}^*$  der zweiten Stufengruppe einzusetzen.

Der Rechengang beim Abblasen einer Gasmasse nach einer anderen folgenden Stufengruppe ist hierzu analog.

### 7.2.3 Die Kennfeldberechnung unter Berücksichtigung der Leitgitterverstellung und Gasabblasing.

Wie auch bei allen anderen Gitterberechnungsverfahren geht auch diese Methode von den Parameter an den Mittelschnitten der einzelnen Stufen eines Verdichters aus. Dadurch gelten auch hier die im Abschnitt 7.2.1 gemachten Einschränkungen. Dem Verfahren liegen die experimentellen Gesetzmäßigkeiten des Verhaltens von Profilvergittern bei Abweichungen von der aerodynamisch stoßfreien Anströmung der Profilvergitterreihe Q 40 zugrunde wobei von der zulässigen Stoßwinkeländerung an den Gitterprofilen ausgegangen wird.

#### 7.2.3.1 Der zulässige Gitterstoß.

Die zulässige Stoßwinkeländerung bei der Anströmung von Profilvergittern kann an Hand der Ablenkungseigenschaften dieser Gitter bestimmt werden. Die Abb.: 6.4.2.2 zeigt die Abhängigkeit

$$\frac{\Delta i}{\Delta \beta_0} = f\left(\frac{c_{wp}}{c_{wpo}}; \Theta_0\right)$$

für eine inkompressible Strömung mit den Parameter

$$\Theta_0 = \Theta - \left(\frac{t}{l} - 0,8\right) 8,5 - (\beta_T - 60) 0,1 \quad 7.2.3.1.1$$



wobei  $\Theta$  der Wölbungswinkel der Profile ist. Da die dreidimensionale Erfassung der Strömungsvorgänge in der Verdichterstufe nicht möglich ist, wird dieses Verfahren wie auch bei allen anderen bekannten Methoden auf den mittleren Radius der Stufen angewendet. Aus diesem Grunde soll die zulässige Stoßwinkeländerung beim doppelten Profilwiderstand minus 20% Sicherheit festgelegt werden. Dann gilt:

$$\Delta i_{\max} = 0,8 \Delta \beta_0 f \left( \frac{c_{wp}}{c_{wp0}} = 2; \Theta_0 \right) \quad 7.2.3.1.2$$

Zur Bestimmung der inkompressiblen Werte

$$\frac{c_{wp}}{c_{wp0}} = 2$$

entsprechend der Abb.: 6.4.2.2 muss, da nur der Wert  $c_{wp0}$  der kompressiblen Strömung aus der Auslegungsrechnung der Verdichterstufen bekannt ist, die obige Gleichung in der Form

$$\frac{c_{wpink}}{c_{wp0ink}} \frac{c_{wp}}{c_{wpink}} \frac{c_{wp0ink}}{c_{wp0}} = 2$$

erweitert werden. Daraus ergibt sich:

$$\left( \frac{c_w}{c_{wp0}} \right)_{ink} = 2 \frac{c_{wp0} / c_{wp0ink}}{c_{wp} / c_{wpink}} \quad 7.2.3.1.3$$

wobei

$$\frac{c_{wp}}{c_{wpink}} = f \left( M_1 / M'_{1kr} \right) \quad \text{und} \quad \frac{c_{wp0}}{c_{wp0ink}} = f \left( M_{10} / M'_{10kr} \right)$$

der Abb.: 6.4.2.2 entnommen werden kann. Dabei ist  $M_1$  die Anströmmachzahl und  $M'_{1kr}$  jene kritische Machzahl der Gitterprofile, bei der das örtliche Überschallgebiet auf den Profilen durch einen Verdichtungsstoß geschlossen wird und Grenzschichtablösung auftritt. Zur Bestimmung des Verhältnisses der Widerstandsbeiwerte nach Gl.: 7.2.3.1.3 müssen die Anströmmachzahlen für den Berechnungspunkt bekannt sein.

Verwirklicht man den maximal zulässigen Stoß am Laufgitter, so gilt für den Anströmwinkel

$$\beta_1 = \beta_{10} + \Delta i_{\max} \quad 7.2.3.1.4$$

Dabei kann für  $\Delta i_{\max}$  zunächst der inkompressible Wert als Näherung benutzt werden.

Da die Summe der Winkel in einem schiefwinkligen Dreieck immer 180 Grad ist, folgt für den dritten Winkel des Geschwindigkeitsvektordiagramms

$$\gamma_1 = 180 - (\beta_1 + \alpha_1)$$

Der Winkel  $\alpha_1$  setzt sich aus dem Abströmwinkel des Vorleitgitters bei der Auslegungsstellung und dem Verstellwinkel zusammen.

$$\alpha_1 = \alpha_{10} + \Delta \alpha_V \quad 7.2.3.1.5$$

Dabei werden geringfügige Abweichungen des Abströmwinkels bei Falschanströmungen des Leitgitters vernachlässigt. Diese Leitschaufelverstellung gilt für die erste Stufe der gewählten Verstellwinkel des Vorleitgitters. Für die folgenden Stufen kann man ihn vorläufig genügend genau bestimmen, wenn man die gewählte Gesamtverstellung linear auf alle zu verstellenden Leitgitter aufteilt. Es ist dann:

$$\Delta \alpha_V \approx \frac{\Delta \alpha_{VV}}{z_V} (z_V - n) \quad 7.2.3.1.6$$

Dabei gilt:

$\Delta\alpha_{VV}$  = Verstellwinkel des Vorleitgitters

$z_V$  = Anzahl der zu verstellenden Leitgitter  
(einschließlich Vorleitgitter)

$n$  = Rechnungsstufe

An dieser Stelle sei bemerkt, dass bei der Leitgitterverstellung die Anwendung der Gl.:7.2.3.1.1 auf die verstellten Leitgitter mit den Staffelungswinkel

$$\beta_T = \beta_{T0} \pm \Delta\alpha_V$$

zu erfolgen hat. Für die Vorzeichen gilt:

+ Leitgitter um  $\Delta\alpha_V$  aufgedreht

- Leitgitter um  $\Delta\alpha_V$  zuge dreht.

Nach den Sinussatz des schiefwinkligen Dreieckes erhält man:

$$\frac{w_1}{u} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_1}$$

oder mit

$$u = u_0 \frac{u}{u_0} = u_0 \zeta_{1l}^* \quad 7.2.3.1.7$$

$$w_1 = u_0 \zeta_{1l}^* \frac{\sin \alpha_1}{\sin \gamma_1} \quad 7.2.3.1.8$$

und für die Absolutgeschwindigkeit:

$$c_1 = u_0 \zeta_{1l}^* \frac{\sin \beta_1}{\sin \gamma_1} \quad 7.2.3.1.9$$

Die Anströmmachzahl des Laufgitters ist dann:

$$M_{w1} = \frac{w_1}{\sqrt{\kappa R T_1^* - \frac{\kappa - 1}{22} c_1^2}} \quad 7.2.3.1.10$$

Die kritische Machzahl wird nach Abb.: 6.4.1.1 durch den Einfluss des veränderten Eintrittsstoßes korrigiert.

$$M'_{kr,korr} = M'_{kr0} \frac{M'_{kr}}{M'_{kr(i=0)}} \quad 7.2.3.1.11$$

Für  $M'_{kr0}$  kann dabei der Auslegungswert genommen werden. Der zulässige Stoß muss sowohl druck- ( $+\Delta i_{\max}$ ) als auch saugseitig ( $-\Delta i_{\max}$ ) bestimmt werden und gibt somit die Grenzen des Verstellbereiches der Leitgitterprofile an.

Eine Kennlinie konstanter Drehzahl bei unverstellten Leitgittern erhält man, wenn man die Durchrechnung für eine Anzahl gewählter Stoßwinkel  $\pm \Delta i_{\max}$  durchführt.

Der Anströmwinkel des ersten Laufgitters ist dann:

$$\beta_1 = \beta_{10} - \Delta i \quad 7.2.3.1.12$$

wobei  $\Delta i$  positiv oder negativ sein kann. Aus der Geometrie des Geschwindigkeitsdreieckes lässt sich die Lieferzahl angeben:

$$\varphi_{1l} = \frac{\tan \beta_1}{1 + \frac{\tan \beta_1}{\tan \alpha_{10}}} \quad 7.2.3.1.13$$

Für die folgenden Gitter ergibt sich der Zuströmwinkel mit den aus der Durchrechnung bekannten Lieferzahlen mit

$$\frac{w_1}{u} = \frac{\varphi_1}{\sin \beta_1} \quad \text{und} \quad \frac{c_1}{u} = \frac{\varphi_1}{\sin \alpha_1}$$

zu:

$$\tan \beta_1 = \frac{\varphi_1}{1 - \frac{c_1}{u} \cos \varphi_1} = \frac{\varphi_1}{1 - \frac{\varphi_1}{\tan \alpha_1}}$$

bzw.

$$\tan \beta_1 = \frac{\varphi_1 = \varphi_{3(n-1)}}{1 - \frac{\varphi_1}{\tan \alpha_{10}}} \quad 7.2.3.1.14$$

An dieser Stelle soll kontrolliert werden, ob der auftretende Stoßwinkel noch in den zulässigen Grenzen liegt.

$$\Delta i = \beta_{10} - \beta_1$$

Bei Leitgitterverstellung werden zwecks maximaler Drucksteigerung in den Stufen die Laufgitter, denen ein verstelltes Leitgitter vorausgeht, im allgemeinen mit den maximal zulässigen Stoßwinkel  $\Delta i_{\max}$  (+ bei Unterdrehzahlen und - bei Überdrehzahlen) angeströmt werden. In diesem Falle gilt:

$$\beta_1 = \beta_{10} - \Delta i_{\max} \quad 7.2.3.1.15$$

Der Abströmwinkel des vorhergehenden Leitgitters ist:

$$\alpha_{1V} = \alpha_{10} - \Delta \alpha_V \quad 7.2.3.1.16$$

wobei der Verstellwinkel des betreffenden Leitgitters durch die Beziehung 7.2.3.1.6 bestimmt wurde. Analog zu Gl.: 7.2.3.1.13 ist die Lieferzahl der ersten Stufe

$$\varphi_{1I} = \frac{\tan \beta_1}{1 + \frac{\tan \beta_1}{\tan \alpha_{1V}}} \quad 7.2.3.1.17$$

Unabhängig davon ob die Leitgitterverstellung angewendet wird oder nicht, erhält man in beiden Fällen den Abströmwinkel des Laufgitters aus der Änderung der Umlenkeigenschaften der Gitter bei Stoßanströmung nach Abb.: 6.4.2.1.

$$\Delta \beta = \Delta \beta_0 \left[ f \left( \frac{\Delta i}{\Delta \beta_0}; \Theta_0 \right) - \left( \frac{\Delta i}{\Delta \beta_0} \right) K_f \left( \frac{t}{l} \right) \right] \quad 7.2.3.1.18$$

zu

$$\beta_2 = \beta_1 + \Delta \beta \quad 7.2.3.1.19$$

Mit

$$c_1 = \frac{\varphi_1}{\sin \alpha_1} u \quad 7.2.3.1.20$$

ergibt sich die Machzahl der Absolutgeschwindigkeit des Gases am ersten Laufgitter.

$$M_{c1} = \frac{c_1}{\sqrt{\kappa R T_1^* - \frac{\kappa - 1}{2} c_1^2}} \quad 7.2.3.1.21$$

Für alle nachfolgenden Stufen gilt:

$$M_{c1n} = M_{c3(n-1)} \quad 7.2.3.1.22$$

Aus dem Verhältnis

$$\frac{M_{w1}}{M_{c1}} = \frac{w_1}{c_1} \frac{a}{a} = \frac{\varphi_1}{\sin \beta_1} \frac{\sin \alpha_1}{\varphi_1}$$

lässt sich die relative Anströmmachzahl für das Laufgitter zu

$$M_{w1} = M_{c1} \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} \quad 7.2.3.1.23$$

ermitteln.

### 7.2.3.2 Der Gitterverlust.

Bei der Bestimmung des Profilwiderstandsbeiwertes im Auslegungspunkt bei inkompressibler Strömung geht man von vorhandenen Versuchsunterlagen aus. Nach Abschnitt 4.1 Gl.: 4.1.2 Lässt sich der Profilwiderstandsbeiwert nach der Beziehung

$$c_{w\text{pink}} = 0,01326 + \left[ 0,086 \left( \frac{c_\Gamma}{t/l} \right) - 0,0127 \right]^2 + \left[ 0,125 \frac{t}{l} - 0,116 \right]^2 \quad 7.2.3.2.1$$

bestimmen. Dabei ist

$$\frac{c_\Gamma}{t/l} = \frac{2\Delta w_u}{w_\infty} = \frac{2(\cot \alpha n \beta_1 - \cot \alpha n \beta_2)}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(\cot \alpha n \beta_1 + \cot \alpha n \beta_2)^2}} \quad 7.2.3.2.2$$

die inkompressible Belastungszahl der Profilhintergitter. Der Wert der Gl.: 7.2.3.2.1 wird von dem, in jedem Rechnungspunkt unterschiedlichen, von der Reynoldszahl abhängigen Rauigkeitsfaktor  $\chi_p$  (siehe Abb.: 6.4.1.7) beeinflusst.

$$\chi_p = f\left(\text{Re}; \frac{K_s}{l}\right) \quad 7.2.3.2.3$$

wobei mit guter Näherung für die absolute Rauigkeit Profiloberfläche  $K_s = 0,015 \text{ mm}$  gesetzt werden kann und  $l$  die Profilhintergitterlänge bedeutet. Für die Reynoldszahl gilt

$$\text{Re}_p = \frac{w_\infty l}{\nu'} \quad 7.2.3.2.4$$

mit

$$\frac{w_\infty}{u} = \frac{\varphi_1}{\sin \beta_\infty} = \varphi_1 \sqrt{1 + \frac{1}{4}(\cot \alpha n \beta_1 + \cot \alpha n \beta_2)^2} \quad 7.2.3.2.5$$

Die kinematische Zähigkeit für Luft kann genügend genau durch

$$\nu' = 1,766 * 10^{-5} \frac{T^{*2}}{p^*} \left[ \frac{0 \text{ K}}{N/m^2} \right] \quad 7.2.3.2.6$$

ermittelt werden.

Den Einfluss der Stoßanströmung des Profilhintergitters berücksichtigt die Abb.: 6.4.2.2. Im Rechnungspunkt erhält man den inkompressiblen Profilwiderstand zu:

$$c_{w\text{pink}} = c_{wP0\text{ink}} \chi_p \left( \frac{c_{wP}}{c_{wP0}} \right)_{\text{ink}} \quad 7.2.3.2.7$$

Der Einfluss der Kompressibilität wird über die kritische Machzahl nach Abb.: 6.4.1.2

$$M'_{kr0} = f\left(c_\Gamma; d/l\right)$$

korrigiert mit den Abbildungen 6.4.1.3 und 6.4.1.4

$$\frac{M'_{kr}}{M'_{kr\left(\frac{x_f}{l}\right)}} = f\left(\frac{x_f}{l}\right)$$

$$\frac{M'_{kr}}{M'_{kr\left(\frac{d}{l}\right)}} = f\left(\frac{x_d}{l}\right)$$

bestimmt. Es ist dann:

$$M'_{kr} = f\left(c_\Gamma; d/l\right) f\left(\frac{x_f}{l}\right) f\left(\frac{x_d}{l}\right) \quad 7.2.3.2.8$$

Diese kritische Machzahl wird am Rechnungspunkt durch die jeweilige Stoßanströmung beeinflusst. Nach Abb.: 6.4.1.5 ist

$$\frac{M'_{kr}}{M'_{kr(i=0)}} = f(\Delta i)$$

und somit

$$M'_{kr,korr} = M'_{kr0} f(\Delta i) \quad 7.2.3.2.9$$

Mit dieser kritischen Machzahl ergibt sich das Verhältnis

$$\frac{M_{w1}}{M'_{kr,korr}}$$

und über die Abhängigkeit der Gleichung

$$\frac{c_{wP}}{c_{wPink}} = f\left(\frac{M_{w1}}{M'_{kr,korr}}\right)$$

nach Abb.: 6.4.1.1 der kompressible Profilwiderstandsbeiwert

$$c_{wP} = c_{wPink} \frac{c_{wP}}{c_{wPink}} \quad 7.2.3.2.10$$

Der über die Schaufelhöhe gemittelte Randverlust ist nach Abschnitt 4.2 durch die Gleichung

$$\bar{\xi}_{VR} = 0,4 \left[ \left( 0,0293 \cos \beta_\infty - 0,004 \right) \left( \frac{c_\Gamma}{t/l} \right)^{(0,275 \cos \beta_\infty + 2)} + 0,018 \right] \quad 7.2.3.2.11$$

gegeben. Dabei kann  $\frac{c_\Gamma}{t/l}$  durch Gl.: 7.2.3.2.2 und der Cosinus des Winkels  $\beta_\infty$

näherungsweise aus der Gl.: 7.2.3.2.5 ermittelt werden. Mit den Widerstandsbeiwert steht dieser Ausdruck nach Gl.: 3.6.12 in folgenden Zusammenhang:

$$c_{wR} = \bar{\xi}_{VR} \frac{t \sin^3 \beta_\infty}{l \sin^2 \beta_1} \quad 7.2.3.2.12$$

Der gesamte Widerstandsbeiwert ergibt sich dann aus den Anteilen zu:

$$c_{wges} = c_{wP} + c_{wR} \quad 7.2.3.2.13$$

Um den Einfluss möglicher unterschiedlicher Berechnungsmethoden bei der Bestimmung der Verluste oder den Einfluss sonstiger Korrekturwerte bei der Auslegung eines Verdichters

Auszuschalten, wird dieser Widerstandsbeiwert zum Widerstandsbeiwert  $c_{wA}$  der Kennfeldrechnung am Auslegungspunkt korrigiert.

$$c_w = c_{wges} \frac{c_{wA}}{c_{w0}} \quad 7.2.3.2.14$$

Mit dieser Maßnahme wird in jedem Falle im Kennfeldauslegungspunkt der projektierte Auslegungspunkt erreicht.

Den bei der Projektierung benutzten Widerstandsbeiwert erhält man dabei aus der Umstellung der Gleichung 3.4.3 zu:

$$c_{wA} = \frac{(1 - \eta_{St}) \psi_{thR}}{\frac{\varphi_{\infty 0R}^2}{\sin^3 \beta_{\infty 0} \left(\frac{t}{l}\right)_R} + \frac{\varphi_{\infty 0St}^2}{\sin^3 \alpha_{\infty 0} \left(\frac{t}{l}\right)_{St}}} \quad 7.2.3.2.15$$

Für den in der späteren Rechnung benutzten Verlustbeiwert und den Widerstandsbeiwert der Gleichung 7.2.3.2.12 folgenden Zusammenhang:

$$\xi_V = \frac{c_w}{\left(\frac{t}{l}\right) \sin \beta_{\infty}} \left( \frac{\sin \beta}{\sin \beta_{\infty}} \right)^2 \quad 7.2.3.2.16$$

Um für die Programmierung eines Rechenautomaten möglichst wenig Eingabewerte zu erhalten, werden die zugehörigen Winkel für den Auslegungspunkt in einer Vorrechnung ermittelt. Dazu sind die kinematischen Kenngrößen  $\psi_{th0}; \varphi_0; \rho_{k0}$  und Gitterkennwerte aus der Auslegungsrechnung eines Verdichters bekannt.

### 7.2.3.3 Die eigentliche Kennfeldrechnung.

Nach den Ausführungen über den zulässigen Gitterstoß und den Widerstandsbeiwerten der Profilvergitter kann man nun zu der eigentlichen Kennfeldermittlung übergehen.

Die Verlustziffer des Laufgitters wirkt sich beim Durchgang des Gases durch das Profilvergitter in eine Absenkung des Druckes im Relativsystem aus (siehe auch Abb.: 3.6.1).

$$\xi_V = \frac{2(p_{2rel,is}^* - p_{2rel}^*)}{\rho_{1rel} w_1^2} = \frac{2 \left( 1 - \frac{p_{2rel}^*}{p_{2rel,is}^*} \right)}{\kappa \frac{p_{1rel}}{p_{1rel}^*} \frac{p_{1rel}^*}{p_{2rel,is}^*} \frac{w_1^2}{\kappa \left( \frac{p_{1rel}}{\rho_{1rel}} \right)}} = \frac{2 \left( 1 - \frac{p_{2rel}^*}{p_{2rel,is}^*} \right)}{\kappa \frac{p_{1rel}}{p_{1rel}^*} M_{w1}^2}$$

Aus der Beziehung wird:

$$\frac{p_{2rel}^*}{p_{2rel,is}^*} = 1 - \xi_V \frac{\kappa}{2} \frac{p_{1rel}}{p_{1rel}^*} M_{w1}^2$$

Mit

$$\frac{p_{1rel}^*}{p_{2rel}^*} = \frac{p_{1rel}^* T_{2rel}^*}{p_{2rel}^* T_{1rel}^*} = \frac{p_{1rel}^* / p_{2rel,is}^*}{p_{2rel}^* / p_{2rel,is}^*} = \frac{p_{2rel}^*}{p_{2rel}^*} = \frac{1}{\pi_V}$$

und

$$\frac{p_{1rel}^*}{p_{1rel}} = \left( 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_{w1}^2 \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$

Folgt das Verlustdruckverhältnis des Laufgitters

$$\pi_V = 1 - \xi_V \frac{\kappa}{2} \frac{M_{w1}^2}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \quad 7.2.3.3.1$$

Diese Beziehung ist mit der Gl.:3.6.11 identisch.

Der Übergang von der Ebene vor dem Laufgitter zur Ebene hinter dem Laufgitter findet man über die Kontinuitätsbeziehung.

$$\rho_1 c_{ax1} F_1 = \rho_2 c_{ax2} F_2$$

oder mit

$$c_{ax} = w \sin \beta$$

$$\rho_{1rel} w_1 \sin \beta_1 F_1 = \rho_{2rel} w_2 \sin \beta_2 F_2$$

$$\rho_{2rel} w_2 = \rho_{1rel} w_1 \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} \frac{F_1}{F_2}$$

erweitert man diese Gleichung

$$\frac{\rho_{2rel} w_2}{\rho_{2rel}^* a_{2rel}^*} = \frac{\rho_{1rel} w_1}{\rho_{1rel}^* a_{1rel}^*} \frac{\rho_{1rel}^* a_{1rel}^*}{\rho_{2rel}^* a_{2rel}^*} \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \frac{F_1}{F_2}$$

so wird mit

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{w}{w^*} \quad \text{und} \quad M^* = \frac{w^*}{a^*}$$

$$M_{w2}^* = M_{w1}^* \frac{\rho_{1rel}^* \sin \beta_1}{\rho_{2rel}^* \sin \beta_2} \frac{F_1}{F_2}$$

Da aber  $\frac{\rho_{1rel}^*}{\rho_{2rel}^*} = \frac{1}{\pi_V}$  ist, ergibt sich:

$$M_{w2}^* = M_{w1}^* \frac{\sin \beta_1}{\pi_V} \frac{\sin \beta_2}{F_2} \frac{F_1}{F_2} \quad 7.2.3.3.2$$

Um genauere Rechenwerte zu erhalten, insbesondere bei Rechnungen mit einem Rechenautomaten, geht man zweckmäßig nicht von dem tatsächlichen Flächenverhältnis  $F_1/F_2$  des Verdichterkanals aus, sondern ermittelt sich den Wert mit Hilfe der bekannten Auslegungsparameter  $\varphi_0, \psi_{th0}, u_0$  und  $\rho_{k0}$  in einer Vorrechnung durch Umkehrung obiger Beziehung zu:

$$\frac{F_1}{F_2} = \pi_{V0} \frac{\sin \beta_{20}}{\sin \beta_{10}} \frac{M_{w20}^*}{M_{w10}^*} \quad 7.2.3.3.3$$

Der Zusammenhang zwischen der inkompressiblen Gesamtmachzahl  $M_w^* = w^*/a^*$  und der Machzahl  $M = w/a$  ist durch die gasdynamische Beziehung

$$M^* = \frac{M}{\sqrt{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}} \quad 7.2.3.3.4$$

gegeben. Diese Beziehung ist nicht umkehrbar. Aus diesem Grunde muss nach der Rechnung in der Ebene hinter dem Laufgitter  $M_{w2}$  aus  $M_{w2}^*$  entweder aus einem Diagramm abgelesen

oder durch Iteration ermittelt werden. Ist die Machzahl  $M_{w2}$  hinter dem Laufgitter bekannt, so lässt sich auch die Lieferzahl am Gitteraustritt bestimmen.

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{w_2 \sin \beta_2}{w_1 \sin \beta_1} = \frac{M_{w2} a_2 \sin \beta_2}{M_{w1} a_1 \sin \beta_1}$$

Da  $\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{\kappa R T_2}{\kappa R T_1}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$  ist folgt mit  $T_{1rel}^* = T_{2rel}^*$

$$\frac{a_2}{a_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_2^*} \frac{T_1^*}{T_1}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w2}^2}}$$

oder für die Lieferzahl am Gitteraustritt:

$$\varphi_2 = \varphi_1 \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} \frac{M_{w2}}{M_{w1}} \sqrt{\frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w2}^2}} \quad 7.2.3.3.5$$

Über die Absolutmachzahl am Austritt des Gitters kann auf die Temperaturerhöhung des Gases im Laufgitter geschlossen werden. Nach dem Geschwindigkeitsdiagramm gilt:

$$\frac{M_{c2}}{M_{w2}} = \frac{c_2}{w_2} = \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_2}$$

und auch

$$\tan \alpha_2 = \frac{\varphi_2}{1 - \frac{c_{u2}}{u}} = \frac{\varphi_2}{1 - \frac{\varphi_2}{\tan \beta_2}} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi_2} - \frac{1}{\tan \beta_2}}$$

Nun ist aber

$$\sin \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{1}{\varphi_2} - \frac{1}{\tan \beta_2} \right)^2}}$$

und somit die Absolutmachzahl am Gitteraustritt:

$$M_{c2} = M_{c1} \sin \beta_1 \sqrt{1 + \left( \frac{1}{\varphi_2} - \frac{1}{\tan \beta_2} \right)^2} \quad 7.2.3.3.6$$

Mit Hilfe der bekannten Machzahlen  $M_{c1}; M_{w1}; M_{w2}$  und  $M_{c2}$  lässt sich nun die Temperaturerhöhung des Gases im Laufgitter bestimmen.

$$g_{2G}^* = \frac{T_2^*}{T_1^*} = \frac{T_2^*}{T_2} \frac{T_2}{T_2^*} \frac{T_{1rel}^*}{T_1} \frac{T_1}{T_1^*}$$

Über die gasdynamische Beziehung

$$\frac{T}{T^*} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2}$$

wird dann:



$$\mathcal{G}_{2G}^* = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{c2}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{c1}^2} \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w1}^2}{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{w2}^2} \quad 7.2.3.3.7$$

Für das Temperaturverhältnis vom Eintritt in den Verdichter bis zur betrachteten Stufe gilt:

$$\mathcal{G}_{2n}^* = \mathcal{G}_{3(n-1)}^* \mathcal{G}_{2G}^* \quad 7.2.3.3.8$$

Das Temperaturverhältnis am Eintritt des Verdichters ist

$$\mathcal{G}_{1l}^* = 1,0$$

Für das Leitgitter gilt, da hier keine Temperaturerhöhung des Gases vorhanden ist:

$$\mathcal{G}_{3G}^* = 1,0 \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_{3n}^* = \mathcal{G}_{2n}^*$$

Die Druckerhöhung im Laufgitter ergibt sich aus:

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{p_2}{p_2} \frac{p_2}{p_{2rel}^*} \frac{p_{2rel}^*}{p_{2relis}^*} \frac{p_{1rel}^*}{p_1} \frac{p_1}{p_1^*} \quad 7.2.3.3.9$$

Da

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}} \quad \text{und} \quad \frac{p_{2rel}^*}{p_{2relis}^*} = \pi_V^*$$

ist folgt auch:

$$\pi_{2G}^* = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \mathcal{G}_{2n}^{*\frac{\kappa}{\kappa-1}} \pi_V^* \quad 7.2.3.3.10$$

Analog zur Temperaturerhöhung gilt wieder:

$$\pi_{2n}^* = \pi_{3(n-1)}^* \pi_{2G}^* \quad 7.2.3.3.11$$

und

$$\pi_{1l}^* = 1,0$$

Da im Leitgitter nur ein Druckverlust auftreten kann ist:

$$\pi_{3G}^* = \pi_{2G}^* \pi_V^* \quad 7.2.3.3.12$$

Die Auftragung des Werte für das Druckverhältnis erfolgt in einem Kennfeld über die Durchsatzkennzahl der ersten Stufe eines Verdichters nach der Beziehung 7.1.8. Für den Eintritt in das Laufgitter gilt:

$$V_1^* = c_{\alpha}^* F = c_1^* \sin \alpha_1 F$$

oder

$$\frac{V_1^*}{V_{10}^*} = \frac{c_1^* \sin \alpha_1}{c_{10}^* \sin \alpha_{10}} = \frac{M_{c1}^* \sin \alpha_1}{M_{c10}^* \sin \alpha_{10}}$$

oder mit der Gl.:7.1.3.3.4

$$\xi_1^* = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_{10}} \frac{M_{c1}}{M_{c10}} \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{c10}^2\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}{\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} M_{c1}^2\right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}}}} \quad 7.2.3.3.13$$

Werden die Leitkränze nicht verstellt, gilt:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_{10}} = 1,0$$

Die Durchrechnung der einzelnen Kennfeldpunkte erfolgt auf den Linien konstanter Drehzahlen

$$\zeta_1^* = \frac{n}{n_0} \sqrt{\frac{T_0^*}{T^*}} \quad 7.2.3.3.14$$

die als Eingangswerte gewählt werden.

Für den Wirkungsgrad des Verdichters in irgendeinem Kennfeldpunkt gilt die bekannte Gleichung

$$\eta_{is} = \frac{\pi_n^{*\kappa} - 1}{\mathcal{G}_n^* - 1} \quad 7.2.3.3.15$$

Zur Bestimmung des Stufenwirkungsgrades müssen statt  $\pi_n^*$  und  $\mathcal{G}_n^*$  die Werte für  $\pi_{3G}^*$  und  $\mathcal{G}_{3G}^*$  eingesetzt werden.

Die mit den Formelzeichen für das Laufgitter angegebenen Gleichungen gelten auch für das Leitgitter wenn hierfür nicht besondere Beziehungen angegeben sind.

Wendet man bei der Regelung eines Verdichters die Leitgitterverstellung an, so wird das Laufgitter nach den angegebenen Gleichungen an der Abreisgrenze bei Unterdrehzahlen mit maximalem Bauchstoß und bei Überdrehzahlen mit maximalem Rückenstoß angeströmt. Aus Wirkungsgradgründen kann es mitunter zweckmäßig sein, nicht den maximal zulässigen Stoßwinkel anzuwenden. Die Gleichung 7.2.3.1.15 geht dann über in

$$\beta_1 = \beta_{10} - \Delta i$$

wobei ein nach Abb.: 6.4.2.2 für die jeweilige Stufe zweckmäßiger Stoßwinkel eingesetzt wird. Macht sich eine Abblaseung des Gases im Teillastzustand eines Verdichters in irgendeiner Stufe notwendig, so wird das gleiche Verfahren wie es in Zusammenhang mit der Abb.: 7.2.1.8 besprochen wurde angewendet.

## **8. Einige Gesichtspunkte zur Konstruktion des Verdichters.**

In den Betrachtungen der bisherigen Abschnitte ergaben sich Gesichtspunkte die einen unmittelbaren Einfluss auf die Verdichterkonstruktion haben. Als solche sind zu nennen:

- Die Gestaltung des Laufgitters unter Berücksichtigung des Ausgleiches der an den Profilen durch Luft- und Fliehkräfte hervorgerufenen Momente.
- Die Bestimmung des Abblasequerschnittes im Verdichtergehäuse bei Bandabblaseung.
- Druckmittelpunkt und Drehmoment der Leitgitterprofile bei Verstellung.
- Der Axialschubausgleich.

Die Thematik des ersten Anstriches wurde bereits im Abschnitt 6.6 behandelt.

### **8.1 Die Bestimmung des Abblasequerschnittes im Verdichtergehäuse bei Bandabblaseung.**

Soll das Betriebsverhalten eines Axialverdichters durch Abblasen einer bestimmten Menge Des Gases nach einer bestimmten Anzahl von Stufen verbessert werden , so müssen zur

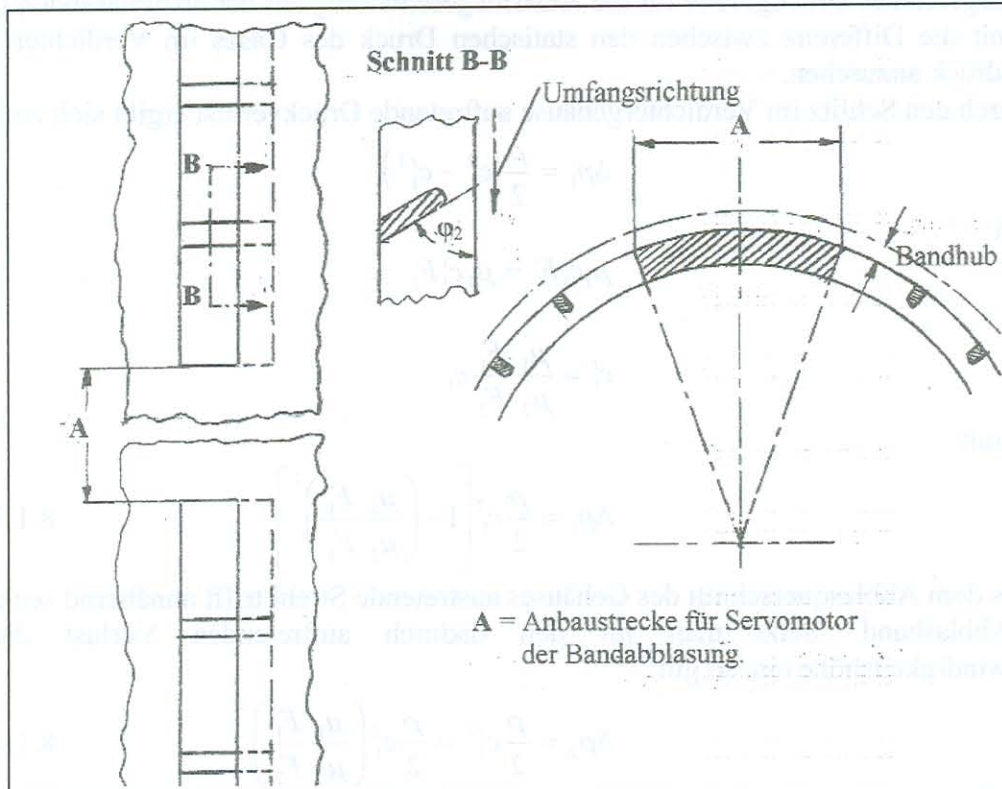
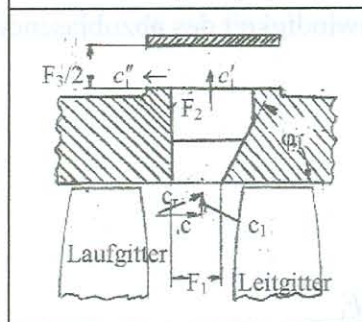


Abb.: 8.1.1 Schematische Darstellung der Bandabblasing.



Ermittlung des Abblasquerschnittes neben den Abblasmengen des Gases auch die Zustandsgrößen des Gases im Verdichter an der Abblasstelle durch eine Kennfeldrechnung (siehe 7.2.3.3) bekannt sein. Bei der Bandabblasing lässt man das Gas durch Schlitze oder Durchbrüche in der Gehäusewand, die durch ein Deckband regulierbar geöffnet werden kann, entweichen. Durch die praktisch scharfkantigen Durchbrüche in der Gehäusewand

(siehe Abb.: 8.1.1) tritt bei der Entweichung des Gases eine Strahlkontraktion auf. Für die Kontraktionszahl kann man nach [44] setzen:

$$\mu_1 = \frac{\pi}{\pi + 2} \quad 8.1.1$$

Unmittelbar am Eintritt in den Abblasquerschnitt ist im Verdichter eine mit der Absolutgeschwindigkeit der Gasströmung und der Durchtrittsgeschwindigkeit durch den Ablasschlitz resultierende Geschwindigkeit vorhanden. Dagegen tritt die Durchtrittsgeschwindigkeit der Gasabblasmenge allein nur unmittelbar nach dem Eintritt in den Ablasschlitz des Gehäuses auf. Mit den Bezeichnungen der Abb.8.1.1 gilt:

$$p + \frac{\rho_1}{2} c_r^2 = p' + \frac{\rho_1}{2} c_1^2$$

oder

$$\Delta p = p' - p = \frac{\rho}{2} c_r^2 - \frac{\rho}{2} c_1^2 = \frac{\rho}{2} c^2 \quad 8.1.2$$

Das bedeutet, dass die Strömungsenergie im Verdichter als verloren betrachtet werden muss.

Als maßgebliches Druckgefälle für die Austrittsgeschwindigkeit der abzublasenden Gasmasse ist somit die Differenz zwischen den statischen Druck des Gases im Verdichter und dem Außendruck anzusehen.

Der durch den Schlitz im Verdichtergehäuse auftretende Druckverlust ergibt sich zu:

$$\Delta p_1 = \frac{\rho}{2} (c_1^2 - c_1'^2)$$

Nun ist

$$\mu_1 c_1 F_1 = \mu_2 c_1' F_2$$

oder

$$c_1' = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{F_1}{F_2} c_1$$

und damit

$$\Delta p_1 = \frac{\rho}{2} c_1^2 \left[ 1 - \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{F_1}{F_2} \right)^2 \right] \quad 8.1.3$$

Der aus dem Abblasquerschnitt des Gehäuses austretende Strahl trifft annähernd senkrecht auf das Abblasband. Setzt man für den dadurch auftretenden Verlust die ganze Geschwindigkeitshöhe ein, so gilt:

$$\Delta p_2 = \frac{\rho}{2} c_1'^2 = \frac{\rho}{2} c_1^2 \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{F_1}{F_2} \right)^2 \quad 8.1.4$$

Als weitere Verlustquelle kommt noch die Austrittsgeschwindigkeit des abzublasenden Gases in die Atmosphäre hinzu:

$$\Delta p_3 = \frac{\rho}{2} c_1''^2$$

Mit

$$\mu_3 c_1'' F_3 = \mu_2 c_1' F_2$$

bzw.

$$c_1'' = \frac{\mu_2}{\mu_3} \frac{F_2}{F_3} c_1' = \frac{\mu_1}{\mu_3} \frac{F_1}{F_3} c_1$$

wird:

$$\Delta p_3 = \frac{\rho}{2} \left( \frac{\mu_1}{\mu_3} \right)^2 \left( \frac{F_1}{F_3} \right)^2 c_1^2 \quad 8.1.5$$

Für die Verlustzahlen kann man näherungsweise  $\mu_1 = \mu_3 \approx 0,9$  setzen. Dann erhält man für den Druckverlust:

$$\Delta p = \frac{\rho}{2} c_1^2 \left[ 1 + 0,461 \left( \frac{F_1}{F_3} \right)^2 \right] \quad 8.1.6$$

Bezeichnet man

$$\zeta = 1 + 0,461 \left( \frac{F_1}{F_3} \right)^2 \quad 8.1.7$$

als Verlustzahl, so gilt auch

$$\zeta = \frac{\sum \Delta h_{Verl}}{c_1^2 / 2} \quad 8.1.8$$

Aus dem Druckverhältnis

$$\frac{p}{p_a} = \left( \frac{T^*}{T^* - \Delta T} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \frac{1}{\left( 1 - \frac{\Delta T}{T^*} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}$$

mit

$$\Delta T = \zeta \frac{c_1^2}{2c_p}$$

folgt die Geschwindigkeit  $c_1$  des aus der Stufe abzublaseenden Gases:

$$c_1 = \sqrt{\frac{2c_p T^*}{\zeta} \left[ 1 - \left( \frac{p_a}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \quad 8.1.9$$

Mit dem Dichteverhältnis

$$\frac{\rho_1}{\rho} = \left( \frac{T_1}{T^*} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} = 1 - \left( \frac{c_1^2}{2c_p T^*} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

erhält man mit Hilfe der Gl.: 8.1.9 für die Dichte des Gases am Eintritt in den Ablassschlitz des Abdeckbandes:

$$\rho_1 = \frac{p}{RT^*} \left[ 1 - \frac{1 - \left( \frac{p_a}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{\zeta} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

Nun ist aber

$$\left( \frac{p_a}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left( 1 - \frac{\Delta p}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \approx 1 - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\Delta p}{p}$$

und somit

$$\rho_1 \approx \frac{p}{RT^*} \left[ 1 - \frac{1}{\zeta} \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\Delta p}{p} \right]^{\frac{1}{\kappa-1}} \approx \frac{p}{RT^*} \left( 1 - \frac{1}{\zeta \kappa} \frac{\Delta p}{p} \right) \quad 8.1.10$$

Berücksichtigt man bei einer Reihenentwicklung des Druckverhältnisses in Gl.: 8.1.9 das Quadratische Glied, so erhält die Beziehung für die Geschwindigkeit des Abzublaseenden Gases unter Berücksichtigung der Gl.: 8.1.10 die Form

$$c_1 \approx \sqrt{\frac{2RT^*}{\zeta} \frac{\Delta p}{p} \left( 1 + \frac{1}{2\kappa} \frac{\Delta p}{p} \right)} \quad 8.1.11$$

Für die Durchsatzmasse des abzublaseenden Gases in der Ablassstelle gilt dann:

$$\Delta \dot{m} = \mu_1 \rho_1 c_1 F_1$$

oder mit den Gleichungen 8.1.1; 8.1.10 und 8.1.11

$$\Delta \dot{m} = F_1 \frac{\pi}{\pi+2} \frac{p}{RT^*} \left[ 1 - \frac{1}{\kappa \zeta} \frac{\Delta p}{p} \right] \sqrt{\frac{2RT^*}{\zeta} \frac{\Delta p}{p} \left( 1 + \frac{1}{2\kappa} \frac{\Delta p}{p} \right)} \quad 8.1.12$$

Mit der aus der Kennfeldrechnung bekannten abzublaseenden Gasmenge kann aus der

Beziehung 8.1.12 der Querschnitt des Ablassschlitzes im Verdichtergehäuse näherungsweise bestimmt werden.

Wird an der Abblasstelle das kritische Druckverhältnis

$$\left(\frac{p_a}{p}\right)_{krit} = \left(1 - \zeta \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad 8.1.13$$

erreicht, so tritt das abzublasende Gas mit der Schallgeschwindigkeit

$$c_{1max} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa + 1} RT^*}$$

in den Ablassschlitz des Gehäuses ein. Mit Hilfe der an dieser Stelle auftretende statischen Dichte des Gases

$$\rho_1 = \frac{p}{RT^*} \left(\frac{2}{\kappa - 1}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$

ergibt sich die Abblasmenge des Gases zu:

$$\Delta \dot{m} = F_1 \frac{\pi}{\pi + 2} \frac{p}{RT^*} \left(\frac{2}{\kappa - 1}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa + 1} RT^*} \quad 8.1.14$$

bzw. durch Umstellen dieser Beziehung der benötigte Abblasquerschnitt im Verdichtergehäuse.

## 8.2 Druckmittelpunkt und Drehmoment der Leitgitterschaufeln bei Verstellung.

Eine wirksame Methode zur Vergrößerung des Betriebsbereiches eines Axialverdichters ist die Leitgitterverstellung deren Wirksamkeit in der Praxis nachgewiesen werden konnte.

Der Drehpunkt der Profile kann dabei in den Druckmittelpunkt der Auftriebskraft am Profil bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung gelegt werden. Bei Abweichungen von der aerodynamisch stoßfreien Anströmung der Profile treten Drehmomente auf, die der Konstrukteur des Verstellmechanismus für die Leitgitterschaufeln annähernd kennen muss.

Für die Auftriebskraft an einem Profil und dem Auftriebsbeiwert galt nach den Gleichungen 6.3.7.4 und 6.3.7.5:

$$A = \frac{\rho}{2} U_\infty^2 l 2\pi \left[ \tan \alpha + 2 \frac{f}{l} \right] \quad 8.2.1$$

$$c_a = 2\pi \left[ \tan \alpha + 2 \frac{f}{l} \right] \quad 8.2.2$$

Für das auf die Vorderkante des Profils von der Auftriebskraft ausgeübte Moment gilt:

$$M_0 = Ax_{Dr} \quad 8.2.3$$

wobei  $x_{Dr}$  die Lage des Druckmittelpunktes der Auftriebskraft am Profil ist.

Nach Gl.: 6.3.7.20 ergab sich für eine parabolische Skelettlinie der Profile mit 50% Wölbungsrücklage die Druckmittelpunktlage am Profil zu

$$\frac{x_{Dr}}{l} = \frac{\tan \alpha + 4 \frac{f}{l}}{4 \left[ \tan \alpha + 2 \frac{f}{l} \right]} \quad 8.2.4$$

Für  $\frac{f}{l} = 0$  wird  $\frac{x_{Dr}}{l} = \frac{1}{4}$  (angestellte ebene Platte)

Für  $\alpha = 0$  wird  $\frac{x_{Dr}}{l} = \frac{1}{2}$  (gewölbtes Profil bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung der Profile)

Nach Abschnitt 6.3.2 steht die relative Profilwölbung mit den Wölbungswinkel in folgenden Zusammenhang:

$$\tan\left(\frac{\Theta}{2}\right) = 4 \frac{f}{l}$$

Damit ist auch

$$\frac{x_{Dr}}{l} = \frac{\tan \alpha + \tan\left(\frac{\Theta}{2}\right)}{4 \left[ \tan \alpha + \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\Theta}{2}\right) \right]} \quad 8.2.5$$

Der Wölbungswinkel  $\Theta$  und auch die relative Wölbung  $f/l$  der Profile ist aus den Auslegungsrechnungen eines Verdichters bekannt.

Der Winkel  $\alpha$  stellt jenen Anstellwinkel der Profile dar, der gegenüber der aerodynamisch stoßfreien Anströmung der Profile abweicht. Ist das Profil für den aerodynamisch stoßfreien Anströmungswinkel ausgelegt, darf der Winkel  $\alpha$  bei Teillastzuständen eines Verdichters nur jene Größenordnungen erreichen die ein stabiles Arbeiten des Verdichters garantieren. Über den Stabilitätsbereich und den Instabilitätsbereich der Gitterprofile geben die Ausführungen des Abschnittes 6.3.7 und die Abbildungen 6.3.7.3 und 6.3.7.4 Auskunft.

Die Existenz des Instabilitätsbereiches der Profile macht es in jedem Falle erforderlich, dass die Leitgitterverstellvorrichtung mechanisch kraftschlüssig und mit kleinen Toleranzen zur Vermeidung von Flatterschwingungen auszuführen ist. Die Abb.: 6.3.7.3 macht weiter deutlich, dass man sinnvoll den Drehpunkt des Verstellprofils nicht in die Schwerpunktslage nach Abschnitt 6.5 sondern bei parabolischer Skelettlinie mit 50% Wölbungsrücklage auf die halbe Sehnenlänge legen sollte.

Die Auftriebskraft  $A$  des Profils ist an dessen Druckpunktlage wirksam. Ist  $\left(\frac{x_{Dr}}{l}\right)^*$  der Drehpunkt des Profils, so ist das von  $z$  Profilen in einem Leitgitter hervorgerufene Drehmoment:

$$M = zA \left[ \left(\frac{x_{Dr}}{l}\right)^* - \frac{x_{Dr}}{l} \right] \quad 8.2.6$$

wobei entsprechend der Lage des Drehpunktes am Profil auf die Drehrichtung zu achten ist.

Die Auftriebskraft  $A$  ist nach Gl.:8.2.1 bekannt wobei der Strömungszustand am Profil und die zugehörigen thermodynamischen Werte des Gases aus der Kennfeldrechnung nach Abschnitt 7.2.3 erhalten wurden.

Nach diesen Gesichtspunkten kann der projektierende Ingenieur seine Leitgitterverstellvorrichtung aufbauen und die erforderlichen Leitgitterverstellkräfte ermitteln

### 8.3 Der Axialschubausgleich des Verdichterrotors.

Die den Axialschub eines Verdichters hervorrufenden Kräfte sind die statischen Druckunterschiede und die Impulskräfte des durch die Gitter strömenden Gases.

Abb.:8.3.1 zeigt schematisch eine Verdichterstufe und deren Einbauverhältnisse sowie die Kraftwirkung auf einen Stromring. Da der statische Druck rein durch die Kinematik und der

Für  $\alpha = 0$  wird  $\frac{x_{Dr}}{l} = \frac{1}{2}$  (gewölbtes Profil bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung der Profile)

Nach Abschnitt 6.3.2 steht die relative Profilwölbung mit den Wölbungswinkel in folgenden Zusammenhang:

$$\tan\left(\frac{\Theta}{2}\right) = 4 \frac{f}{l}$$

Damit ist auch

$$\frac{x_{Dr}}{l} = \frac{\tan \alpha + \tan\left(\frac{\Theta}{2}\right)}{4 \left[ \tan \alpha + \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\Theta}{2}\right) \right]} \quad 8.2.5$$

Der Wölbungswinkel  $\Theta$  und auch die relative Wölbung  $f/l$  der Profile ist aus den Auslegungsrechnungen eines Verdichters bekannt.

Der Winkel  $\alpha$  stellt jenen Anstellwinkel der Profile dar, der gegenüber der aerodynamisch stoßfreien Anströmung der Profile abweicht. Ist das Profil für den aerodynamisch stoßfreien Anströmungswinkel ausgelegt, darf der Winkel  $\alpha$  bei Teillastzuständen eines Verdichters nur jene Größenordnungen erreichen die ein stabiles Arbeiten des Verdichters garantieren. Über den Stabilitätsbereich und den Instabilitätsbereich der Gitterprofile geben die Ausführungen des Abschnittes 6.3.7 und die Abbildungen 6.3.7.3 und 6.3.7.4 Auskunft.

Die Existenz des Instabilitätsbereiches der Profile macht es in jedem Falle erforderlich, dass die Leitgitterverstellvorrichtung mechanisch kraftschlüssig und mit kleinen Toleranzen zur Vermeidung von Flatterschwingungen auszuführen ist. Die Abb.: 6.3.7.3 macht weiter deutlich, dass man sinnvoll den Drehpunkt des Verstellprofils nicht in die Schwerpunktslage nach Abschnitt 6.5 sondern bei parabolischer Skelettlinie mit 50% Wölbungsrücklage auf die halbe Sehnenlänge legen sollte.

Die Auftriebskraft  $A$  des Profils ist an dessen Druckpunktlage wirksam. Ist  $\left(\frac{x_{Dr}}{l}\right)^*$  der Drehpunkt des Profils, so ist das von  $z$  Profilen in einem Leitgitter hervorgerufene Drehmoment:

$$M = zA \left[ \left(\frac{x_{Dr}}{l}\right)^* - \frac{x_{Dr}}{l} \right] \quad 8.2.6$$

wobei entsprechend der Lage des Drehpunktes am Profil auf die Drehrichtung zu achten ist.

Die Auftriebskraft  $A$  ist nach Gl.:8.2.1 bekannt wobei der Strömungszustand am Profil und die zugehörigen thermodynamischen Werte des Gases aus der Kennfeldrechnung nach Abschnitt 7.2.3 erhalten wurden.

Nach diesen Gesichtspunkten kann der projektierende Ingenieur seine Leitgitterverstellvorrichtung aufbauen und die erforderlichen Leitgitterverstellkräfte ermitteln

### 8.3 Der Axialschubausgleich des Verdichterrisors.

Die den Axialschub eines Verdichters hervorrufenden Kräfte sind die statischen Druckunterschiede und die Impulskräfte des durch die Gitter strömenden Gases.

Abb.:8.3.1 zeigt schematisch eine Verdichterstufe und deren Einbauverhältnisse sowie die Kraftwirkung auf einen Stromring. Da der statische Druck rein durch die Kinematik und der



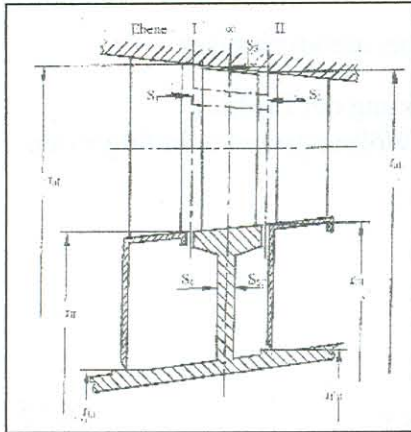


Abb.: 8.3.1 Zur Axialschubbestimmung.

Bezeichnen wir die Kraftwirkung in Strömungsrichtung mit minus und entgegengesetzt der Strömungsrichtung mit plus, so ist die auf die Stirnfläche des Stromringes in der Ebene I wirkende Kraft:

$$P = -F_1 p_{1m} - \dot{m} c_{ax1m}$$

Dabei ist:

- $F_1 p_{1m}$  der Anteil durch den statischen Druck
- $\dot{m} c_{ax1m}$  der Impulsanteil
- $p_{1m}$  der mittlere Druck zwischen den Radien des Stromringes
- $c_{ax1m}$  die mittlere Geschwindigkeit zwischen den Radien des Stromringes.

Mit

$$F_1 = \pi(r_{s2}^2 - r_{s1}^2) = \pi r_a^2 \left[ \left( \frac{r_{s2}}{r_a} \right)^2 - \left( \frac{r_{s1}}{r_a} \right)^2 \right]$$

und

$$\dot{m} = F_1 \rho_{1m} c_{ax1m}$$

wird die in der Ebene I auf die Stirnfläche des Stromringes wirkende Kraft:

$$\Delta P_1 = -\pi r_a^2 \left[ \left( \frac{r_{s2}}{r_a} \right)^2 - \left( \frac{r_{s1}}{r_a} \right)^2 \right] [p_{1m} + \rho_{1m} c_{ax1m}]$$

Die Kraft die auf die ganze Stirnfläche der Schaufelprofile in der Ebene I wirkt, ist die Summe aller  $\Delta P_1$  von der Nabe bis zum Außenradius der Stufe:

$$S_1 = \sum_{r_i/r_a}^1 \Delta P_1 \quad 8.3.1$$

Analog gilt dann mit

$$\Delta P_2 = \pi r_a^2 \left[ \left( \frac{r_{s1}}{r_a} \right)^2 - \left( \frac{r_{s2}}{r_a} \right)^2 \right] [p_{2m} + \rho_{2m} c_{ax2m}]$$

für die Ebene II der Stufe:

$$S_2 = \sum_{r_i/r_a}^1 \Delta P_2 \quad 8.3.2$$

Die Kraft auf der äußeren Seite des äußeren Stromringes ist:

$$S_3 = \pi r_{al}^2 \left[ 1 - \left( \frac{r_{all}}{r_{al}} \right)^2 \right] \frac{p_{al} + p_{all}}{2} \quad 8.3.3$$

Auf den Rotor wirkt in der Ebene I die Kraft:

$$S_4 = -\pi (r_{il}^2 - r_{Li}^2) p_1 \quad 8.3.4$$

und in der Ebene II:

$$S_5 = \pi (r_{iII}^2 - r_{LII}^2) p_2 \quad 8.3.5$$

In diesen Gleichungen sind für  $p_1$  und  $p_2$  die statischen Drücke am Innenradius der jeweiligen Stufe einzusetzen. In der letzten Verdichterstufe wird der Rotorschub zunächst so gerechnet, als wenn der statische Druck  $p_2$  auf eine Platte mit den Radius  $r_{iII}$  wirkt.

$$S_6 = \pi r_{iII}^2 p_2 \quad 8.3.6$$

Bei der Bestimmung des Rotorschubes ist zu beachten, dass auf den Wellenstumpf eine Kraft

$$S_7 = -r_L^2 \pi p_a \quad 8.3.7$$

wirkt.

Die weiteren konstruktiven Gegebenheiten werden bei der Größenbestimmung des Axialschubausgleichskolbens berücksichtigt.

Der in einer Stufe erzeugte Axialschub ist

$$\Delta A = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 \quad 8.3.8$$

und der des Verdichters mit  $z$  Stufen:

$$A = \sum_{z=1}^z \Delta A + S_6 + S_7 \quad 8.3.9$$

Für die Durchmesserbestimmung des Axialschubausgleichskolbens muss die maximale Schubbelastung des Axiallagers und bei Gasturbinenanlagen der ermittelte Axialschub der Turbine bekannt sein. Die Abb.: 8.3.2 zeigt die konstruktiven Gegebenheiten wie sie zwischen Verdichter und Antriebsturbine auftreten können. Die projektierte Fläche zwischen

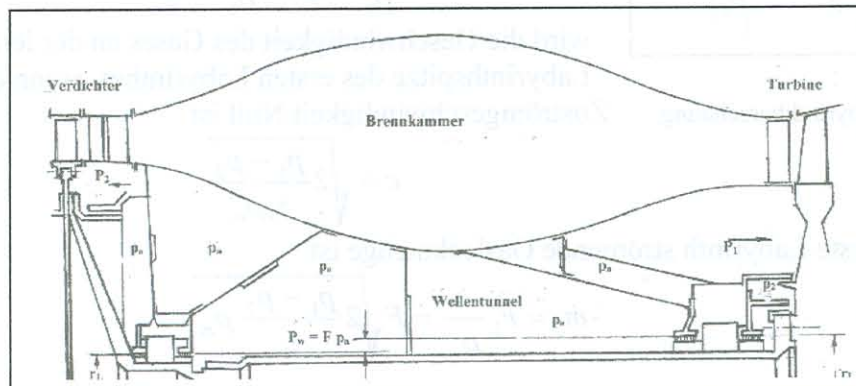


Abb.: 8.3.2 Zur Axialschubbestimmung

den beweglichen und unbeweglichen Bauteilen multipliziert mit den Druck um Wellentunnel (in diesem Falle  $p_a$ , da der Wellentunnel entlüftet ist) ergibt in Strömungsrichtung gesehen einen weiteren Anteil zum Axialschub.

$$P_w = F p_a$$

Der verbleibende Restschub ist:

$$A_R = A_V - A_T - P_w \quad 8.3.10$$

Ist  $A_L$  die zulässige axiale Belastung des Verdichterlagers, so ist der durch den Ausgleichskolben aufzunehmende Axial Schub:

$$P = A_R \pm A_L \quad 8.3.11$$

Dabei bedeutet:

- + Krafrichtung des Lagerschubes in Strömungsrichtung
- Krafrichtung des Lagerschubes entgegen der Strömungsrichtung.

Den Durchmesser des Axialschubausgleichskolbens erhält man aus der statischen Gleichgewichtsbedingung

$$P - (D_K - d_L) \frac{\pi}{4} p_2 + (D_K^2 - d_L^2) \frac{\pi}{4} p_a = 0$$

zu:

$$D_K = \sqrt{\frac{4P}{\pi(p_2 - p_a)} + d_L^2} \quad 8.3.12$$

Der Ausgleichskolben wird oft in Doppellabyrinthform ausgeführt. Dies hat besonders im Leichtbau Bedeutung, da die Labyrinth nicht so lang gebaut werden müssen und damit das durch die Fliehkraft hervorgerufene Biegemoment kleiner gehalten werden kann.

Die Abb.: 8.3.3 zeigt schematisch eine derartige Ausführung des Ausgleichskolbens in Doppellabyrinthform.

Mit den Bezeichnungen der Abb.: 8.3.3 gilt:

$$p_1 - p_2 = z_1 \Delta p_1$$

$$p_2 - p_3 = z_2 \Delta p_2$$

$$p_1 - p_3 = (z_1 + z_2) \Delta p_3$$

wobei näherungsweise der Druckabbau im Gas gleichmäßig auf alle Labyrinthspitzen aufgeteilt wurde. Mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{c_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{c_2^2}{2}$$

wird die Geschwindigkeit des Gases an der letzten Labyrinthspitze des ersten Labyrinthes wenn die Zuströmgeschwindigkeit Null ist.

$$c = \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{z_1 \rho_m}}$$

Die durch das erste Labyrinth strömende Gasleckmenge ist

$$\dot{m}_1 = F_1 \frac{c}{\rho_m} = F \sqrt{2 \frac{p_1 - p_2}{z_1} \rho_m}$$

Mit

$$\rho_m = \frac{1}{v_m} = \frac{p_m}{p_1 v_1} = \frac{p_1 + p_2}{2 p_1 v_1}$$

folgt

$$\dot{m}_1 = D_1 \pi s_1 \sqrt{\frac{p_1^2 - p_2^2}{z_1 p_1 v_1}} \quad 8.3.13$$

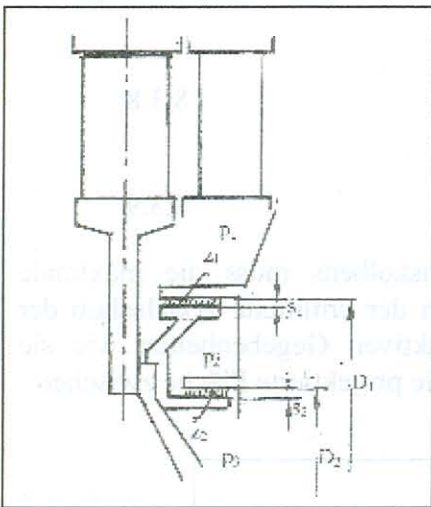


Abb.: 8.3.3 Zur Labyrinthberechnung.

Und analog für das zweite Labyrinth:

$$\dot{m}_2 = D_2 \pi s_2 \sqrt{\frac{p_2^2 - p_3^2}{z_2 p_2 v_2}} \quad 8.3.14$$

Zur Ermittlung des Druckes  $p_2$  zwischen den Labyrinth führen wir mit den Spitzenspielen der einzelnen Labyrinthspitzen

$$s_1 = s_2 = s_3$$

eine gleichwertige Durchströmfläche ein

$$F_{Gl} = z_1 D_1 s_1 = z_2 D_2 s_2 = (z_1 + z_2) D_{Gl} s_3$$

und erhalten:

$$D_{Gl} = \frac{z_1 D_1 + z_2 D_2}{z_1 + z_2} \quad 8.3.15$$

Damit steht den Gleichungen 8.3.14 und 8.3.15 die Beziehung

$$\dot{m}_3 = D_{Gl} \pi s_3 \sqrt{\frac{p_1^2 - p_3^2}{(z_1 + z_2) p_1 v_1}} \quad 8.3.16$$

gegenüber. Aus der Bedingung

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}_3$$

folgt mit den Gleichungen 8.3.13 und 8.3.16 unmittelbar der Druck zwischen den beiden Labyrinth.

$$p_2 = \sqrt{p_1^2 - \left( \frac{z_1 D_1 + z_2 D_2}{(z_1 + z_2) D_1} \right)^2 \frac{z_1}{z_1 + z_2} (p_1^2 - p_3^2)} \quad 8.3.17$$

Tritt im letzten Spalt der Labyrinthdichtung Schallgeschwindigkeit auf, gilt dort:

$$\dot{m} = F \alpha \sqrt{\frac{p'}{v'}} \quad 8.3.18$$

$p'$  und  $v'$  sind die Zustandswerte des Gases in der Labyrinthkammer vor dem letzten Spalt und

$$\alpha = \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa + 1}}$$

Für den Teil, welchen dem letzten Labyrinthspalt vorausgeht, entspricht  $p_2$  in der Gl.: 8.2.13 dem Wert  $p'$ . Setzt man die Beziehungen 8.3.13 und 8.3.18 einander gleich, so folgt

$$\alpha \sqrt{\frac{p'}{v'}} = \sqrt{\frac{p_1^2 - p'^2}{(z-1) p_1 v_1}}$$

oder, da es sich um einen Drosselvorgang handelt, mit  $p'v' = p_1 v_1$

$$\alpha = \sqrt{\frac{p'^2}{p_1 v_1}} = \sqrt{\frac{p_1^2 - p'^2}{(z-1) p_1 v_1}}$$

und daraus:

$$p'^2 = \frac{p_1^2}{\alpha^2 (z-1) + 1} \quad 8.3.19$$

Ersetzen wir die in Gl.: 8.3.18 auftretende Wurzel und führen noch den Ausdruck 8.3.19 ein, so folgt:

$$\dot{m} = F\alpha \sqrt{\frac{p_1^2}{[\alpha^2(z-1)+1]p_1v_1}} = F \sqrt{\frac{1}{z-1+\frac{1}{\alpha^2}} \frac{p_1}{v_1}} \quad 8.3.20$$

mit  $\kappa = 1,4$  ist dann:

$$\dot{m} = F \sqrt{\frac{p_1}{v_1} \frac{1}{z+1,2}} \quad 8.3.21$$

Damit im letzten Spalt überhaupt Schallgeschwindigkeit auftreten kann, muss

$$\frac{p_2}{p'} \leq \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

gelten oder mit Gl.:8.3.19

$$\frac{p_2}{p'} \leq \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2(z-1)+1}} \quad 8.3.22$$

Für  $\kappa = 1,4$  ergibt sich die Bedingung

$$\frac{p_2}{p'} \leq \frac{0,528}{\sqrt{z+1,2}} \quad 8.3.23$$

Zur Ermittlung des Druckes  $p_2$  zwischen den zwei Labyrinth wird

$$\dot{m} = F_{Gl} \sqrt{\frac{1}{(z_1+z_2)+\frac{1}{\alpha^2}-1} \frac{p}{v_1}} = F_2 \sqrt{\frac{1}{z_2+\frac{1}{\alpha^2}-1} \frac{p_2}{v_2}}$$

gesetzt. Mit

$$\frac{F_{Gl}}{F_2} = \frac{z_1D_1 + z_2D_2}{(z_1+z_2)D_2}$$

ergibt sich daraus:

$$\frac{p_2}{v_2} = \left[ \frac{z_1D_1 + z_2D_2}{(z_1+z_2)D_2} \right]^2 \left[ \frac{1}{(z_1+z_2)+\frac{1}{\alpha^2}-1} \frac{p_1^2}{RT_1} \left( z_2 + \frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \right] = x \quad 8.3.24$$

Damit ist

$$p_2 = xv_2$$

Bei einem Drosselvorgang gilt:

$$p_2 = \frac{p_1v_1}{v_2}$$

Durch Gleichsetzen beider Beziehungen ergibt sich:

$$v_2 = \sqrt{\frac{p_1v_1}{x}} \quad \text{bzw.} \quad p_2 = x \sqrt{\frac{p_1v_1}{x}}$$

oder mit der Gl.: 8.3.24:

$$p_2 = \sqrt{\left[ \frac{z_1D_1 + z_2D_2}{(z_1+z_2)D_2} \right]^2 \left[ \frac{1}{(z_1+z_2)+\frac{1}{\alpha^2}-1} \frac{p_1^2}{RT_1} \left( z_2 + \frac{1}{\alpha^2} - 1 \right) \right] p_1v_1} \quad 8.3.25$$

Mit den angegebenen Gleichungen lassen sich alle benötigten Werte für die Axialschubermittlung und für den Axialschubausgleich durch Labyrinthdichtung ermitteln..

## 9. Schwingungsprobleme bei Axialverdichtern.

Hinsichtlich des Schwingungsverhalten des Axialverdichters unterscheiden wir im wesentlichen drei Gesichtspunkte. Diese sind:

- Lauf- und Leitschaufelschwingungen
- Kritische Drehzahl des Verdichterrisors
- Gasschwingungen des im Verdichter befindlichen Gasvolumens.

In den nachfolgenden Abschnitten sollen die einzelnen Schwingungsprobleme behandelt werden.

### 9.1 Lauf- und Leitschaufelschwingungen.

Schwingungsrisse können sowohl an den Lauf- als auch an den Leitschaufeln des Verdichters auftreten und führen zumindest in den ersten Verdichterstufen zu Totalschäden. Bei der Erprobung und Reifmachung von Axialverdichtern wird man von Schwingungsrissen an der Beschauung nicht immer verschont bleiben. Die Gründe dafür sind:

- Die einzelnen Stufen eines Verdichters arbeiten bei gewissen Drehzahlen mit einem Gebiet abgerissener Gasströmung, so dass noch Profilkorrekturen notwendig sind.
- Die genaue Einspannelastizität der Profilschaufeln und deren Toleranzbereich ist nicht bekannt.
- Unbeachtete oder unbekannte Eigenfrequenzen (z.B. Anzahl und Umlauffrequenzen rotierender Abreißzonen der Strömung im Verdichter, Pulsationen bei der Verbrennung von Kraftstoff in Brennkammern von Gasturbinen u.a.).

Bei den Schaufelschwingungen unterscheiden wir Biege- und Torsionsschwingungen.

#### 9.1.1 Die Biegeschwingungen.

Betrachtet man die Mittelfaser eines leicht gekrümmten Stabes gleichen Querschnittes mit der Längeneinheit  $dx$  und den Krümmungsradius  $\rho$ , so vergrößert sich bei weiterer Krümmung des Stabes die betrachtete Längeneinheit auf  $dx(1+\varepsilon)$  und der Krümmungsradius auf  $\rho+z$ . Es ist dann:

$$\frac{dx(1+\varepsilon)}{dx} = \frac{\rho+z}{\rho}$$

und die Dehnung:

$$\varepsilon = \frac{z}{\rho}$$

Nach dem Hookschen Gesetz gilt:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{z}{\rho} = z \frac{M}{I}$$

Daraus erhält man das bei der Stabkrümmung wirksame Moment:

$$M = EI \frac{1}{\rho}$$

Ist  $y$  die Stabdurchbiegung, so gilt für den Krümmungsradius:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

Da wir es mit kleinen Durchbiegungen zu tun haben ( $y'^2 \ll 1$ ) setzen wir

$$\frac{1}{\rho} = -y''$$

und erhalten:

$$M = -EIy''$$

Mit der Stabelastung durch die Querkraft  $M' = Q$  und  $M'' = q$  erhält man die Bewegungsdifferentialgleichung für die statische Durchbiegung

$$(EIy'')'' - q = 0$$

in die als Last  $q$  je Längeneinheit die Trägheitskraft der Querbewegung

$$q = -\mu_1 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

eingesetzt wird. ( $\mu =$  Masse je Längeneinheit, die Längendichte  $\rho F$ )

Für die Differentialgleichung der freien Biegeschwingung von Stäben erhält man dann:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad 9.1.1.1$$

Zur Lösung der Differentialgleichung schreibt man den Partikuläransatz

$$y = y(x,t) = G(x) Z(t)$$

Mit

$$\frac{\partial y}{\partial x} = Z \frac{\partial G}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Z \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$$

und

$$\frac{\partial y}{\partial t} = G \frac{\partial Z}{\partial t} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}$$

folgt für die Differentialgleichung:

$$Z \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right] + \rho F \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} G = 0$$

Setzt man

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right] + \omega \rho F G = 0 \quad 9.1.1.2$$

so folgt für die Zeitfunktion:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + \omega Z = 0 \quad 9.1.1.3$$

Um die Gleichung dimensionslos zu machen setzen wir

$$z = \frac{x}{L} \qquad \text{bzw.} \qquad x = z L$$

mit  $L = r_a - r_i$  als Schauffellänge. Da sowohl die Profilfläche als auch das Trägheitsmoment

der Profile über der Schaufelhöhe veränderlich sein können, führen wir die Funktionen

$$g(x) = \frac{I(z)}{I_i} \quad 9.1.1.4$$

$$f(x) = \frac{F_P(z)}{F_{Pi}} \quad 9.1.1.5$$

ein. Der Index  $i$  gibt die Werte an der Stelle  $x = 0$ , d.h. im Fußquerschnitt der Schaufel an. Die Gl.: 9.1.1.2 erhält dann die Form:

$$\frac{d}{dz^2 L^2} \left[ E \frac{I(z)}{I_i} I_i \frac{dG(z)}{dz^2 L^2} \right] + \omega^2 \rho^2 \frac{F_P(z)}{F_{Pi}} F_{Pi} G(z)$$

Das ganze Schwingungssystem ist durch die jeweiligen Einspannverhältnisse der Schaufeln bestimmten Bedingungen unterworfen, die durch den Eigenwert  $\varepsilon^2$  berücksichtigt werden sollen.

$$\varepsilon^2 EI_i \frac{1}{L^4} \frac{d^2}{dz^2} \left[ g(z) \frac{d^2 G(z)}{dz^2} \right] = \varepsilon^2 \omega^2 \rho^2 F_i f(z) G(z)$$

Schreiben wir für die Kreisfrequenz

$$\omega^2 = \varepsilon^2 \frac{1}{L^4} \frac{E}{\rho} \frac{I_i}{F_{Pi}} \quad 9.1.1.6$$

so erhalten wir für das Eigenwertproblem der Differentialgleichung:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ g(z) \frac{d^2 G(z)}{dz^2} \right] = \varepsilon^2 f(z) G(z) \quad 9.1.1.7$$

Aus dieser Gleichung wird entsprechend den Randbedingungen der Eigenwert  $\varepsilon$  ermittelt. Die Eigenschwingungszahl der Schaufeln pro Sekunde erhalten wir aus der Gl.: 9.1.1.6 zu:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \sqrt{\frac{I_i}{F_{Pi}}} \quad [s^{-1}] \quad 9.1.1.8$$

Da die Sehnenlängen der Profile und die maximalen Profildicken über der Schaufelhöhe konstant oder linear veränderlich sein können, setzen wir

$$f(z) = 1 + \frac{F_{Pi} - F_{Pa}}{F_{Pi} L} zL$$

Gleiches kann man auch für das Trägheitsmoment der Schaufelprofile tun, sofern die Energieumsetzung in der Verdichterstufe über den Radius konstant oder linear veränderlich ist.

$$g(z) = 1 + \frac{I_i - I_a}{I_i L} zL$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gl.: 9.1.1.7 für den Eigenwert ein, so folgt:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{d^2 G(z)}{dz^2} + \frac{I_i - I_a}{I_i} z \frac{d^2 G(z)}{dz^2} \right] = \varepsilon^2 \left[ G(z) + G(z) \frac{F_{Pi} - F_{Pa}}{F_{Pi}} z \right]$$

Mit

$$\frac{d}{dz} \left[ z \frac{d^2 G(z)}{dz^2} \right] = z \frac{d^3 G(z)}{dz^3} + \frac{d^2 G(z)}{dz^2} dz$$



und

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \left[ z \frac{d^2 G(z)}{dz^2} \right] &= \frac{d}{dz} \left[ z \frac{d^3 G(z)}{dz^3} + \frac{d^2 G(z)}{dz^2} dz \right] \\ &= z \frac{d^4 G(z)}{dz^4} + z dz \frac{d^3 G(z)}{dz^3} + \frac{d^2 G(z)}{dz^2} d^2 z \end{aligned}$$

erhält man für das Eigenwertproblem folgenden Ausdruck:

$$\frac{d^4 G(x)}{dx^4} + \frac{I_i - I_a}{I_i} \left[ z \frac{d^4 G(z)}{dz^4} + 2dz \frac{d^3 G(z)}{dz^3} + \frac{d^2 G(z)}{dz^2} \right] = \varepsilon^2 \left[ G(z) + G(z) \frac{F_{pi} - F_{pa}}{F_{pi}} z \right] \quad 9.1.1.9$$

Machen wir den Lösungsansatz  $G(z) = e^{Kz}$ , setzen die Ableitungen in die obige Gleichung ein und dividieren durch  $e^{Kz}$  so erhalten wir:

$$K^4 + \frac{I_i - I_a}{I_i} [zK^4 + 2K^3 dz + K^2 d^2 z] = \varepsilon^2 \left[ 1 + \frac{F_{pi} - F_{pa}}{F_{pi}} z \right]$$

oder unter Vernachlässigung der Glieder kleiner Größenordnungen

$$K^4 \left[ 1 + \frac{I_i - I_a}{I_i} z \right] = \varepsilon^2 \left[ 1 + \frac{F_{pi} - F_{pa}}{F_{pi}} z \right]$$

oder

$$\left\{ K \left[ 1 + \frac{I_i - I_a}{I_i} z \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 = \varepsilon \left[ 1 + \frac{F_{pi} - F_{pa}}{F_{pi}} z \right]^{\frac{1}{2}} \quad 9.1.1.10$$

Da der Eigenwert  $\varepsilon$  entsprechend dem Gleichungsaufbau positiv oder negativ sein kann, sind die Wurzelstellen:

$$K_{1,2} = \pm \sqrt{\varepsilon \frac{1 + \frac{F_{pi} - F_{pa}}{F_{pi}} z}{1 + \frac{I_i - I_a}{I_i} z}} \quad \text{und} \quad K_{3,4} = \pm \sqrt{-\varepsilon \frac{1 + \frac{F_{pi} - F_{pa}}{F_{pi}} z}{1 + \frac{I_i - I_a}{I_i} z}}$$

Entsprechend der Gültigkeit der Gl.: 9.1.1.10 wird aber:

$$\begin{aligned} K_1 &= K & K_3 &= iK \\ K_2 &= -K & K_4 &= -iK \end{aligned}$$

Die Allgemeine Lösung der Gleichung für das Eigenwertproblem ist dann:

$$G(z) = C_1 e^{Kz} + C_2 e^{-Kz} + C_3 e^{iKz} + C_4 e^{-iKz}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} e^{\pm iKz} &= \cos Kz \pm i \sin Kz \\ e^{Kz} &= \sinh Kz + \cosh Kz \\ e^{-Kz} &= -\sinh Kz + \cosh Kz \end{aligned}$$

Setzen wir diese Ausdrücke ein, so ergibt sich:

$$G(z) = (C_3 + C_4) \cos Kz + (C_3 - C_4) i \sin Kz + (C_1 - C_2) \sinh Kz + (C_1 + C_2) \cosh Kz$$

Für die Konstanten setzen wir:

$$\begin{aligned} C_3 + C_4 &= C_2 & C_3 - C_4 &= -iC_1 \\ C_1 - C_2 &= C_3 & C_1 + C_2 &= C_4 \end{aligned}$$

und weiterhin

$$\zeta = Kz$$

wobei dieser Ausdruck für  $z = 1$  in  $\zeta^* = K$  übergeht und mit den Eigenwert  $\varepsilon$  nach der Gl.: 9.1.1.10 durch

$$\zeta^* = \varepsilon \left[ \frac{1 + \frac{F_{Pi} - F_{Pa}}{F_{Pi}}}{1 + \frac{I_i - I_a}{I_i}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad 9.1.1.11$$

zusammenhängt. Setzen wir diese Ausdrücke ein, so wird unsere Gleichung für das Eigenwertproblem:

$$G(\zeta) = C_1 \sin \zeta + C_2 \cos \zeta + C_3 \sinh \zeta + C_4 \cosh \zeta \quad 9.1.1.12$$

Die weitere Behandlung dieses Randwertproblems hängt von den Einspannbedingungen der Verdichterschaufeln ab. Hier sind drei Grenzfälle zu betrachten. Diese sind:

- a) Laufschaufeln: Laufschaufeln sind im Grenzfalle am Schaufelfuß fest eingespannt und am Schaufelkopf frei beweglich.

Es gelten dann folgende Randbedingungen:

- An der Einspannstelle (Schaufelfuß) bei  $\zeta = 0$   
 Durchbiegung = 0  $\rightarrow G(0) = 0$   
 Tangentenwinkel = 0  $\rightarrow G'(0) = 0$
- Am Schaufelkopfprofil bei  $\zeta = 1$   
 Durchbiegung = max.  $\rightarrow G''(1) = 0$   
 Momentenwirkung = 0  $\rightarrow G'''(1) = 0$

Durch Differenzieren der Gl.: 9.1.1.12 und Einsetzen der Randbedingungen erhält man die Konstanten

$$C_3 = C_4 \frac{\cosh \zeta + \cos \zeta}{-\sin \zeta - \sinh \zeta} \quad \text{und} \quad C_3 = C_4 \frac{-\sin \zeta + \sinh \zeta}{-\cos \zeta - \cosh \zeta}$$

und durch Gleichsetzen für das Randwertproblem die Gleichung

$$\cos \zeta = -\frac{1}{\cosh \zeta} \quad 9.1.1.13$$

mit den Wurzeln

- für die Grundschwingung  $\rightarrow \zeta_{B0}^* = 1,875$
- für die erste Oberschwingung  $\rightarrow \zeta_{B1}^* = 4,694$
- für die zweite Oberschwingung  $\rightarrow \zeta_{B2}^* = 7,855$
- für die dritte Oberschwingung  $\rightarrow \zeta_{B3}^* = 10,996$

Der Eigenwert  $\varepsilon$  ergibt sich dann aus der Gl.: 9.1.1.11.

- b) Leitschaufeln: Leitschaufeln können am Fuß- und Kopfprofil eingespannt sein. Die dabei auftretenden Grenzfälle sind:

- fest eingespannt
- gelenkig eingespannt

b<sub>1</sub>) Die beiderseits fest eingespannte Leitschaukel.

Es gelten folgende Randbedingungen:

Bei  $\zeta = 0$

$$\text{Durchbiegung} = 0 \quad \rightarrow G(0) = 0$$

$$\text{Tangentenwinkel} = 0 \quad \rightarrow G'(0) = 0$$

Bei  $\zeta = 1$

$$\text{Durchbiegung} = 0 \quad \rightarrow G(1) = 0$$

$$\text{Tangentenwinkel} = 0 \quad \rightarrow G'(1) = 0$$

Die Konstanten erhalten wir auf gleichem Wege wie bei den Laufschaufelbetrachtungen.

$$C_3 = C_4 \frac{\cosh \zeta - \cos \zeta}{\sin \zeta - \sinh \zeta} \quad \text{und} \quad C_3 = C_4 \frac{\sin \zeta + \sinh \zeta}{\cos \zeta - \cosh \zeta}$$

und durch Gleichsetzen der Ausdrücke

$$\cos \zeta = \frac{1}{\cosh \zeta}$$

mit den Wurzeln

$$\text{für die Grundschiwingung} \quad \zeta_{B0}^* = 4,72228$$

$$\text{für die erste Oberschiwingung} \quad \zeta_{B1}^* = 7,8358$$

$$\text{für die zweite Oberschiwingung} \quad \zeta_{B2}^* = 11,0$$

$$\text{für die dritte Oberschiwingung} \quad \zeta_{B3}^* = 14,137$$

b<sub>2</sub>) Die beiderseits gelenkig eingespannte Leitschaukel.

Es gelten folgende Randbedingungen:

Bei  $\zeta = 0$

$$\text{Durchbiegung} = 0 \quad \rightarrow G(0) = 0$$

$$\text{Querkraft} = 0 \quad \rightarrow G'''(0) = 0$$

Bei  $\zeta = 1$

$$\text{Durchbiegung} = 0 \quad \rightarrow G(1) = 0$$

$$\text{Querkraft} = 0 \quad \rightarrow G'''(1) = 0$$

Analog den vorhergehenden Ausführungen erhalten wir:

$$\cos \zeta = \cosh \zeta$$

mit den Wurzeln:

$$\text{für die Grundschiwingung} \quad \zeta_{B0}^* = \pi$$

$$\text{für die erste Oberschiwingung} \quad \zeta_{B1}^* = 2\pi$$

$$\text{für die zweite Oberschiwingung} \quad \zeta_{B2}^* = 3\pi$$

$$\text{für die dritte Oberschiwingung} \quad \zeta_{B3}^* = 4\pi$$

Die Gleichungen für die Eigenschwingungen der Schaukeln sind dann:

1. Biegeschwiwingung:

$$\nu_o = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\zeta_{B0}^{*2}}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} \sqrt{\frac{I_i}{F_{Pi}}} \sqrt{\frac{1 + \frac{I_i - I_a}{I_i}}{1 + \frac{F_{Pi} - F_{Pa}}{F_{Pi}}}} \quad [s^{-1}] \quad 9.1.14$$

2. Erste Biegeüberschwingung.

$$v_1 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\zeta_{B1}^{*2}}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} \sqrt{\frac{I_i}{F_{Pi}}} \sqrt{\frac{1 + \frac{I_i - I_a}{I_i}}{1 + \frac{F_{Pi} - F_{Pa}}{F_{Pi}}}} \quad [s^{-1}] \quad 9.1.1.15$$

3. Zweite Biegeüberschwingung.

$$v_2 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\zeta_{B2}^{*2}}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} \sqrt{\frac{I_i}{F_{Pi}}} \sqrt{\frac{1 + \frac{I_i - I_a}{I_i}}{1 + \frac{F_{Pi} - F_{Pa}}{F_{Pa}}}} \quad [s^{-1}] \quad 9.1.1.16$$

4. Dritte Biegeüberschwingung.

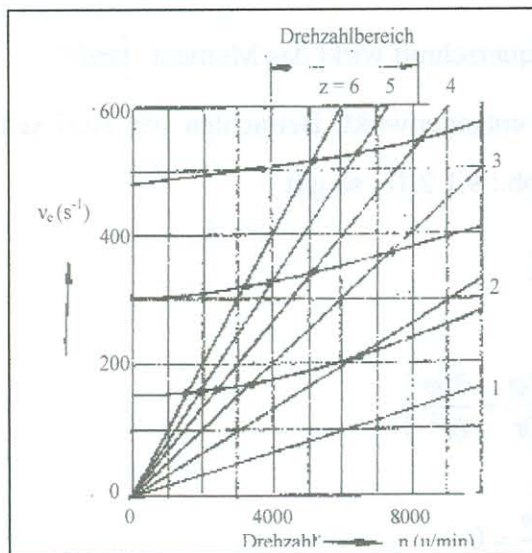
$$v_3 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\zeta_{B3}^{*2}}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}} \sqrt{\frac{I_i}{F_{Pi}}} \sqrt{\frac{1 + \frac{I_i - I_a}{I_i}}{1 + \frac{F_{Pi} - F_{Pa}}{F_{Pi}}}} \quad [s^{-1}] \quad 9.1.1.17$$

Die Werte für die Profilflächen  $F_p$  und die Flächenträgheitsmomente  $I$  um die flache Kante der Profile sind dem Abschnitt 6.5 zu entnehmen.

Einspannbedingungen	$\zeta_{B1}^{*2}$	$\zeta_{B2}^{*2}$	$\zeta_{B3}^{*2}$	$\zeta_{B4}^{*2}$
	1,875	4,694	7,855	10,996
	0,7228	7,8358	11,0	14,137
	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$

Abb.: 9.1.1.1 Biegeschwingungen einer Verdichterschaukel.

Fliehkraft bei Rotation eine Versteifung des Schaufelblattes und damit eine Erhöhung der Schaufeleigenfrequenz ein. In der Praxis wird der Fliehkraftereinfluss auf die Eigenfrequenz



durch die ganz einfache Näherungsbeziehung

$$K = \frac{1,5 \left( r_i + \frac{L}{2} \right)}{L} \quad 9.1.1.18$$

berücksichtigt. Für die Eigenfrequenz der rotierenden Laufschaufel gilt dann:

$$v_{Rot} = \sqrt{v_i^2 + K \left( \frac{n}{60} \right)^2} \quad 9.1.1.19$$

Die Genauigkeit der Berücksichtigung durch diese Näherungsmethode ist nach den Messungen Müller /81/ sehr gut.

Abb.: 9.1.1.2 Resonanzschaubild für Laufschaufeln Biegegrundschwingungen verschiedener Verdichterstufen /80/.

Störungen in der Strömung des Gases wie Nachlaufdübeln an den Profilen und Rippen am Verdichtereinlauf, Zonen abgerissener Strömungen u.a. treten mit einem Vielfachen des Umlaufs auf. Die Erregerfrequenz ist somit:

$$\nu = z \frac{n}{60}$$

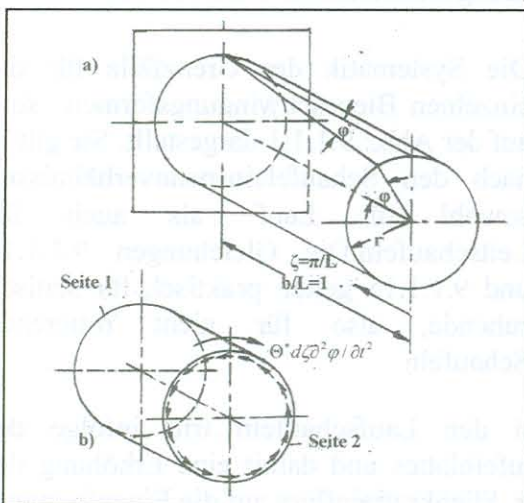
Ist diese Frequenz gleich der Eigenfrequenz der Schaufeln, so tritt Resonanz auf. Die Resonanzdrehzahl ergibt sich somit aus der Schaufelfrequenz zu:

$$n_{Res} = \frac{60}{z} \nu$$

Von den einzelnen Biegeschwingsformen interessieren vor allem die Biegegrundschwingungen über die flache Kante des Profils da sie am gefährlichsten sind. Die Abb.: 9.1.1.2 zeigt z.B. das aus /80/ entnommene Resonanzschaubild für die Laufschaufelgrundschwingungen verschiedener Verdichterschaufeln eines Axialverdichters.

### 9.1.2 Die Torsionsschwingungen.

Zur Ableitung der Schwingungsgleichung betrachten wir einen Stab mit gleichem Querschnitt wie ihn die Abb.: 9.1.2.1a darstellt.



Der Zusammenhang zwischen dem Verdrehwinkel  $\varphi$  an der Stirnseite des Stabes und dem Verdrehwinkel  $\vartheta$  längs der Längenkoordinate  $\zeta$  ist gegeben durch:

$$\tan \vartheta = r \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$$

Die dabei auftretende Schubspannung beträgt

$$\tau = G \tan \vartheta = Gr \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$$

bzw. die Schubspannungsänderung entlang der Längenkoordinate

$$\frac{\partial \tau}{\partial \zeta} = Gr \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2}$$

wobei G der Gleitmodul des Werkstoffes ist. In

Abb.: 9.1.2.1 Zur Ableitung der

Torsionsschwingungen.

einem Stabquerschnitt wirkt das Moment  $\int r dF$

dem das Moment der Trägheitskräfte  $I_p \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)$  entgegenwirkt. Betrachten wir zwei sehr dicht beieinander liegende Stabquerschnitte nach Abb.: 9.1.2.1b, so gilt für die Seite 1

$$\int \tau r dF = I_p \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

und für die Seite 2

$$\int \left( \tau + \frac{\partial \tau}{\partial \zeta} \right) r dF = I_p \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)$$

bzw. die Differenz

$$G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \int r^2 dF - I_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Nun ist aber für  $d\zeta = 1$

$$\Theta^* = \frac{\gamma}{g} \int r^2 dF$$

und somit

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} - \frac{\gamma}{g} \frac{I_p}{G\Theta^*} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad 9.1.2.1$$

wobei  $\Theta^*$  der Drillwiderstand und  $I_p$  das polare Trägheitsmoment der Profile nach Abschnitt 6.5 sind. Bei den Schaufelprofilen genügt es, wenn man für das polare Trägheitsmoment  $I_p$  das Trägheitsmoment  $I_{\max}$  um die hohe Kante des Profils einsetzt.

Das hat den Vorteil, dass sowohl der Drillwiderstand als auch das Trägheitsmoment nur noch von der maximalen Profildicke abhängig ist. Haben Schaufeln über deren Länge linear veränderliche Profildicken genügt es, die Torsionsschwingungen für die mittlere relative Profildicke ( $d/l_m$ ) zu berechnen. Dies ist nach /82/ zulässig und liefert brauchbare Werte. Damit genügt es aber auch, wenn die Gleichung für die Torsionsschwingung für Schaufeln mit konstantem Querschnitt ermittelt wird.

Führen wir in obige Gleichung die Abkürzung

$$\frac{g}{\gamma} \frac{G\Theta^*}{I_p} = a^2 \quad 9.1.2.2$$

ein, so erhalten wir für die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \quad 9.1.2.3$$

Zur Lösung der Gleichung machen wir den Partikuläransatz

$$\varphi = \varphi(\zeta, t) = G(\zeta)Z(t) \quad 9.1.2.4$$

Mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} &= Z(t)G'(\zeta) & \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= G(\zeta)Z'(t) \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} &= Z(t)G''(\zeta) & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= G(\zeta)Z''(t) \end{aligned}$$

erhalten wir:

$$a^2 Z(t)G''(\zeta) = G(\zeta)Z''(t)$$

oder

$$\frac{Z''(t)}{a^2 Z(t)} = \frac{G''(\zeta)}{G(\zeta)} \quad 9.1.2.5$$

Da die linke Seite nicht von  $\zeta$  und die rechte Seite nicht von  $t$  abhängig ist, hat jede Seite eine bestimmte Größe, die mit  $-\lambda^2$  als Eigenwert bezeichnet werden soll. Damit gelten dann folgende zwei Gleichungen:

$$Z''(t) + a^2 \lambda^2 Z(t) = 0 \quad 9.1.2.6$$

$$G''(\zeta) + \lambda^2 G(\zeta) = 0 \quad 9.1.2.7$$

Das sind zwei homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Für den Eigenwert  $\lambda$  der Aufgabe setzen wir

$$\lambda = n\pi \quad 9.1.2.8$$

mit  $n = 1, 2, 3$ , usw.

Lösen wir zunächst die Gl.: 9.1.2.7 mit den Ansatz

$$G(\zeta) = e^{\varepsilon\zeta} \quad 9.1.2.9$$

und dessen Ableitungen:

$$G'(\zeta) = \varepsilon e^{\varepsilon\zeta}$$

$$G''(\zeta) = \varepsilon^2 e^{\varepsilon\zeta}$$

Die Gl.: 9.1.2.7 erhält dann die Form

$$\varepsilon^2 e^{\varepsilon\zeta} + \lambda^2 e^{\varepsilon\zeta} = 0$$

woraus unmittelbar

$$\varepsilon^2 + \lambda^2 = 0$$

folgt. Die Wurzeln sind somit:

$$\varepsilon = \pm \lambda$$

Da nun

$$e^{\pm i\lambda} = \cos \lambda \pm i \sin \lambda$$

ist, wird aus der Gl.: 9.1.2.9:

$$G(\zeta) = A_1 \cos \lambda\zeta + B_1 \sin \lambda\zeta \quad 9.1.2.10$$

Nach der gleichen Art kann die Gl.: 9.1.2.6 gelöst werden und man erhält den Ausdruck:

$$Z(t) = A_2 \cos a\lambda t + B_2 \sin a\lambda t \quad 9.1.2.11$$

Betrachten wir wieder die Gl.: 9.1.2.10.

Für  $\zeta = 0$  ist  $G(\zeta) = 0$ . Daraus folgt, dass auch  $A_1 = 0$  ist. Die Gleichung nimmt dann die Form

$$G(\zeta) = B_1 \sin \lambda\zeta \quad 9.1.2.12$$

an. Nun betrachten wir die Zeitfunktion nach Gl.: 9.1.2.11 und setzen:

$$a\lambda t = \varphi$$

Durch Differenzieren erhalten wir:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = a\lambda = \omega \quad 9.1.2.13$$

Für die Zeitfunktion kann dann geschrieben werden:

$$Z(t) = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t$$

Zur Zeit  $t = 0$  soll der Stab seine größte Winkelamplitude haben und die Winkeländerungsgeschwindigkeit soll Null sein. Das heißt aber auch, dass zur Zeit  $t = 0$  auch  $Z'(t)$  Null ist. Aus dieser Bedingung erhält man aus  $G'(0) = 0$  auch  $B_2 = 0$ .

Aus Gl.: 9.1.2.4 erhält man für den Verdrehwinkel:

$$\varphi(\zeta, t) = C \sin \lambda\zeta \cos \omega t \quad 9.1.2.14$$

Mit den Gleichungen 9.1.2.13 und 9.1.2.2 lässt sich auch die Torsionsschwingungsfrequenz angeben.

$$\nu_T = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{a\lambda}{2\pi} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{g G \Theta^*}{\gamma I_{\max}}} \quad 9.1.2.15$$

Den Wert  $n$  erhalten wir aus der Gleichung für den Verdrehwinkel. Zu Zeit  $t = 0$  soll der Verdrehwinkel seinen maximalen Wert  $\varphi_0$  haben. Dies ist der Fall, wenn der Ausdruck

$\lambda\zeta = \pi/2$  ist. Aus der Gl.: 9.1.2.14 erhält man dann:

$$\varphi(\zeta, 0) = \varphi_0 = C \sin \frac{\pi}{2} \cos 0$$

oder

$$C = \varphi_0$$

Und unter Berücksichtigung der Gl.: 9.1.2.8

$$\varphi_0 = \varphi_0 \sin(n\pi\zeta)$$

bzw.

$$\sin(n\pi\zeta) = 1 \quad 9.1.2.16$$

Für die einseitig eingespannte Schaufel liegt  $\varphi_0$  bei  $\zeta = 1$ . Somit gelten für die Laufschaufeln folgende Werte:

Grundschiwingung	$n_0 = \frac{1}{2}$
1. Oberschiwingung	$n_1 = \frac{3}{2}$
2. Oberschiwingung	$n_2 = \frac{5}{2}$
3. Oberschiwingung	$n_3 = \frac{7}{2}$

Für die zweiseitig eingespannte Leitschaufel liegt  $\varphi_0$  bei  $\zeta = \frac{1}{2}$ . Die Werte für die Leitschaufeln sind dann:

Grundschiwingung	$n_0 = 1$
1. Oberschiwingung	$n_1 = 2$
2. Oberschiwingung	$n_2 = 3$
3. Oberschiwingung	$n_3 = 4$

Die Systematik der einzelnen Torsionsschwingungsformen ist auf Abb.: 9.1.2.2 dargestellt. Hinsichtlich der Schwingungserregung siehe Abschnitt 9.1.1.

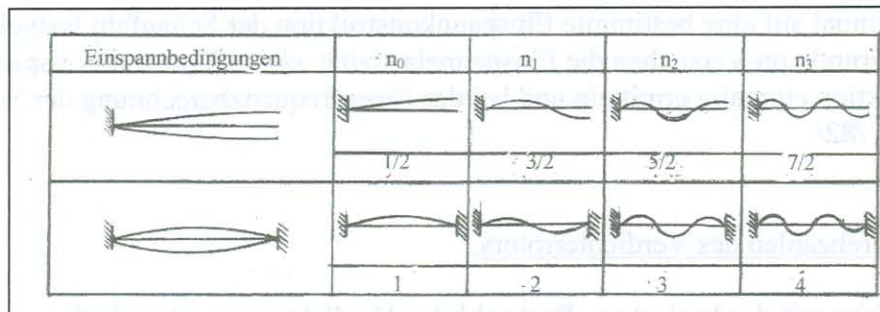


Abb.: 9.1.2.2 Torsionsschwingungen einer Verdichterschaufel.

### 9.1.3 Das Problem der Einspannelastizität der Schaufeln.

In den Abschnitten 9.1.1 und 9.1.2 hatte wir drei Grenzfälle hinsichtlich der Schaufeleinspannungen betrachtet. Diese waren:

- einseitig fest eingespannte Schaufeln
- zweiseitig fest eingespannte Schaufeln
- zweiseitig gelenkig eingespannte Schaufeln

Diese Grenzfälle lassen sich in der Praxis nicht verwirklichen. Die Gründe dafür sind u.a. die Nachgiebigkeit des Konstruktionsmaterials und die Fertigungstoleranzen. Der Unterschied zwischen den theoretisch ermittelten Eigenfrequenzen und den in der Praxis tatsächlich an den Schaufeln auftretenden Eigenfrequenzen können mitunter beträchtlich sein und stellen somit einen großen Unsicherheitsfaktor dar. Meistens ist man gezwungen, für die vorliegende



Schaufel mit ihrer Einspannkonstruktion experimentelle Untersuchungen durchzuführen. Dabei wird der sogenannte Einspannfaktor

$$K_E = \frac{\nu_{\text{exp}}}{\nu_{\text{ber}}}$$

an den Originalschaufeln ermittelt.  $\nu_{\text{exp}}$  ist die gemessene Eigenfrequenz und  $\nu_{\text{ber}}$  die bei fester Einspannung berechnete Eigenfrequenz der Schaufeln.

Bei der experimentellen Ermittlung der Eigenfrequenzen und Schwingungsformen können die Schaufeln mit ihrer Originaleinspannung mit Hilfe eines durch einen Tonfrequenzgenerators mit regelbarer Frequenz gespeisten Schwingungserregers über einen elastischen Stift zum Schwingen angeregt werden. Steigert man die Frequenz, so erhält man eine Reihe von Resonanzen deren maximale Töne scharf erkennbar und deren Frequenz am Tonfrequenzgenerator in Herz (Hz) abgelesen werden können. Tastet man die Schaufeln mit einer gefundenen Eigenschwingungsresonanz in mehreren horizontalen und vertikalen Geraden ab, kann man die Knotenlinien, wie sie schematisch auf den Abbildungen 9.1.1.1 und 9.1.2.2 dargestellt sind, ermitteln. So erhält man die zugehörige Schwingungsform.

Die einzelnen Schwingungsformen haben auf den Schaufeln folgende Knotenlinien /82/:

Biegegrundschwingung:	Keine Knotenlinie innerhalb der Schaufel
1. Biegeoberschwingung:	Eine Querknotenlinie
2. Biegeoberschwingung:	Zwei Querknotenlinien
Torsionsgrundschwingung:	Eine Längsknotenlinie
1. Oberschwingung:	Eine Längs- und eine Querknotenlinie
2. Oberschwingung:	Eine Längs- und zwei Querknotenlinien.

Hat man sich einmal auf eine bestimmte Einspannkonstruktion der Schaufeln festgelegt, so kann man auf Grund von Versuchen die Einspannelastizität  $\varepsilon E = f(\text{Konstruktionsparametern})$  dieser Konstruktion einmalig ermitteln und bei der Eigenfrequenzberechnung der Schaufeln berücksichtigen /82/.

## 9.2 Kritische Drehzahlen des Verdichterrisors.

Wenn wir uns hier mit der kritischen Drehzahl des Verdichterrisors beschäftigen, so wollen wir dabei nicht die vielen aus der einschlägigen Fachliteratur bekannten Verfahren und Methoden behandeln. Welche der Verfahren und Methoden in der Praxis sinnvoll anzuwenden ist, soll dem Projektgenieur bzw. Fachmann überlassen bleiben. Vielmehr wollen wir auf einige mit der kritischen Drehzahl des Verdichterrisors in Zusammenhang stehenden Aspekte eingehen. Wenn dabei einige mathematische Ableitungen benutzt werden. Sollen sie keine bindenden Richtlinien darstellen sondern zur Erläuterung dienen.

Bei Gasturbinen, insbesondere bei denen von Flugtriebwerken, sind am Verdichtergehäuse Steuer- und Regelgeräte sowie Rohrleitungen angeordnet, die beim Lauf der Triebwerke in Hinblick auf eine ungestörtes Arbeiten keine größeren Wechselbeschleunigungen als  $2g$  unterworfen werden dürfen /83/.

Ist die Schwingungsamplitude eine Sinusschwingung,  $\eta = \eta_0 \sin \omega t$ , so ist die

Beschleunigung:

$$b = \ddot{\eta} = \eta_0 \omega^2 = \eta_0 \left( \frac{\pi}{30} n \right)^2$$

bzw. die zulässige Schwingungsamplitude

$$\eta_0 = \frac{b}{\left(\frac{\pi m}{30}\right)^2} \quad 9.2.1$$

die bei Verdichterrotern mit hohen Drehzahlen nur sehr kleine Werte zulassen und in der Größenordnung von  $\pm 0,002$  bis  $\pm 0,03$  mm liegen.

Betrachten wir zunächst eine zweifach gelagerte elastische Welle mit der in der Mitte befindlichen Scheibe der Masse  $m$  nach Abb.: 9.2.1.

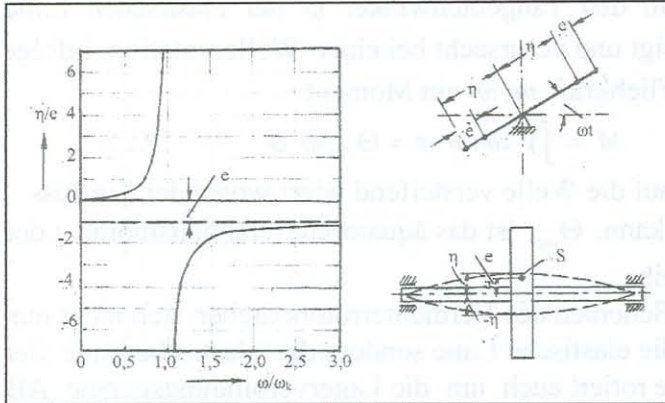


Abb.: 9.2.1 Biegekritische Drehzahl einer rotierenden Welle mit einer Scheibe.

Der Schwerpunkt  $S$  der Scheibe soll dabei um die Exzentrizität  $e$  außerhalb der Lagerverbindungsgeraden  $AB$  liegen. Bei Rotation der Welle wird infolge der Scheibenmassenfliehkraft an dieser Stelle eine Wellendurchbiegung

$$\eta = m\omega^2(\eta + e)\alpha$$

hervorgerufen. Dabei ist  $\alpha$  auf die noch einzugehende Einflusszahl.

Daraus ergibt sich:

$$\frac{\eta}{e} = \frac{m\omega^2\alpha}{1 - m\omega^2\alpha}$$

Für die kritische Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_K^2 = \frac{1}{m\alpha}$$

wird die Wellendurchbiegung unendlich groß. Setzen wir diesen Ausdruck ein, so gilt:

$$\frac{\eta}{e} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_K}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_K}\right)^2} \quad 9.2.2$$

Die Wellendurchbiegung ist also direkt proportional der Exzentrizität  $e$  und wir erkennen den Zusammenhang mit der zulässigen Schwingungsamplitude nach Gl.: 9.2.1. Auf der Abb.: 9.2.1 sind die Auswertungsergebnisse der Gl.: 9.2.2 dargestellt. Im Bereich  $0 < \omega/\omega_K < 1,0$  wächst die Durchbiegung der Welle mit größer werdendem  $\omega/\omega_K$  immer steiler an. Das bedeutet, dass der Scheibenschwerpunkt außerhalb der Lagerverbindungsgeraden  $AB$  und außerhalb des Wellendurchstoßpunktes  $W$  durch die Scheibe liegt und den Wert  $\eta + e$  hat. Für  $\omega/\omega_K > 1$  ist  $\eta$  negativ und nähert sich für große Werte von  $\omega/\omega_K$  asymptotisch dem Werte. Der Schwerpunkt des Systems wandert zwischen die Lagerverbindungsgerade  $AB$  und den Wellendurchstoßpunkt  $W$  der Scheibe und hat den Wert  $-(\eta - e)$ . Im überkritischen Drehzahlbereich zentriert sich die umlaufende Scheibe also selbst.

Mehrstufige Axialverdichter haben meistens einen zweifach gelagerten Rotor der durch die Anzahl von  $n$  Rotorscheiben mit  $n$  Massen belegt ist. Jede dieser Rotorscheiben hat seine eigene kritische Drehzahl. Deshalb muss man bei einem mehrstufigen Verdichter von einem

kritischen Drehzahlbereich sprechen. Aus Abschnitt 9.1 wissen wir, dass der Betriebsbereich des Verdichters hinsichtlich der Sperrdrehzahlen infolge der Schaufelschwingungen belastet ist. Folglich wird man in der Praxis einen unterkritischen Verdichterrotor anstreben wobei die untere kritische Drehzahlgrenze des kritischen Drehzahlbereiches entsprechend der Abb.: 9.2.1 mindestens 20 bis 25% über der maximalen Verdichterdrehzahl liegen soll. Im allgemeinen ist das durch einen großen Wellentrommeldurchmesser zu erreichen.

Ein weiterer Gesichtspunkt bei der Ermittlung der kritischen Verdichterrotordrehzahl ist das Fliehkräfte rückstellmoment bzw. die Kreiselwirkung der einzelnen auf dem Rotor vorhandenen Scheiben. Betrachten wir uns eine Scheibe eines mehrstufigen Verdichterrotors die außerhalb der maximalen Durchbiegung der elastischen Linie des Rotors nach Abb.: 9.2.2 liegt. Diese Scheibe liegt um den Tangentenwinkel  $\varphi$  der elastischen Linie

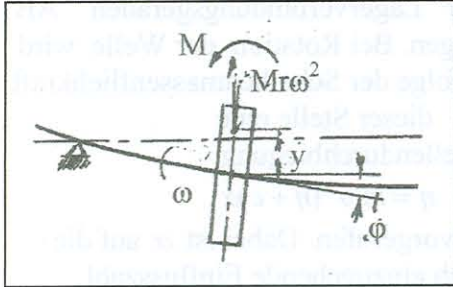


Abb.: 9.2.2 Das Rückstellmoment einer Rotorscheibe.

Ist  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der Scheiben um die elastische Linie, so soll  $\lambda = n\omega$  die Winkelgeschwindigkeit der elastischen Linie um die Lagerverbindungsgeraden AB sein. Dann bedeutet:

- $n = +1$  synchroner Gleichlauf
- $n = -1$  synchroner Gegenlauf.

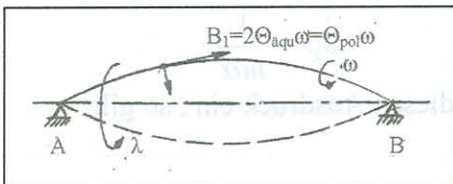


Abb.: 9.2.3 Rotation der Elastischen Linie.

bei den Fälle für die Laufruhe des Verdichters den kritischen Fall darstellt. Zu diesem Zweck sind in Abb.: 9.2.3 die wirksamen Drallvektoren an der elastischen Linie eingezeichnet wobei für sehr dünne Kreisscheiben  $\Theta_{pol} = 2\Theta_{aqu}$  gesetzt werden kann. Das an der betrachteten Stelle wirksame Moment ist dann:

$$\begin{aligned} -M &= B_1 \lambda \varphi - B_2 \lambda \\ -M &= 2\Theta \omega \lambda - \Theta \lambda \varphi \lambda \\ -M &= \omega^2 \Theta \varphi n (2 - n) \end{aligned} \quad 9.2.4$$

bzw. mit  $n = \lambda \omega$

Die Zentrifugalkraft hängt von der Winkelgeschwindigkeit  $\lambda$  ab:

$$P = n^2 m \omega^2 \eta \quad 9.2.5$$

Für die Durchbiegung und den Neigungswinkel der elastischen Linie erhalten wir mit den noch zu behandelnden Einflusszahlen

$$\eta = \alpha P + \gamma M$$

$$\varphi = \delta P + \beta M$$

und mit den Gleichungen 9.2.4 und 9.2.5

$$\frac{1}{\omega^2} \eta = \alpha n^2 m \eta - \gamma \Theta \varphi n (2 - n)$$

$$\frac{1}{\omega^2} \varphi = \delta n^2 m \eta - \beta \Theta \varphi n (2 - n)$$

Die Lösung der Gleichungen erhalten wir, wenn die zugehörige Determinante Null gesetzt wird:

$$\begin{vmatrix} \alpha n^2 m - \frac{1}{\omega^2} & -\gamma \Theta n (2 - n) \\ \gamma n^2 m & -\beta \Theta n (2 - n) - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0$$

Das ergibt eine Gleichung zweiten Grades von der Form:

$$\omega_K^2 = A \pm \sqrt{A^2 - B}$$

Uns interessiert in diesem Falle nicht die kritische Drehzahl einer elastischen Welle allein mit der de Laval als erster Ingenieur durch praktische Versuche nachwies, dass man eine Welle auch schneller als mit der kritischen Drehzahl laufen lassen kann. Wir merken uns nur: Bei der Ermittlung der kritischen Drehzahl ist

- für synchronen Gleichlauf ( $n = +1$ )  $\Theta_{\text{äqu}}$
- für synchronen Gegenlauf ( $n = -1$ ) statt  $\Theta_{\text{äqu}}$  ist nunmehr  $-3 \Theta_{\text{äqu}}$

in unseren Rechnungen einzusetzen.

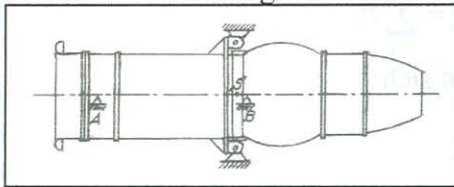


Abb.: 9.2.4 Schemadarstellung einer Triebwerksaufhängung.

Ein weiterer Gesichtspunkt für die kritische Drehzahl ergibt sich bei den Axialverdichtern in den Strahltriebwerken für die Luftfahrt durch deren Aufhängung in der Triebwerksgondel der Flugzeuge.

Die Abb.: 9.2.4 zeigt schematisch eine derartige Aufhängung. Das Triebwerk wird in der Ebene seines Schwerpunktes, in dessen Nähe sich das hintere Verdichterlager im Innern des Brennkammergehäuses

befindet, aufgehängt. Dadurch kann das hintere Verdichterlager B als starr angesehen werden. Das vordere Verdichterlager liegt im Lagerstern der Einlaufrippen und unterliegt der Biegeelastizität des in extremen Leichtbau ausgeführten Verdichtergehäuses. Eine der Hauptbeanspruchungen sind die Beschleunigungskräfte bei verschiedenen Flugzuständen wie z.B. beim Abfangen oder einer Steilkurve eines Flugzeuges die das 4 bis 6-fache der Erdbeschleunigung betragen können /84/. Die Elastizität der Lagerung A im Lagerstern der Einlaufrippen kann dabei fast von der Größe der Biegeelastizität des Rotors selbst sein /83/. Damit erhalten wir ein Wellensystem, wie es die Abb.: 9.2.5 zeigt. Wir haben also einen mit  $m_i$  Massen belegten Rotor vor uns, dessen Lagergerade durch die Lagerelastizität

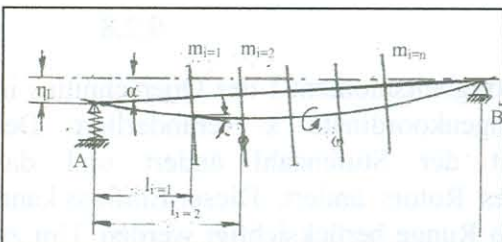


Abb.: 9.2.5 Schema eines Rotors mit elastischer Lagerung

um den Winkel  $\alpha$  geneigt ist. Die Lagerdurchbiegung  $\eta_L$  ist von der Lagerfederkonstanten  $C$  abhängig die am sichersten durch das Experiment zu ermitteln ist. Die Durchbiegung des Lagers A ist:

$$\eta_L = C_L A$$

mit A als Lagerkraft. Für die Neigung der Lagerverbindungsgeraden gilt:

$$\tan \alpha_L \approx \alpha_L \approx \frac{\eta_L}{L}$$

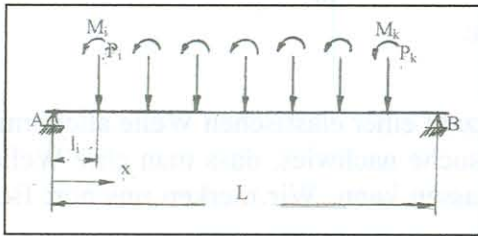
oder für eine beliebige Stelle des Rotors

$$\eta_{Li} = \alpha_L (L - l_i)$$

Analog gilt auch für den Tangentenwinkel an der elastischen Linie:

$$\varphi_i = \varphi_{el} - \alpha_L$$

Wir sehen, dass sich die Wellendurchbiegung und auch das Rückstellmoment der Scheiben dadurch merkbar verändern können und damit auch die kritische Drehzahl des Verdichterrotors. Diese Einflüsse können bei der Ermittlung der bereits genannten Einflusszahlen berücksichtigt werden. Diesen Einflusszahlen wollen wir uns zuwenden.



Da wir uns nur der Problematik zuwenden wollen betrachten wir eine mit K Massen belegte Welle mit den zwei starren Lagern A und B wie sie die Abb.: 9.2.6 zeigt. Bei Rotation der Welle treten außerdem noch die Momente  $M_i$  bis  $M_K$  entsprechend der Abb.: 9.2.2 auf.

Abb.: 9.2.6 Eine mit den Kräften  $P_i$  bis  $P_K$  und den Momenten  $M_i$  bis  $M_K$  belasteten Welle.

Da alle in senkrechter Richtung wirkenden Kräfte Null ergeben müssen, erhalten wir die Lagerkraft:

$$A = \sum_{i=1}^K P_i$$

Setzen wir das Moment um den Lagerpunkt A an, so ergibt sich:

$$B = \sum_{i=1}^K P_i l_i - \sum_{i=1}^K M_s$$

wobei  $M_s$  durch die Gl.: 9.2.3 gegeben ist. Die Auflagekraft ist somit

$$A = \sum_{i=1}^K P_i - \sum_{i=1}^K P_i l_i + \sum_{i=1}^K M_s$$

Das auf die Welle an irgend einer Stelle x wirkende Moment beträgt:

$$M = Ax = P_1 x + P_2 x + P_3 x \dots - P_1 l_1 x - P_2 l_2 x - P_3 l_3 x \dots + M_{s1} x + M_{s2} x + M_{s3} x \dots \quad 9.2.6$$

Nach den Satz con Casigliano gilt für die Wellendurchbiegung

$$\eta = \int \frac{1}{EI} M \frac{\partial M}{\partial P} dx \quad 9.2.7$$

und für den Tangentenwinkel der elastischen Linie

$$\varphi = \int \frac{M}{EI} dx \quad 9.2.8$$

Sowohl der Elastizitätsmodul E als auch das Flächenträgheitsmoment I des Querschnittes in bezug auf die Biegeachse sind längs der Längenkoordinate x veränderlich. Der Elastizitätsmodul weil sich die Temperatur mit der Stufenzahl ändert und das Flächenträgheitsmoment weil sich der Querschnitt des Rotors ändert. Dieser Einfluss kann Mittels Fourierreihen und dem Faltungsverfahren von Runge berücksichtigt werden. Um zu zeigen wie man zu den bereits genannten Einflusskennzahlen kommen kann, wollen wir als Vereinfachung E und I konstant halten. In der Praxis ist die Veränderlichkeit zu berücksichtigen.

Wollen wir z.B. die Wellendurchbiegung an der Stelle  $i = 1$  wissen, so differenzieren wir die Gl.: 9.2.6 nach der dort wirksamen Kraft

$$\frac{\partial M}{\partial P_1} = x \left( 1 - \frac{l_1}{L} \right) \quad 9.2.9$$

Setzen wir die Gl.: 9.2.6 und 9.2.9 in die Gl.: 9.2.7 ein und integrieren bis zur Stelle  $P_1$ , so erhalten wir die Wellendurchbiegung bei  $P_1$  bzw.  $l_1$ .

$$\eta_1 = \frac{P_1 l_1^3}{3EI} \left[ \left( 1 - \frac{l_1}{L} \right) - \frac{l_1}{L} \right] + M_{S1} \frac{l_1^3}{3EI} \left( 1 - \frac{l_1}{L} \right) + \frac{P_2 l_1^3}{3EI} \left[ \left( 1 - \frac{l_2}{L} \right) - \frac{l_1}{L} \right] + M_{S2} \frac{l_1^3}{3EI} \left( 1 - \frac{l_1}{L} \right) + \dots \quad 9.2.10$$

Mit den Gleichungen 9.2.6 und 9.2.8 erhalten wir an dieser Stelle analog den zugehörigen Tangentenwinkel der elastischen Linie:

$$\varphi_1 = \frac{l_1^2}{2EI} \left[ \sum_{i=1}^K P_i - \sum_1^K P_i l_i + \sum_1^K M_{S_i} \right] \quad 9.2.11$$

Auf diese Weise kann an jedem Scheibensitz auf der Welle die zugehörige Wellendurchbiegung und der Tangentenwinkel ermittelt werden. Die so erhaltenen Gleichungen können damit auf die Form

$$\begin{aligned} \eta_1 &= P_1 \alpha_{11} + P_2 \alpha_{12} + P_3 \alpha_{13} + P_4 \alpha_{14} + \dots \dots \dots \gamma_{11} M_{S1} + \gamma_{12} M_{S2} + \gamma_{13} M_{S3} + \dots \dots \dots \\ \eta_2 &= P_1 \alpha_{21} + P_2 \alpha_{22} + P_3 \alpha_{23} + P_4 \alpha_{24} + \dots \dots \dots \gamma_{21} M_{S1} + \gamma_{22} M_{S2} + \gamma_{23} M_{S3} + \dots \dots \dots \\ \eta_3 &= \text{-----} \\ &\text{-----} \\ &\text{-----} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= P_1 \delta_{11} + P_2 \delta_{12} + P_3 \delta_{13} + \dots \dots \dots \beta_{11} M_{S1} + \beta_{12} M_{S2} + \beta_{13} M_{S3} + \dots \dots \dots \\ \varphi_2 &= P_1 \delta_{21} + P_2 \delta_{22} + P_3 \delta_{23} + \dots \dots \dots \beta_{21} M_{S1} + \beta_{22} M_{S2} + \beta_{23} M_{S3} + \dots \dots \dots \\ \varphi_3 &= \text{-----} \\ &\text{-----} \\ &\text{-----} \end{aligned}$$

gebracht werden womit die Einflusszahlen deutlich erkennbar sind. Bei Rotation der Welle ist aber die Scheibenfliehkraft als wirksame Kraft einzusetzen

$$P_K = m_K \omega^2 \eta_K$$

und für das Moment hatten wir

$$M_S = -\Theta_K \omega^2 \varphi_K$$

gefunden. Wir erhalten damit zwei Gruppen von Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \sum \left[ \left( \alpha_{iK} m_K - \frac{1}{\omega^2} \right) \eta - \gamma_{iK} \Theta_K \varphi_K \right] &= 0 \\ \sum \left[ \delta_{iK} m_K - \left( \beta_{iK} \Theta_K + \frac{1}{\omega} \right) \varphi_K \right] &= 0 \end{aligned}$$

Diese zwei homogenen Gleichungen können durch Nullsetzen der zugehörigen Determinante gelöst werden.

$$\left| \alpha_{11} m_1 - \frac{1}{\omega^2} \quad \alpha_{12} m_2 \quad \alpha_{13} m_3 \quad \left| \text{ usw. } \right. \begin{array}{l} -\gamma_{11} \Theta_1 \\ -\gamma_{12} \Theta_2 \end{array} \quad \left| \text{ usw. } \right. \right.$$

$$\left| \alpha_{21} m_1 \quad \alpha_{22} m_2 - \frac{1}{\omega^2} \quad \alpha_{23} m_3 \quad \left| \text{ usw. } \right. \begin{array}{l} -\gamma_{21} \Theta_1 \\ -\gamma_{22} \Theta_2 \end{array} \quad \left| \text{ usw. } \right. \right.$$

$$\left| \alpha_{31} m_1 \quad \alpha_{32} m_2 \quad \alpha_{33} m_3 - \frac{1}{\omega^2} \quad \left| \text{ usw. } \right. \begin{array}{l} -\gamma_{31} \Theta_1 \\ -\gamma_{32} \Theta_2 \end{array} \quad \left| \text{ usw. } \right. \right.$$

$$\left| \delta_{11} m_1 \quad \delta_{12} m_2 \quad \delta_{13} m_3 \quad \left| \text{ usw. } \right. \begin{array}{l} -\beta_{11} \Theta_1 - \frac{1}{\omega^2} \\ -\beta_{12} \Theta_2 \end{array} \quad \left| \text{ usw. } \right. \right.$$

$$\left| \delta_{21} m_1 \quad \delta_{22} m_2 \quad \delta_{23} m_3 \quad \left| \text{ usw. } \right. \begin{array}{l} -\beta_{21} \Theta_1 \\ -\beta_{22} \Theta_2 - \frac{1}{\omega^2} \end{array} \quad \left| \text{ usw. } \right. \right.$$

$$\left| \delta_{31} m_1 \quad \delta_{32} m_2 \quad \delta_{33} m_3 \quad \left| \text{ usw. } \right. \begin{array}{l} -\beta_{31} \Theta_1 \\ -\beta_{32} \Theta_2 \end{array} \quad \left| \text{ usw. } \right. \right.$$

Die Lösung der Determinante ergibt eine Gleichung in folgender Form

$$\frac{1}{\omega^{4n}} \left[ 1 - \omega^2 \sum (\alpha_{ii} m_i - \beta_{ii} \Theta_i) + \dots \right] = 0$$

wobei nur das größte Glied angegeben wurde.

Als Näherungslösung erhält man die kritische Drehzahl für den synchronen Gleichlauf

$$\omega_K = \frac{1}{\sqrt{\sum \alpha_{ii} m_i - \beta_{ii} \Theta_i}}$$

und nach den bereits gemachten Ausführungen für den synchronen Gegenlauf

$$\omega_K = \frac{1}{\sqrt{\sum \alpha_{ii} m_i + 3\beta_{ii} \Theta_i}}$$

Wie wir sehen, liegt die untere Grenze des kritischen Drehzahlbereiches beim synchronen Gegenlauf. Diese untere Grenze des kritischen Drehzahlbereiches sollte entsprechend der Abb.: 9.2.1 mindestens 20 bis 25 Prozent oberhalb der maximalen Verdichterdrehzahl liegen.

Um einen ruhigen Lauf des Verdichters bei hohen Drehzahlen zu erreichen, muss der aus einzelnen Scheiben bestehende Rotor möglichst schlagfrei zusammengesetzt werden. Wege dazu sind das Versetzen der einzelnen Scheiben in Drehrichtung und das Auswuchten des Rotors.

### 9.3 Gasschwingungen des im Verdichter befindlichen Gasvolumens.

Das Gasvolumen im Axialverdichter hat eine Eigenfrequenz. Wird dieses Gasvolumen mit einer bestimmten Erregerfrequenz beaufschlagt, kann es zu den sogenannten Pumperscheinungen im Verdichter kommen die auch zu Schaufelbrüchen führen können. Als Schwingungserreger können bei Gasturbinen als Beispiel die Anzahl der Brennkammern oder eine ungleichmäßige pulsierende Verbrennung des Kraftstoffes in der Brennkammer auftreten. Zur Behandlung des Problems denken wir uns ein Ersatzsystem wie es auf der Abb.: 9.3.1 dargestellt ist. Dieses System bestehe aus einem Verdichter mit der Eintrittsebene 1 und der Austrittsebene 2. Der Austrittsseite des Verdichters sei eine

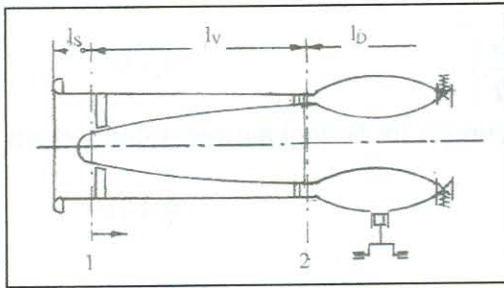


Abb.: 9.3.1 Ersatzsystem zur Ermittlung der Eigenfrequenz des Gasvolumens im Verdichter.

Gasgeschwindigkeit am Verdichtereintritt:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\rho_2 F_2}{\rho_1 F_1} \frac{dx_2}{dt} \quad 9.3.1$$

und für die Beschleunigung:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\rho_2 F_2}{\rho_1 F_1} \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad 9.3.2$$

wobei die Veränderlichkeit der Gasdichte vernachlässigt wurde. Für die Drücke auf der Saugseite des Verdichters gilt:

Der statische Druck

$$p_1 = -\rho_1 h_s \quad 9.3.3$$

und der Beschleunigungsdruck in der Saugleitung

$$p_b = -\frac{m_1}{F_1} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\rho_1 l_s \left( \frac{\rho_2 F_2}{\rho_1 F_1} \right) \frac{d^2 x_2}{dt^2} \quad 9.3.4$$

Der Druckverlust durch Reibung in der Saugleitung beträgt:

$$\Delta p_{\xi s} = -\sum \xi_s \frac{\rho_1}{2} \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 = -\sum \xi_s \frac{\rho_1}{2} \left( \frac{\rho_2 F_2}{\rho_1 F_1} \right)^2 \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 \quad 9.3.5$$

Dabei wurde angenommen, dass die Verlustzahlen  $\sum \xi_s$  in der Ansaugleitung auch bei nicht stationärer Strömung des Gases konstant sind. Fassen wir die einzelnen Drücke zusammen so folgt:

$$p_s = -\rho_1 h_s - \rho_1 l_s \left( \frac{\rho_2 F_2}{\rho_1 F_1} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} - \sum \xi_s \frac{\rho_1}{2} \left( \frac{\rho_2 F_2}{\rho_1 F_1} \right)^2 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \quad 9.3.6$$

Analoge Betrachtungen für die Druckseite des Verdichters ergeben den statischen Druck am Verdichterdruckstutzen

$$p_2 = \rho_2 h_2 \quad 9.3.7$$

und den Beschleunigungsdruck

$$p_b = \frac{m}{F_2} \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} (l_d + x) \frac{d^2 x}{dt^2} \quad 9.3.8$$

Die Länge  $l_d$  ist aus der Kontinuitätsbeziehung mit dem Brennkammervolumen und dem Querschnitt in der Ebene 2 am Verdichteraustritt zu ermitteln.

Brennkammer angeschlossen an deren Ende eine Drossel auf die Betriebskennlinie des Verdichters eingestellt sein soll. Die Pumpe an der Brennkammer verkörpert schließlich die Erregerfrequenz.

Da der Massendurchsatz des Gases am Verdichtereintritt

$$m_1 = \rho_1 F_1 c_1 = \rho_1 F_1 \frac{dx_1}{dt}$$

und am Verdichteraustritt

$$m_2 = \rho_2 F_2 \frac{dx_2}{dt}$$

gleich sein muss, erhalten wir für die



Der Druckverlust durch Reibung beträgt:

$$\Delta p_{\xi d} = \sum \xi_d \frac{\rho}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \quad 9.3.9$$

Für den Impuls- bzw. Erregerdruck infolge der Schwingungen im Brennkammersystem setzen wir

$$p_E = -p_0 \sin(\omega t) \quad 9.3.10$$

wobei  $p_0$  die Druckamplitude darstellt.

Fassen wir die Drücke auf der Druckseite des Verdichters zusammen:

$$p_d = \rho_2 h_2 + \rho_2 (l_d + x) \frac{d^2 x}{dt^2} + \sum \xi_d \frac{\rho}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - p_0 \sin(\omega t) \quad 9.3.11$$

Mit den Drücken auf der Saug- und Druckseite des Verdichters erhalten wir dessen manometrischen Druck

$$p = p_d - p_s$$

oder mit den Gleichungen 9.3.6 und 9.3.1:

$$p = \rho_2 h_d + \rho_2 (l_d + z) \frac{d^2 x}{dt^2} + \sum \xi_d \frac{\rho_2}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 - p_0 \sin(\omega t) + \rho_1 h_s + \rho_1 l_s \left( \frac{\rho_2 F_2}{\rho_1 F_1} \right) \frac{d^2 x}{dt^2} + \sum \xi_s \frac{\rho_1}{2} \left( \frac{\rho_2 F_2}{\rho_1 F_1} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \quad 9.3.12$$

Diese Gleichung gibt den zeitlich veränderlichen Förderdruck des Verdichters beim Schwingvorgang des Gasvolumens an.

Aus Verdichterversuchen oder aus den Kennfeldrechnungen seien die Linien konstanter Drehzahlen im Verdichterkennfeld bekannt (siehe Abschnitt 7.2.1). Diese Kennlinien gelten jedoch nur für den stationären Strömungsvorgang. Als Näherungsansatz für den zeitlich veränderlichen Druck  $p$  wird der bei stationärer Strömung ermittelte Förderdruck unter einer Beschleunigung bzw. Verzögerung des Gases im Verdichter proportionalen Druckes verwendet.

$$p = p_{st} - \frac{m}{F} \frac{dx_3}{dt} \quad 9.3.13$$

Für das Gasdurchsatzgewicht durch den Verdichter gilt:

$$\dot{m} = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \frac{F_1 + F_2}{2} \frac{dx_3}{dt} = \gamma_2 F_2 \frac{dx}{dt}$$

oder daraus die mittlere Gasgeschwindigkeit im Verdichter

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{2F_2}{F_1 + F_2} \frac{dx}{dt}$$

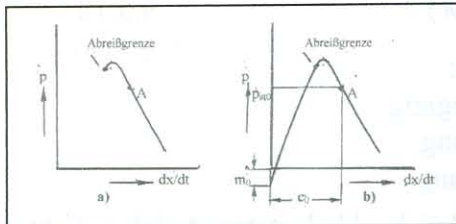
Ist  $l_v$  die Länge des Verdichterströmungskanal, so gilt für das im Verdichter befindliche Gasgewicht:

$$m = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \frac{F_1 + F_2}{2} l_v$$

Wir setzen diese Ausdrücke in die obige Gleichung ein und erhalten:

$$p = p_{st} - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \frac{F_1 + F_2}{2} \left[ \frac{2F_2}{F_1 + F_2} \frac{2\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \right] l_v \frac{2}{F_1 + F_2} \frac{d^2 x}{dt^2} \quad 9.3.14$$

Es ist zweckmäßig den Förderdruck  $p_{st}$  für die zu betrachtende Drehzahlkennlinie des Verdichters als Funktion  $\dot{m} = f\left(\frac{dz}{dt}\right)$  darzustellen. Zunächst rechnet man eine Drehzahlkennlinie  $\pi = f(\xi)$  für  $\zeta = \text{konst.}$  (siehe Abschnitt 7.1) um in  $p_{st} = f\left(\frac{dx}{dt}\right)$  wie sie auf Abb.: 9.3.2a dargestellt ist. Diese Kennlinie  $p_{st} = f\left(\frac{dx}{dt}\right)$  wird nach dem Interpolationsverfahren von Newton entsprechend der Abb.: 9.3.2b in eine Parabel höherer Ordnung dargestellt.



$$p_{st} = m_0 + m_1 \frac{dx}{dt} + m_2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m_3 \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + \dots$$

9.3.15

In der Praxis genügt allgemein der zweigliedrige Ansatz.

Für  $\frac{dx}{dt} = 0$  wird

$$p_{st} = m_0$$

Abb.: 9.3.2 Schematische Darstellung der

umgerechneten Verdichterkenn-  
linie ( $n = \text{konst.}$ ).

oder auf  $p_{st0}$  bezogen

$$m_0 = p_{st0} - (+)\gamma_2 x \quad 9.3.16$$

wobei  $p_{st0}$  dem Druck im Schnittpunkt der Drehzahlkennlinie des Verdichters mit der Betriebskennlinie entspricht.

Für das Vorzeichen gilt:

- bei  $m_0 < p_{st0}$

+ bei  $m_0 > p_{st0}$

Mit den Gleichungen 9.3.12; 9.3.14; 9.3.15 und 9.3.16 erhält man:

$$p_{st0} - \gamma_2 x + m_1 \frac{dx}{dt} + m_2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m_3 \left(\frac{dx}{dt}\right)^3 - \rho_2 \frac{2F_2}{F_1 + F_2} l_v \frac{d^2 x}{dt^2} = \gamma_2 h_d + \rho_2 (l_d + x) \frac{d^2 x}{dt^2} + \sum \xi_d \frac{\rho_2}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - p_0 \sin(\omega t) + \gamma_1 h_s + \rho_1 l_s \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{F_2}{F_1} \frac{d^2 x}{dt^2} + \sum \xi_s \frac{\rho_1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{F_2}{F_1} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

und durch Umformung:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \rho_1 \left[ \frac{2F_2}{F_1 + F_2} l_v + l_d + x + \frac{F_2}{F_1} l_s \right] + \frac{dx}{dt} \left[ -m_1 - m_2 \frac{dx}{dt} + \frac{\rho_2}{2} \left( \sum \xi_d + \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 \sum \xi_s \right) \frac{dx}{dt} - m_3 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right] + \gamma_2 x = p_0 \sin(\omega t)$$

Dabei wurde für  $p_{st0} = \gamma_1 h_s + \gamma_2 h_d$  gesetzt.

Mit  $x \ll l_d + l_s + l_v$  und

$$\frac{2F_2}{F_1 + F_2} l_v + l_d + \frac{F_2}{F_1} l_s = l$$

als Vergleichslänge eines gedachten Rohrleitungsvergleichssystems erhalten wir aus obiger Gleichung:

$$\rho_2 l \frac{d^2 x}{dt^2} + \left[ -m_1 - m_2 \frac{dx}{dt} + \frac{\rho_2}{2} \left( \sum \xi_D + \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^2 \sum \xi_S \right) \frac{dx}{dt} - m_3 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \right] \frac{dx}{dt} + \gamma_2 x = p_0 \sin(\omega t) \quad 9.3.17$$

Diese nichtlineare lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ist in allgemeiner Form nicht lösbar. Wie schreiben:

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = p_0 \sin(\omega t) \quad 9.3.18$$

Dabei ist b der Dämpfungsfaktor der Schwingung. Es gilt:

$$\begin{aligned} b = 0 & \quad \text{ungedämpfte Schwingung} \\ b = + & \quad \text{gedämpfte Schwingung} \\ b = - & \quad \text{angefachte Schwingung} \end{aligned}$$

Für kleine Geschwindigkeitsamplituden  $\frac{dx}{dt}$ , wie sie bei hochbelasteten Axialverdichtern entsprechend ihrer steilen Kennlinie im normalen Arbeitsbereich auftreten, setzen wir als Näherungslösung das Dämpfungsglied konstant indem wir für  $\frac{dx}{dt} = C_0$  (siehe Abb.: 9.3.2) setzen.

$$b = -m_1 - m_2 C_0 + \frac{\rho_2}{2} \left[ \sum \xi_d + \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^2 \sum \xi_s \right] C_0 - m_3 C_0^2 \quad 9.3.19$$

Die Gleichung 9.3.18 schreiben wir in die Form

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{a} \frac{dx}{dt} + \frac{c}{a} x = \frac{p_0}{a} \sin(\omega t) \quad 9.3.20$$

und machen den Ansatz:

$$x = C \sin(\omega t + \varphi)$$

mit  $\varphi$  als Phasenwinkel der Schwingung. Mit

$$\frac{dx}{dt} = C \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -C \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

erhält die Gl.: 9.3.20 die Form:

$$-C \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{b}{a} C \omega \cos(\omega t + \varphi) + \frac{c}{a} C \sin(\omega t + \varphi) = \frac{p_0}{a} \sin(\omega t + \varphi - \varphi)$$

Nun ist aber:

$$\sin(\omega t + \varphi - \varphi) = \sin(\omega t + \varphi) \cos \varphi - \cos(\omega t + \varphi) \sin \varphi$$

und damit:

$$\begin{aligned} -C \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{b}{a} C \omega \cos(\omega t + \varphi) + \frac{c}{a} C \sin(\omega t + \varphi) \\ = \frac{p_0}{a} \sin(\omega t + \varphi) \cos \varphi - \frac{p_0}{a} (\cos(\omega t + \varphi)) \sin \varphi \end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Phasenwinkels müssen die cos- und sin-Anteile jeweils für sich Null ergeben.

$$\frac{b}{a} C \omega \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{p_0}{a} \cos(\omega t + \varphi) \sin \varphi$$

$$\frac{b}{a} C \omega = -\frac{P_0}{a} \sin \varphi \quad (\text{cos-Anteil}) \quad 9.3.21$$

$$-C \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{c}{a} C \sin(\omega t + \varphi) = \frac{P_0}{a} \sin(\omega t + \varphi) \cos \varphi$$

$$C \left( \frac{c}{a} - \omega^2 \right) = \frac{P_0}{a} \cos \varphi \quad 9.3.22$$

Beide Gleichungen miteinander dividiert ergibt den Phasenwinkel

$$\tan \varphi = -\frac{\frac{b}{a} \omega}{\frac{c}{a} - \omega^2}$$

oder

$$\varphi = \arctan \left( -\frac{\frac{b}{a} \omega}{\frac{c}{a} - \omega^2} \right) \quad 9.3.23$$

Im Resonanzfall ist:

$$\tan \varphi = \infty \rightarrow \omega^2 = \frac{c}{a} = \alpha^2$$

Zur Bestimmung von Werten werden die Gleichungen 9.3.21 und 9.3.22 quadriert und addiert:

$$C^2 \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^2 \omega^2 + \left( \frac{c}{a} - \omega^2 \right)^2 \right] = \left( \frac{P_0}{a} \right)^2 \sin^2 \varphi + \left( \frac{P_0}{a} \right)^2 \cos^2 \varphi$$

und daraus:

$$C = \frac{P_0}{a \sqrt{\left( \frac{b}{a} \right)^2 \omega^2 + \left( \frac{c}{a} - \omega^2 \right)^2}}$$

Setzen wir noch  $\alpha^2 = c/a$  in die Gleichung ein, so wird:

$$C = \frac{P_0}{a \sqrt{(\alpha^2 - \omega^2)^2 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \omega^2}}$$

oder nach einer Umformung

$$C = \frac{P_0}{c \sqrt{\left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\alpha} \right)^2 + \frac{b^2}{ac} \left( \frac{\omega}{\alpha} \right)^2 \right]}}$$

Nun ist:

$$\frac{P_0}{c} = C_0 \quad 9.3.24$$

$$\frac{b^2}{ac} = \kappa^2 \quad 9.3.25$$

$$\frac{c}{a} = \alpha^2 \quad 9.3.26$$

und somit

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2\right]^2 + \kappa^2 \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}} \quad 9.3.27$$

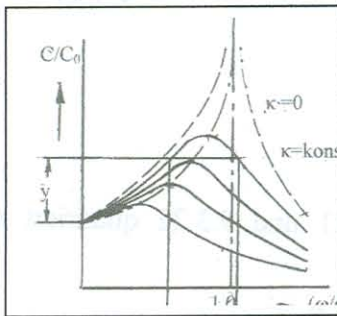
Dabei ist:

$\frac{C}{C_0} \rightarrow$  die Druckamplitude der Gasschwingung

$\omega \rightarrow$  die Kreisfrequenz der Erregerschwingung

$\kappa \rightarrow$  der Dämpfungsfaktor der Schwingung.

Die zu erwartenden Druckamplituden als Funktion der Erregerfrequenz mit dem Dämpfungsfaktor als Parameter ist schematisch auf Abb.: 9.3.3 dargestellt.



y = Druckreserve gegen Strömungsabriss bei der Verdichterkennlinie  
n = konst.

x = zu vermeidende Erregerfrequenzen.

Abb.: 9.3.3 Schwingungsform des Gasinhaltes eines Verdichters für eine Drehzahlkennlinie.

Führen wir unsere Abkürzungen in die Gl.: 9.3.27 ein, so erhalten wir:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\pi}{\pi_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{l}{g} \omega^2\right)^2 + \frac{\left\{-m_1 - m_2 c_0 + \frac{\rho_2}{2} \left[ \sum \xi_d + \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 \sum \xi_s \right] c_0 - m_3 c_0^2 \right\}^2}{\gamma_2}} \omega \quad 9.3.28$$

Nun wollen wir uns der Frage nach der maximalen Druckamplitude bei einer gedämpften Schwingung stellen. Dazu schreiben wir die Gl.:9.3.27 um in den Ausdruck

$$z = \frac{1}{\sqrt{(1 - y^2)^2 + \kappa^2 y^2}}$$

und differenzieren

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{2} \frac{2y[2(1 - y^2) + \kappa^2]}{\sqrt{(1 - y^2)^2 + \kappa^2 y^2}}$$

Dieser Ausdruck wird Null, wenn der Ausdruck

$$2(1 - y^2) + \kappa^2 = 0$$

wird. Wir erhalten dann:

$$y = \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{2}}$$

Setzen wir diese Beziehung in die obige Gleichung ein, ergibt sich die maximale Druckamplitude zu:

$$z_{\max} = \left(\frac{C}{C_0}\right) = \left(\frac{\pi}{\pi_0}\right)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\kappa^2}{2}\right)^2}} \quad 9.3.29$$

wobei  $\pi$  das Druckverhältnis des Verdichters ist. Nun führen wir wieder die Ausgangswerte ein und erhalten:

$$\left(\frac{C}{C_0}\right)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{2ac}\right)^2}}$$

oder

$$\left(\frac{\pi}{\pi_0}\right)_{\max} = \left(\frac{C}{C_0}\right)_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left[1 - \frac{-m_1 - m_2 c_0 + \frac{\rho_2}{2} \left(\sum \xi_d + \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 \sum \xi_s\right) c_0 - m_3 c_0^2}{2\gamma_2^2 l}\right]^2}} \quad 9.3.30$$

Bei bekannter zulässiger Druckamplitude, die sich aus der Abreißgrenze und den Betriebspunkt eines Verdichters auf seiner Drehzahlkennlinie ergibt, kann aus der Gl.: 9.3.28 der zu vermeidende Erregerfrequenzbereich und aus Gl.: 9.3.30 die maximal auftretende Druckamplitude für den Resonanzfall einer gedämpften Gasschwingung ermittelt werden.

#### Beispielrechnung:

Um eine Vorstellung von den zu erwartenden Werten zu erhalten, wollen wir eine Beispielrechnung durchführen. Wir wählen dazu den zwölfstufigen Axialverdichter mit dem Druckverhältnis  $\pi \approx 12$  und der Auslegungsdrehzahl  $n = 8700$  U/min. für das Strahltriebwerk Pirna TL 016. Die Daten sind:

Der Luftdurchsatz	$\dot{m} = 60,4 \text{ kg/s}$
Der Eintrittsquerschnitt	$F_1 = 0,3225 \text{ m}^2$
Der Austrittsquerschnitt	$F_2 = 0,0868 \text{ m}^2$
Die Eintrittstemperatur der Luft	$T_1^* = 288 \text{ } ^\circ\text{K}$
Der Eintrittsdruck der Luft	$p_1^* = 10125 \text{ kg/m}^2$
Der Isentropenexponent	$\frac{\kappa}{\kappa - 1} = 2,779$

Aus der theoretischen Berechnung des Verdichterkennfeldes liegen für die Auslegungsdrehzahl folgende Werte vor:

$\xi^*$	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	0,995	1,0	1,005	1,01
$\pi$	14,3	14,42	14,45	14,25	13,65	12,95	11,86	10,0	6,6
$\eta_{is}$	0,828	0,833	0,839	0,846	0,851	0,852	0,85	0,843	0,806

(Besser ist es, die entsprechenden Werte aus einem auf einen Verdichterprüfstand ermittelten Kennfeld zu entnehmen.)

Zunächst wollen wir für die Drehzahlkennlinie  $\xi^* = n/n_0 = 1$  die Funktion  $\pi = f(\xi^*)$  auf die Kennlinie  $p = f(dx/dt)$  umrechnen.

Es ist:

$$V_1^* = \xi^* \frac{\dot{m}}{\gamma} \quad [m^3/s]$$

Zu jedem  $\xi^*$  gehört entsprechend der Drehzahlkennlinie ein bestimmtes Druckverhältnis  $\pi$  und ein bestimmter Wirkungsgrad  $\eta_{is}$  des Verdichters. Die Gastemperatur an der Verdichteraustrittsebene erhalten wir aus der Beziehung:

$$T_2^* = T_1^* \left( 1 + \frac{\pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{\eta_{is}} \right) \quad [^{\circ}K]$$

Mit den Gasdruck in der Verdichteraustrittsebene

$$p_2^* = p_1^* \pi$$

gilt für die Gasdichte:

$$\gamma_2^* = \frac{p_1^* \pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}{1 + \frac{\pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{\eta_{is}}}$$

Aus Gründen der Kontinuität ist mit den angegebenen Gleichungen:

$$V_2^* = \frac{\gamma_1^*}{\gamma_2^*} V_1^* = \frac{\dot{m}}{\gamma_1} \xi^* \frac{1 + \frac{\pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{\eta_{is}}}{\pi} \quad [m^3/s]$$

Mit

$$c^* = \frac{V_2^*}{F_2}$$

und der Schallgeschwindigkeit

$$a^* = 20,1 \sqrt{T_2^*}$$

wird:

$$\bar{M}^* = \frac{c^*}{a^*} = \frac{\dot{m}}{20,1 F_2 \gamma_1 T_1^*} \xi^* \sqrt{T_1^* \left( 1 + \frac{\pi^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}{\eta_{is}} \right)}$$

Da nun das Verhältnis der Volumina  $V/V^*$  nach den gasdynamischen Gesetzen eine Funktion von  $\bar{M}^*$  ist, erhalten wir für den Gasvolumendurchsatz in der Verdichteraustrittsebene

$$V_2 = \frac{V_2^*}{V_2^*/V_2}$$

und die Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = c = \frac{V_2}{F_2}$$

Unsere umgerechnete Drehzahlkennlinie hat dann folgende Werte:

$\xi^*$	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	0,995	1,0	1,005	1,01
$\frac{dx}{dt}$ [m/s]	92,3	92,5	93	94,4	98,05	102,5	108,8	130,2	188,3
$p \cdot 10^{-4}$ [kg/m <sup>2</sup> ]	14,48	14,6	14,64	14,43	13,82	13,11	12,01	10,12	6,685

Zur Ermittlung der Gl.: 9.3.15 mit Hilfe des Newton'schen Interpolationsverfahrens wurden die Werte von  $\xi^* = 0,99; 0,995; 1,0$  und  $1,005$  verwendet wobei aus Dimensionsgründen der Druck in  $p \cdot 10^{-4}$  einzusetzen ist.

Die Gl.: 9.3.15 nimmt für unser Beispiel den Ausdruck

$$p_{st} = -0,55 + 0,8179 \frac{dx}{dt} - 0,011467 \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + 0,0000414 \left( \frac{dx}{dt} \right)^3$$

an. Damit ist:

$$m_1 = +0,8179$$

$$m_2 = -0,011467$$

$$m_3 = +0,0000414$$

Für das Verdichtersystem nach Abb.: 9.3.1 gelten weiterhin folgende Werte:

- Länge des Verdichterkanals zwischen Ein- und Austrittsebene  $l_v = 1,0875$  m
- Ansaugrohlänge  $l_s = 0,3$  m
- Gasgeschwindigkeit in der Verdichteraustrittsebene  $c_0 = \frac{dz}{dt} = 108,8$  m/s
- Gasvolumen in der Brennkammer  $V_{Br} = 0,1156$  m<sup>3</sup>

Die Vergleichsrohrlänge auf der Druckseite des Verdichters ist:

$$l_d = \frac{V_{Br}}{F_2} = 1,332$$
 m

und die gesamte modifizierte Rohrleitungslänge:

$$l = \frac{2F_2}{F_1 + F_2} l_v + l_d + \frac{F_2}{F_1} l_s = 1,875$$
 m

Bei einem Einlaufdruckverlust von  $\Delta p^* = 340$  kg/m<sup>2</sup> bis zur ersten Verdichterstufe ergibt sich die Summe aller Druckverlustzahlen zu

$$\sum \xi_s = \frac{2\Delta p^*}{\rho_1 c_{ax1}^2} = 0,1445$$

und auf der Druckseite des Verdichters bei einem Druckverlust in der Brennkammer von 3%:

$$\sum \xi_d = \frac{0,03 p_2}{\rho_2 c_0^2} = 0,91$$

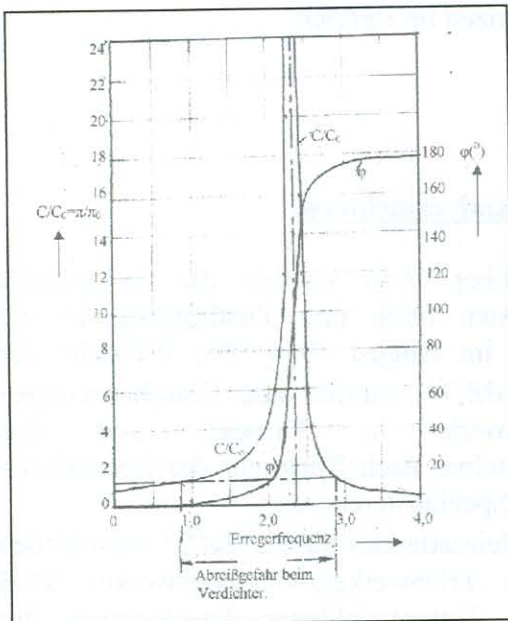


Abb.: 9.3.4 Die Druckamplitude und der Phasenwinkel der Gasschwingung im Verdichter als Funktion der Erregerfrequenz entsprechend dem Rechnungsbeispiel.



Mit den Ausdruck

$$-m_1 - m_2 + \frac{\rho_2}{2} \left[ \sum \xi_d + \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{F_2}{F_1} \right)^2 \sum \xi_s \right] c_0 - m_3 c_0^2 = -0,1139$$

erhalten wir dann für die Druckamplitude (Gl.: 9.3.28) die Gasschwingung:

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\pi}{\pi_0} = \frac{1}{\sqrt{[1 - 0,1905\omega^2]^2 + 0,000302\omega^2}}$$

Diese Gleichung sowie die Gleichung 9.3.23 wurden ausgewertet und die Ergebnisse für dieses Beispiel in der Abb.: 9.3.4 dargestellt.

Da der betrachtete Verdichter bei der Auslegungszahl eine respektable Druckreserve bis zur Abreißgrenze von  $C/C_0 = 1,155$  besitzt, kann aus obiger Gleichung auch der vermeidende Erregerfrequenzbereich ermittelt werden. Wir quadrieren obige Gleichung und formen sie um in

$$1 - 0,381\omega^2 + 0,03625\omega^4 + 0,000302\omega^2 = \frac{1}{\left(\frac{C}{C_0}\right)^2} = 0,75$$

und erhalten daraus

$$\omega^4 - 10,5\omega^2 + 6,9 = 0$$

mit den Wurzeln

$$\omega^2 = 5,25 \pm 4,54$$

bzw.:

$$\omega_1 = 0,84s^{-1}$$

$$\omega_2 = 2,81s^{-1}$$

Um Pumperscheinungen des Verdichters infolge von Gasschwingungen bei der Auslegungsdrehzahl zu verhindern, sind Erregerfrequenzen im Bereich

$$0,84 \leq \omega \leq 2,81$$

zu vermeiden.

## **10. Einige Erfahrungen bei der Entwicklung von Axialverdichtern.**

In einer Nacht- und Nebelaktion des 22. Oktober 1946 wurden die in Staßfurt zusammengezogenen deutschen Triebwerksspezialisten ohne ihre Zustimmung in die Sowjetunion verlagert /85/. Die Rückkehr erfolgte im August 1954. Die Wünsche der Spezialisten betreffs des Heimatlandes (*DDR*<sup>1)</sup> oder *BRD*<sup>2)</sup> wurden ohne Einschränkungen respektiert /86/. Das Flugzeugentwicklungswerk in Dresden und das Triebwerkentwicklungswerk in Pirna wurden unmittelbar nach Rückkehr der Spezialisten aufgebaut. Alle leitenden Funktionen wurden von SU-Spezialisten besetzt.

Da sich alle Axialverdichterspezialisten betreffs des Heimatlandes für die *BRD*<sup>2)</sup> entschieden hatten wurde entsprechend dem Strukturplan des Triebwerkentwicklungswerkes VEB Entwicklungsbau Pirna 1955 /86/ im Bereich Vorentwicklung die Leitung der Verdichterabteilung mit einem Turbinenspezialisten besetzt. In Hinsicht auf die unterschiedliche Philosophie und den unterschiedlichen Risiken bei den Auslegungen von

1) DDR = Deutsche Demokratische Republik

2) BRD = Bundesrepublik Deutschland

Axialverdichtern und Turbinen bestand eine Lücke bei der Entwicklung von Axialverdichtern die durch Integration von zwei fachbezogenen Bearbeitern, die sich bereits mit den Problemen des Axialverdichters in der FVAS<sup>3)</sup> Dresden beschäftigt hatten, behoben werden konnte. Mit den in der Sowjetunion erarbeiteten Projekt Pirna TL 014 (siehe hierzu auch /86/ und /87/) wurden auch der Auslegungsbericht für den Axialverdichter und einige handschriftliche Theoretische Ausarbeitungen von Schröder zur Kinematik in Verdichterstufen sowie das Schaufelgitterberechnungsverfahren (veröffentlicht in /33/ und /58/ in die DDR überstellt. Dies erfolgte zu einem Zeitpunkt, in dem sich die rege Entwicklung auf diesem Gebiet noch in der Pionierphase befand. Eine Weiterentwicklung zukünftiger Axialverdichter war ohne Sichtung und Bewertung der genannten Unterlagen mit daraus folgenden Schlussfolgerungen nicht möglich.

3) FVAS = Forschungs- und Versuchsanstalt für Strömungsmaschinen Dresden.

### 10.1 Die theoretischen Grundlagen und ihre Weiterentwicklung.

Die von Schröder erstellten theoretischen Grundlagen /33/;/58/ zur Auslegung von Axialverdichtern fallen in die Vorzeit von 1954. Unter diesen Bedingungen sind die angegebenen Arbeiten zu betrachten und die Weitsichtigkeit und Praxisnähe für die Weiterentwicklung und Anwendungsfreundlichkeit hervorzuheben.

Wie auch andere Autoren (z.B. /35/; /36/; /37/) geht Schröder vom radialen Kräftegleichgewicht an einem Massenelement im absoluten Strömungssystem in der Strömungsebene I (vor Laufgitter) und in der Strömungsebene II (nach Laufgitter) aus und setzt eine über den Radius der Stufe konstante Energieübertragung an das zu verdichtende Gas im Laufgitter voraus. Im Gegensatz zu anderen Autoren macht Schröder den kinematischen Reaktionsgrad  $\rho_k$  durch den Ansatz  $c_{u\infty} = c_{u\infty a} (r/r_a)^q$  über den Stufenradius durch den Drallverteilungsexponenten q veränderlich wodurch die kinematischen Spezialfälle

- der konstanten kinematischen Reaktion
- der konstanten Drallverteilung
- des Potentialwirbels

in die Betrachtungen einbezogen wurden. Die in einem mehrstufigen Verdichter vor- und nachgeschalteten Stufen einer betrachteten Stufe haben einen Einfluss auf deren Axialgeschwindigkeitsverteilungen in den Strömungsebenen I und II. Um diesen Einfluss zu ermitteln ersetzt Schröder die Profile der vor- und nachgeschalteten Profilvergitter durch Wirbel mit unterschiedlichen Drehrichtungssinn zwischen Lauf- und Leitgitter und ermittelte im dreidimensionalen Raum die durch diese Wirbel induzierten Zusatzgeschwindigkeiten in den Strömungsebenen I und II einer jeweils betrachteten Stufe die durch Einführung von Korrekturfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  in der Gleichung für die Axialgeschwindigkeitsverteilung berücksichtigt wurden. Die so entstandene Beziehung für die Axialgeschwindigkeitsverteilungen in den Strömungsebenen I und II einer Verdichterstufe zeigt die Gl.: 5.1.17c als Spezialfall wie sie bei der Auslegung des Verdichters Pirna TL 014 verwendet wurde.

Die von Schröder /33/ angegebene Gleichung für die Axialgeschwindigkeitsverteilung in den Stufenebenen I und II geht von einem bestimmten kinematischen Schema an einem Bezugsradius einer Stufe aus. Hinweise über die zulässigen kinematischen Belastungen von Schaufelgittern sind durch Howell /10/ gegeben. Für die ersten Stufen mit kleinen Nabenverhältnissen  $v_i = r_i/r_a$  für hochbelastete Axialverdichter können sich damit Schwierigkeiten hinsichtlich der Strömungsstabilität des Gases am Nabenradius durch zu kleine Umfangsgeschwindigkeiten des Laufgitters ergeben. Wie die Abb.: 5.1.1 zeigt,

wird die Absolutgeschwindigkeit  $c_1$  in der Strömungsebene I nach Durchströmen des Laufgitters auf die Geschwindigkeit  $c_2$  beschleunigt. Die Beschleunigungsenergie muss dem Gas aber durch Energiezufuhr beim Durchströmen des Laufgitters zugeführt werden. Die energetische Untersuchung für eine verlustlose Strömung (Abschnitt 3.3) mit dem Prinzip von Hamilton /9/ besagen, dass die Strömung im Laufgitter stabil ist, solange die dimensionslose Druckzahl  $\psi_{th0} \leq 2$  ist. Nach den Ausführungen über einen optimalen Wirkungsgrad in einem Stufenelement nach Abschnitt 3.5 ergibt sich ein optimaler kinematischer Reaktionsgrad von  $\rho_k \approx 0,5$  bis 0,6. Die theoretische Druckzahl selbst wird insbesondere noch durch die induzierten Geschwindigkeiten durch den Sekundärwirbel beeinflusst. Eine theoretische Lösung dieses Problems ist zur Zeit nicht gegeben (siehe Abschnitt 4.2). Aus diesem Grunde wurde für die Entwicklung weiterer Axialverdichter am Nabenschnitt der ersten Stufen ein kinematischer Reaktionsgrad von  $\rho_{ki} = 0,5$  mit einer Druckzahl von  $\psi_{thi} = 1,7$  mit gutem Erfolg angesehen. Mit Hilfe des Drallverteilungsexponenten  $q$  und des Radienverhältnisses  $\nu = r/r_a$  lassen sich diese Werte auf jeden koaxialen Zylinderschnitt einer Stufe umrechnen. Bei der Neubearbeitung für die Axialgeschwindigkeitsverteilungen in den Stufenebenen I und II wurde in Hinblick auf die Entwicklung von Stufen mit Überschallanströmung der Laufgitter eine linear veränderliche Energiezuführung und die Tatsache, dass sich die Strömung auf Pseudo-Stromlinien und nicht auf koaxialen Zylinderschnitten bewegt, berücksichtigt (siehe Abschnitt 5.1; Abb.: 5.1.4). Daraus ergibt sich, dass die von Schröder /33/ angegebene Beziehung ( Gl.: 5.1.17c ) als Spezialfall angesehen wurde. Für die Berechnung der theoretischen Geschwindigkeitsverteilungen muss die Frage nach der Wahl eines zweckmäßig anzuwendenden Drallverteilungsexponenten  $q$  gestellt werden. Entsprechende Untersuchungen wurden in /50/ angestellt.

Die einfache Darstellung des Machzahlverlaufes am Innen- und Außenradius des Lauf- und Leitgitters in Abhängigkeit vom Drallverteilungsexponenten  $q$  nach einem Rechnungsbeispiel gibt bereits einige Hinweise zu Wahl des Drallverteilungsexponenten  $q$ . Für hochbelastete Axialverdichter müssen zur Erreichung großer Umfangsgeschwindigkeiten des Laufgitters die relativen Dicken der Laufgitterprofile aus Gründen der Materialfestigkeit am Innenradius größer sein als am Außenradius. Nach den Untersuchungen des Abschnittes 6.3.6 (Abb.: 6.3.6.4) müssen aber auch die Anströmmachzahlen der Profile des Laufgitters am Innenradius kleiner gehalten werden als am Außenradius. Nach Abb.: 1.18 muss damit der Drallverteilungsexponent  $q$  bei kleineren Werten liegen als jener der beim Schnittpunkt der Machzahlverläufe für den Innen- und Außenradius liegt. Diese Betrachtungsweise führte zwangsweise zu der Frage welches kinematische Schema für die erste Stufe eines Axialverdichters als Grenzleistungsstufe, die alle nachfolgenden Verdichterstufen beeinflusst, unter Voraussetzung vorgeschriebener und vermeintlich realisierbarer Anströmmachzahlen anzuwenden ist (siehe hierzu Abschnitt 5.6.3 und /50/). Die Lösung dieser Aufgabe ergibt die graphische Darstellung der anwendbaren kinematischen Schemata der Abbildungen 5.6.3.1 Bis 5.6.3.3 des Abschnittes 5.6.3.

Bei mehrstufigen hochbelasteten Axialverdichtern ist die Temperatur des zu verdichtenden Gases nach etwa der dritten Verdichterstufe bereits so hoch, dass die Anströmmachzahlen der Laufgitter nicht mehr von Bedeutung sind. Hier ist die Anwendung einer Kinematik in den Stufen ratsam, die näherungsweise einen optimalen Stufenwirkungsgrad ergeben. Der optimale Stufenwirkungsgrad wird dabei sowohl von dem kinematischen Schema als auch von den Verlusten in der Stufe beeinflusst. Die theoretischen Zusammenhänge sind im Abschnitt 5.6.2 dargestellt und die Abb.: 5.5.2.1 zeigt die Rechenergebnisse in einer dreidimensionalen Form. Eine Auswertung dieser dreidimensionalen Darstellung des

optimalen Stufenwirkungsgrades in den einzelnen Ebenen zeigen die Abbildungen 5.6.2.1 bis 5.6.2.6 womit auch die zu wählenden Kenndaten für die Auslegung derartiger Stufen bekannt sind.

Den theoretischen Axialgeschwindigkeitsverteilungen in den Stufenebenen I und II überlagert sich ein sogenanntes Rohrleitungsreibungsprofil, wie es aus dem Rohrleitungsbau bekannt ist, unabhängig davon, ob die Gitterprofile damit ausgelegt wurden oder nicht. Ohne Berücksichtigung dieses Rohrreibungsprofils bei der Profigitterauslegung ergibt sich ein großer Bereich der Schaufelhöhe mit verminderter Energieübertragung an das Gas im Laufgitter und ein relativ kleiner Bereich mit etwas vergrößerter Energieübertragung im Laufgitter wie es die Abb.: 5.2.4 darstellt. Die insgesamt geringere Energieübertragung an das Gas im Laufgitter versuchte Howell durch einen Minderleistungsfaktor  $\Omega$  auszugleichen. Eine auffallende Verminderung der Abweichung des Gitterarbeitspunktes von der aerodynamisch stoßfreien kann aber damit nicht erreicht werden (siehe dazu Abb.: 6.2.1 und 5.4.1). Die Ermittlung der Mischungswegkonstante für die Rohrleitungsströmung wurde an Verdichterprüflingen vorgenommen und ergab die Werte der Abb.: 5.4.4. Diese Werte für die Mischungswegkonstante haben die gleiche Tendenz wie die Minderleistungsfaktoren nach Howell. Einen Vergleich zeigt die Abb.: 1.15. Berücksichtigt man bei der Auslegung eines Axialverdichters die sogenannte Rohrleitungsströmung, so kann man den Arbeitspunkt der Gitterprofile zumindest in die Nähe des Punktes für die aerodynamisch stoßfreie Anströmung nach Abb.: 6.2.1 verschieben. Dieses Verfahren hat einen nicht zu übersehenden günstigen Einfluss auf den Arbeitsbereich eines Verdichters wie es die auf dem Verdichterprüfstand gemessenen Kennfeldern der vergleichbaren Axialverdichterprüflinge der Verdichter Pirna TL 014 und Pirna TL 016 beweisen (siehe hierzu Abb.: 1.17). Dieses Verhalten stimmt auch mit der Druckpunktwanderung der Auftriebskraft nach der Abb.: 6.3.7.3 überein. Die Berücksichtigung der Rohrleitungsströmung hat somit eine fundamentale Bedeutung zur Erreichung eines möglichst großen Arbeitsbereiches eines Axialverdichters.

Es kann angenommen werden, dass die Problematik der Gitterprofile nach der Singularitätenmethode fast gleichzeitig aber unabhängig voneinander von Schröder /58/ und Schlichting /59/ bearbeitet wurde. Eine Gegenüberstellung beider Verfahren ergibt folgende Aspekte:

Das Verfahren von Schröder:

- 1) Kreisförmige Zirkulationsverteilung auf der Profilschne mit den Ansatz  $\sqrt{1-\xi^2}$  nach Birnbaum /62/.
- 2) Eine Zirkulationsverteilung auf der Profilschne für die angestellte ebene Platte mit den Ansatz  $\sqrt{(1+\xi)(1-\xi)}$  nach Birnbaum /62/.
- 3) Aus 1) und 2) verwendete er eine Kombination für das Gitterprofil was eine Abweichung vom aerodynamisch stoßfreien Anströmzustand der Profile bedeutet und eine Einschränkung des Betriebsbereiches eines Verdichters nach sich zieht (siehe Abb.: 6.3.7.3).
- 4) Für die Profilform wurde die Quell- und Senkenbelegung auf der Profilschne  $q = f \left[ \sqrt{(1+\xi)/(1-\xi)} - \frac{\pi}{2} \right]$  festgelegt. Damit erhält Schröder eine Profilform die dem alten englischen Grundprofil V 4 /53/ sehr ähnlich ist mit einer Dickenrücklage von 30% der Sehnenlänge des Profils und der Dickenverteilung  $y/C = \left[ \arcsin x - \sqrt{1-x^2} - \frac{\pi}{2} x \right]$ .

- 5) Die kreisförmige Zirkulationsbelegung auf der Profilschne ergibt keine mathematisch darstellbare Profilskelettlinie. Schröder verwendete aber eine parabolische Skelettlinie die mathematisch einer elliptischen Zirkulationsverteilung entlang der Profilschne entspricht. Dies bedeutet aber einen zu kleinen Krümmungswinkel der Skelettlinie.
- 6) Die durch die Quell- und Senkenbelegung nach 4) induzierten Geschwindigkeiten gelten nur für die dort angegebene Profilform. Andere Profilformen ergeben andere induzierte Geschwindigkeiten.
- 7) Obwohl gegenüber dem Verfahren von Schlichting /59/ eine beträchtliche Einschränkung bei der Parameterwahl der Profile vorliegt, ist die Handhabung des Verfahrens in der Praxis denkbar einfach.

Das Verfahren von Schlichting /59/.

- 1) Verfahren liegt eine elliptische Zirkulationsverteilung entlang der Profilschne zugrunde die bei der gleichen Größe der relativen Skelettlinienwölbung gegenüber dem Verfahren von Schröder eine größere Energieübertragung an das Gas im Laufgitter ergibt.
- 2) Die Verteilung der Singularitäten auf der Profilschne erfolgt mittels der Glauert'schen Reihe /61/

- Für die Zirkulation  $\gamma(x)$

$$\gamma(x) = U_{\infty} \left[ A_0 \cot an\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^n A_n \sin(n\varphi) \right]$$

- Für die Quell- Senkenbelegung  $q(x)$  zur Ermittlung der Profilform

$$q(x) = U_{\infty} \left[ B_0 \cot an\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^n B_n \sin(n\varphi) \right]$$

- 3) Mit der Bestimmung der einzelnen Konstanten A und B gibt diese Betrachtungsweise eine große Anzahl von Variationsmöglichkeiten bei der Bestimmung der benötigten Profile und es können ganze Profilmfamilien aufgebaut werden.

Diese Gesichtspunkte führten zur Neubearbeitung eines Profiligitter- Berechnungsverfahrens Unter Beachtung der einfachen Anwendungsmöglichkeiten des Verfahrens von Schröder /58/ und den Vorzügen des Verfahrens von Schlichting /59/. Dieses Verfahren wurde für die Auslegung der Profiligitter für den Verdichter Pirna ZTL 020 benutzt und hat sich gut bewährt. Dieses Profiligitter-Berechnungsverfahren ist im Abschnitt 6.3 dargestellt.

Die auf dem Gebiet der Axialverdichter seit dem Jahre 1959 durchgeführten Entwicklungsarbeiten in der ehemaligen DDR sind in den einzelnen Abschnitten enthalten.

Innerhalb der kurzen Zeit des Bestehens der Luftfahrtindustrie in der ehemaligen DDR wurden für die Triebwerksentwicklung vier Projekte erarbeitet deren Anzahl wohl die damalige schnelle internationale Entwicklung berücksichtigen sollte. Diese Projekte sind in der zeitlichen Reihenfolge:

- Pirna TL 014
- Pirna PTL 018
- Pirna TL 016
- Pirna ZTL 020

Von diesen Projekten sind bis zur Umprofilierung der Luftfahrtindustrie im Jahre 1963 für die Triebwerke TL 016 und ZTL 020 nur einzelne Baugruppen gebaut und erprobt worden. (Weitere für die Axialverdichterentwicklung nicht relevante Projekte siehe /88/).

Somit kennzeichnet der Axialverdichter für das Triebwerk Pirna TL 014 den Entwicklungsstand der deutschen Spezialisten in der Sowjetunion des Jahres 1954. Die Verdichter PTL 018 und TL 016 sind mit den Auslegungsprinzipien in der ehemaligen FVAS- Dresden behaftet. Allein der Verdichter für das Zweikreistriebwerk ZTL 020 ist frei von diesen Einflüssen. Nur die sogenannte Rohrreibungströmung wurde hier nicht angewendet, da eine experimentelle Bestätigung an den Verdichtern PTL 018 und TL 016 zum Auslegungszeitpunkt des Verdichters ZTL 020 noch fehlte und dieser bereits schon mehrere Neuerungen in der Auslegung enthielt.

### 10.2 Die wichtigsten an den einzelnen Verdichtertypen gewonnenen Versuchsergebnisse.

Um den Leser eine bessere Einschätzung der in diesen Abschnitt mitgeteilten und an den einzelnen Verdichtertypen gewonnenen Versuchsergebnisse zu ermöglichen, sollen diese zunächst charakterisiert werden.

Die wichtigsten Daten dieser Verdichtertypen sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

Verdichtertyp	TL 014 $A_0$	TL 014 $A_1$	PTL 018	TL 016	ZTL 020
Entwicklungsjahr	1954	1957	1957	1957	1959
Abbruchjahr			1959		
Luftdurchsatz (Kg/s)	52	57,5	31,31	60,4	96
Druckverhältnis $\pi$	7,0	7,0	10,2	11,68	12,0
Drehzahl (U/min)	8000	8200	13100	8700	7095
Stufenzahl $z$	12	12	13	12	14
Nabenverhältnis $\nu_i$	0,564	0,48	$\approx 0,5$	0,43	0,37
Außendurchmesser $D_a$ (mm)	710	716		710	918
Drallverteilungsexponent $q$ der ersten Stufe.	+0,185		+1,0	+1,0	+0,9

Den Axialverdichter TL 014  $A_0$  zeigt die Abb.: 10.2.1 in einem Schnittbild des Triebwerkes Pirna TL 014  $A_0$ .

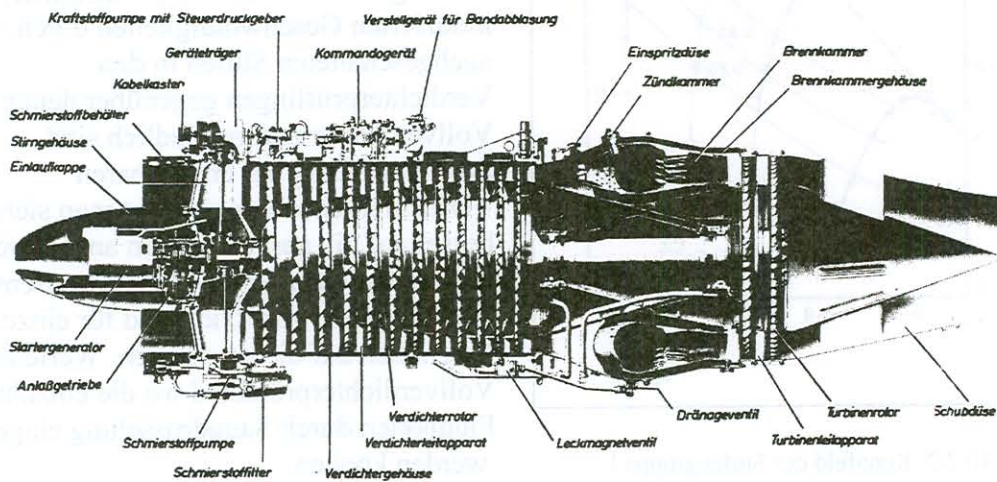


Abb.: 10.2.1 Der Axialverdichter im Schnittbild des Triebwerkes Pirna TL 014  $A_0$ .

Dieser Verdichter entspricht dem Entwicklungsstand des Jahres 1954 der deutschen Spezialisten in der Sowjetunion. Er besaß ein einstellbares Vorleitgitter, deren Stellung während des Betriebes labil war, und Luftabblaseklappen nach der 6. Verdichterstufe deren Konstruktion ein völliges Schließen der Abblasequerschnitte nicht gewährleisten konnte was in den vorhergehenden Stufen zu einer Entdrosselung führte. Deshalb wurde der Verdichter mit einem starren Vorleitgitter und an der Luftabblasestelle mit einem sich kontinuierlich öffnenden und schließenden Abblaseband versehen. Damit wurden die Voraussetzungen geschaffen um die Kennlinien und die Stabilitätsgrenze (Abreißgrenze) ohne Nebeneinflüsse mit den vorliegenden Verdichterauslegungsprinzipien ermitteln zu können.

Die Auslegungsprinzipien waren:

- Konstante Energieübertragung an das Gas über den Radius der Stufen.
- Der Verdichter sollte mit einfachen Mitteln reifgemacht werden können.  
Das führte zwangsläufig in den meisten Stufen des Verdichters zu der bekannten Potentialwirbelauslegung. Infolge des durch den Anlasser des Triebwerkes vorgegebenen Nabendurchmesser der Ersten Stufe führte es in den ersten Stufen des Verdichters zur Abkehr von den Potentialwirbel. Der Drallverteilungsexponent  $q = + 0,185$  der ersten Stufe deutet schon mehr in Richtung zur Auslegung der Stufe mit einer Konstanten kinematischen Reaktion hin.
- Die Geschwindigkeitsvektordiagramme in den einzelnen Stufen wurden in einzelnen Stufen mit der theoretischen Axialgeschwindigkeitsverteilung ohne einer Korrektur der Minderleistung nach Howell (siehe Abb.: 1.15) oder der Anwendung der sogenannten Rohrreibungsströmung (siehe Abschnitt 5.4) ermittelt.
- Anwendung des Gitterberechnungsverfahrens von Schröder mit den kennzeichnenden Merkmalen des Abschnittes 10.1.

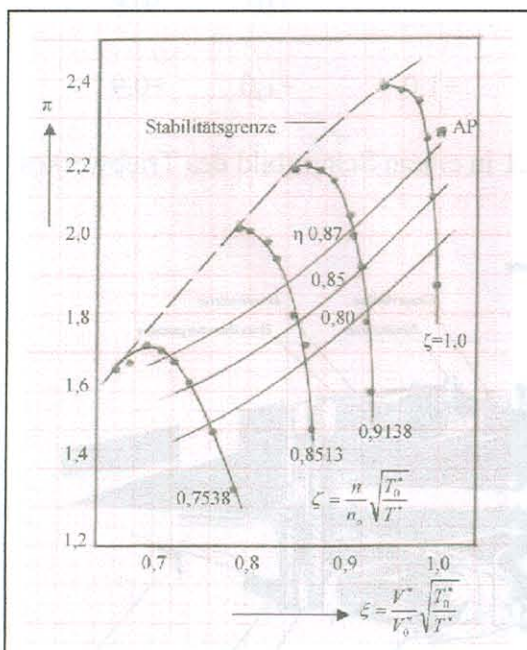


Abb.: 10.2.2 Kennfeld der Stufengruppe I (Stufe 1 bis 5) des Verdichters TL 014 A0.

Die Abb.: 10.2.2 zeigt das Kennfeld der ersten Stufengruppe (Stufe 1 bis 5) des Verdichters TL 014 A0.

Ähnliche Werte ergeben auch die Stufengruppen 2 und 3. Hier ist jedoch eine Skepsis gegenüber den erhaltenen Werten ratsam, da die in einer beliebig betrachteten Stufe wirksamen induzierten Geschwindigkeiten durch vor- und nachgeschalteten Stufen in den Verdichterprüflingen gegenüber denen im Vollverdichter unterschiedlich sind.

Zur Beurteilung der erreichbaren Verdichterkennwerte verlässt man sich hier besser auf die aus Versuchen an Vollverdichtern ermittelten Kennwerte im Gesamttriebwerk für eine Flughöhe von 0 km und für einzelne Flughöhen auf die ermittelten Werte auf einen Vollverdichterprüfstand wo die einzelnen Flughöhen durch Saugdrosselung eingestellt werden können.

Derartige Werte zeigt die Abb.: 10.2.3.

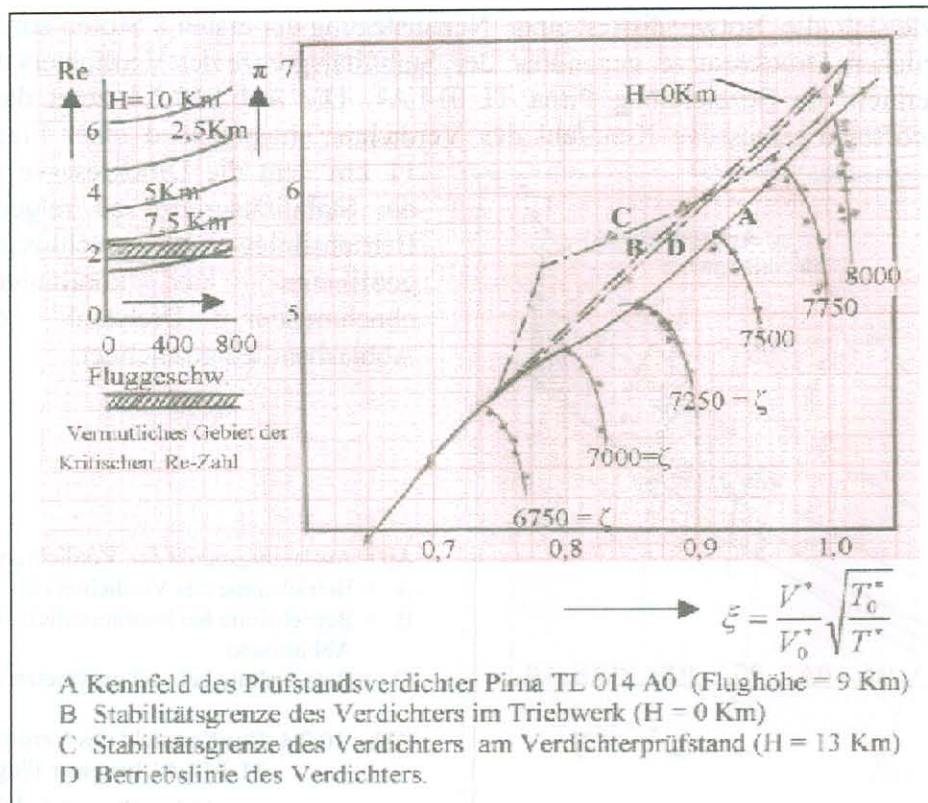


Abb.: 10.2.3 Abreißlinien (Stabilitätsgrenze des Verdichters Pirna TL 014 A0).

Diese Abbildung zeigt die Linie B eindeutig, dass der Verdichter bereits bei der Auslegungsdrehzahl im Auslegungspunkt keine Druckreserve gegenüber der Abreißgrenze (Stabilitätsgrenze) beim Betrieb in Bodennähe hat (Linie B). Die Linien A, B und C geben die Abreißgrenzen des Verdichters entsprechend verschiedener Flughöhen an. Die Linie D entspricht der Drossellinie des Verdichters während des Betriebes ohne Beeinflussung durch Leitgitterverstellung und oder der Luftabbläsung nach einer Verdichterstufe.

Aus der Sicht der derzeitigen Kenntnisse über die im Verdichter ablaufenden Strömungsvorgänge, die insbesondere in den Abschnitten 5 und 6 dargelegt sind, hätte man auch keine besseren Versuchsergebnisse erwarten können. Die Abb.: 10.2.3 sagt eindeutig aus, dass der Verdichter Pirna TL 014 A0 für den Flugbetrieb nicht tauglich ist.

Zunächst wurde unter Anwendung minimaler Mittel versucht eine Drucksteigerung im Verdichter zu Erreichen.

Solche Mittel waren:

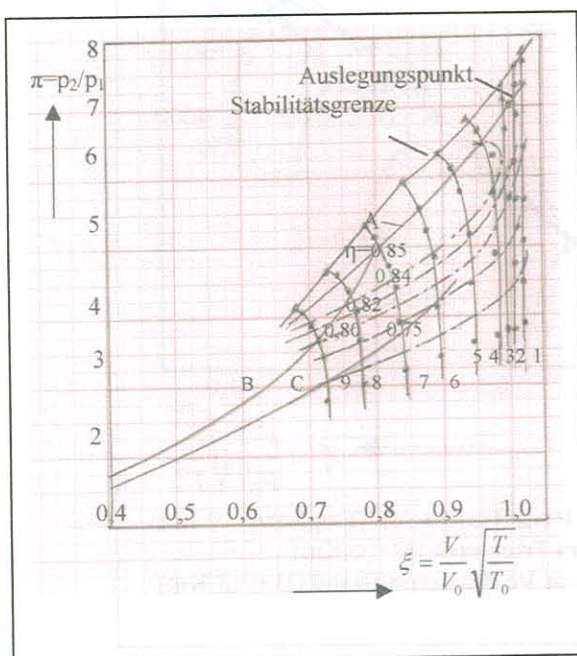
- Aufdrehen der Leitgitter.
- Überkrümmung der Kopfprofile in den ersten der Stufen.
- Aufrauen der Profiloberflächen in den ersten drei Stufen um die laminare Lauflänge der Strömung bis zum Umschlagpunkt in die turbulente Strömung zu verkürzen.

Alle diese Maßnahmen brachten keine generelle Änderung im Betriebsverhalten des Verdichters.

Mit den derzeitigen Kenntnissen in der Verdichtertheorie ist das verständlich, da mit diesen Maßnahme der Betriebspunkt im Profilvergitter, der infolge der Auslegung des Verdichters weit von dem der aerodynamisch stoßfreien Auslegung lag, nicht verändert werden konnte.



Danach setzte sich die Notwendigkeit einer Neuauslegung der ersten 8 Stufen zur Schaffung der erforderlichen Druckreserve gegenüber der Stabilitätsgrenze des Verdichters durch. Der Verdichter erhielt die Bezeichnung Pirna TL 014 A1. Die Abb.: 10.2.4 zeigt das auf den Verdichterprüfstand gemessene Kennfeld des Verdichters entsprechend einer Flughöhe von 11 km. Um die Druckreserve gegenüber der Stabilitätsgrenze zu zeigen, wurden Betriebslinien bei geschlossenen, voll geöffneten und kontinuierlich mit abnehmender Drehzahl öffnendem Abblasband eingezeichnet.



Um die Druckreserve gegenüber der Stabilitätsgrenze zu zeigen, wurden Betriebslinien bei geschlossenen, voll geöffneten und kontinuierlich mit abnehmender Drehzahl öffnendem Abblasband eingezeichnet.

- Ap = Auslegungspunkt des Verdichters
- A = Betriebslinie des Verdichters im Triebwerk
- B = Betriebslinie bei kontinuierlich öffnendem Abblasband
- C = Betriebslinie bei voll geöffneten Abblasband.

Abb.: 10.2.4 Das Kennfeld des Verdichters TL 014 A1 bei einer Flughöhe von etwa 11 km ( $Re = 2,2 \cdot 10^5$ ).

Bemerkenswert an dem Kennfeld ist weiterhin die sehr kleine Durchsatzsteigerung im oberen Drehzahlbereich wie sich auch schon beim Verdichter TL 014 A0 auftrat. Das ist eine typische Erscheinung dafür, dass über einen gewissen Bereich der Schaufelhöhe der ersten Verdichterstufe die Verstopfungsgrenze an den Gittern erreicht wurde (Auslegungsmachzahl am Außenradius  $M = 0,832$ ).

Die Flugversuche mit dem Triebwerk Pirna TL 014 A1 bestätigten das gute Verhalten des Verdichters auch im Fluge. Der Verdichter arbeitete in allen Flughöhen bei allen Fluglagen und bei allen Fluggeschwindigkeiten sehr stabil und zeigte keinerlei Pumperscheinungen. Damit wurde ein sehr sicheres und zuverlässiges Flugtriebwerk geschaffen.

Den Verdichter PTL 018 zeigt die Abb.: 10.2.5 in einem Schnittbild des Triebwerkes Pirna PTL 018.

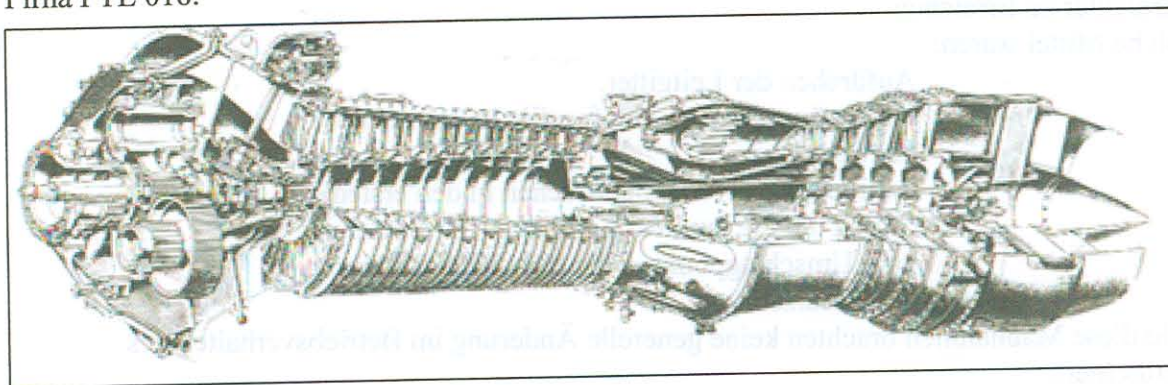


Abb.: 10.2.5 Der Axialverdichter im Schnittbild des Triebwerkes Pirna PTL 018

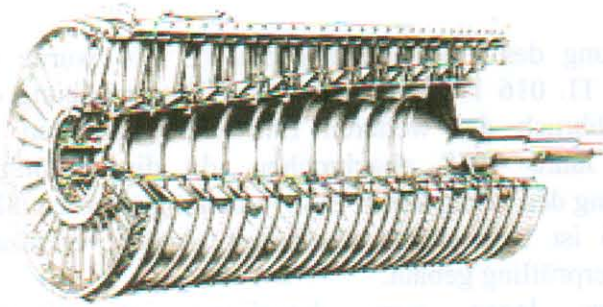


Abb.: 10.2.6 Axialverdichter Pirna PTL 018.

Die Abb.: 10.2.6 zeigt den Verdichter PTL 018 in einer vergrößerten Form mit den Konstruktionsprinzipien die bei allen in Pirna entwickelten Axialverdichtern zur Anwendung kamen.

Die Entwicklung des Triebwerkes Pirna PTL 018 und damit des Verdichters geht auf das Jahr 1957 zurück.

Hinsichtlich der Auslegungsphilosophie ist der Einfluss der ehemaligen Forschungs- und Versuchsanstalt für Strömungsmaschinen (FVAS) nicht zu Übersehen. Die Auslegungsgrundsätze waren:

- konstante kinematische Reaktion von 50% in allen koaxialen Zylinderschnitten der Laufgitter
- Anwendung des auf experimentelle Daten beruhenden

Schaufelgitterberechnungsverfahren von Held /54/

Weitere Merkmale des Verdichters sind:

- Berücksichtigung der Geschwindigkeitsverteilung durch den gekrümmten Einlaufkanal vor dem Vorleitgitter.
- Einstellbare Schaufeln des Vorleitgitters.
- Überlagerung der sogenannten Rohrreibungsströmung der theoretischen Axialgeschwindigkeitsverteilungen über die Radien der Stufen.
- Der Verdichter wurde mit 4 Abblasestellen mit je zwei Klappen ausgerüstet. Es war vorgesehen später die ersten vier Leitgitter drehzahlabhängig verstellbar auszuführen um auf die Ablasklappen verzichten zu können.

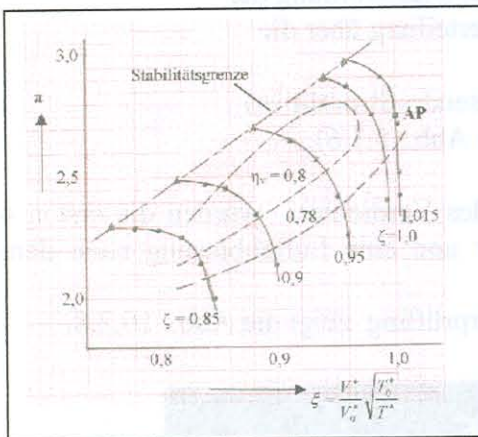


Abb.: 10.2.7 Das experimentell ermittelte Kennfeld der ersten Stufengruppe (Stufe 1 bis 5) des Verdichters Pirna PTL 018.

Um die internationale Entwicklungstendenz zum wirtschaftlicheren Zweikreistriebwerk zu berücksichtigen wurde die Entwicklung des Triebwerkes Pirna PTL 018 nach etwa zweijähriger Entwicklungszeit zugunsten des Zweikreistriebwerkes Pirna ZTL 020 abgebrochen.

Bis zu diesem Zeitpunkt konnte auf dem Verdichterprüfstand noch das Kennfeld der Stufengruppe (Stufe 1 bis 5) experimentell ermittelt werden. Die Abb.: 10.2.7 zeigt das ermittelte Kennfeld der Stufengruppe des Verdichters TL 018. Ein Vollverdichter konnte aus Gründen der verfügbaren Antriebsleistung nicht auf dem Verdichterprüfstand erprobt werden. Dies sollte auf eines eigens für Propellertriebwerke aufgebauten Prüfstand erfolgen wobei die Leistung zum Antrieb der Propeller von einer Wasserreibungsbremse aufgenommen werden sollte. Von diesen Versuchen sind noch einige Messergebnisse, bis zur Havarie an der Wasserwirbelbremse, bekannt die zumindest die Erreichung der vorgesehenen Luftdurchsatzmenge des Verdichters dokumentieren. Die Messwerte des Verdichterprüflings (Abb.: 10.2.7) zeigen ein solides Kennfeld, das die Erwartung eines voll funktionstüchtigen Verdichters unterstützt.

Aus der Zielstellung der Weiterentwicklung des Triebwerkes Pirna TL 014 wurde die Entwicklungsarbeiten am Triebwerk Pirna TL 016 1957, noch vor der Flugerprobung des Triebwerkes TL 014 begonnen. Der Abbruch der weiteren Entwicklungsarbeiten am Triebwerk TL 016 wurden noch im Jahre 1958 abgebrochen, da die benötigten Entwicklungskapazitäten für die Reifmachung des Triebwerkes TL 014 benötigt wurden /88/. Ein Schnittbild des Triebwerkes TL 016 ist leider nicht überliefert. Außer vereinzelte Gerätebaugruppen wurde auch ein Verdichterprüfling gebaut.

Die Auslegungsdaten des Verdichters lagen zum damaligen internationalen Entwicklungsstand durchaus im fortschrittlichen Bereich und brauchten einen Vergleich nicht zu scheuen. Die wichtigsten Kenndaten des Verdichters sind in der Tabelle auf Seite 288 angegeben.

Die wichtigsten Auslegungsgrundsätze waren:

- konstante kinematische Reaktion von 50% in allen koaxialen Zylinderschnitten der Laufgitter.
- Anwendung des auf experimentellen Daten beruhenden Schaufelgitterberechnungsverfahren von Held /54/.
- Überlagerung der sogenannten Rohrreibungsströmung der theoretischen Axialgeschwindigkeitsverteilung über die Radien der Stufen.
- Berücksichtigung des Einflusses der Pseudo-Stromlinien auf die Kinematik in den Stufen (siehe Abb.: 5.1.6).

Zur Vergrößerung des Betriebsbereiches im Kennfeld des Verdichters wurden die ersten 4 Leitgitter (einschließlich des Vorleitgitters) Verstellbar und eine Luftabblasing nach dem Laufgitter der 8. Stufe vorgesehen.

Den auf den Verdichterprüfstand vermessenen Verdichterprüfling zeigt die Abb.: 10.2.8.

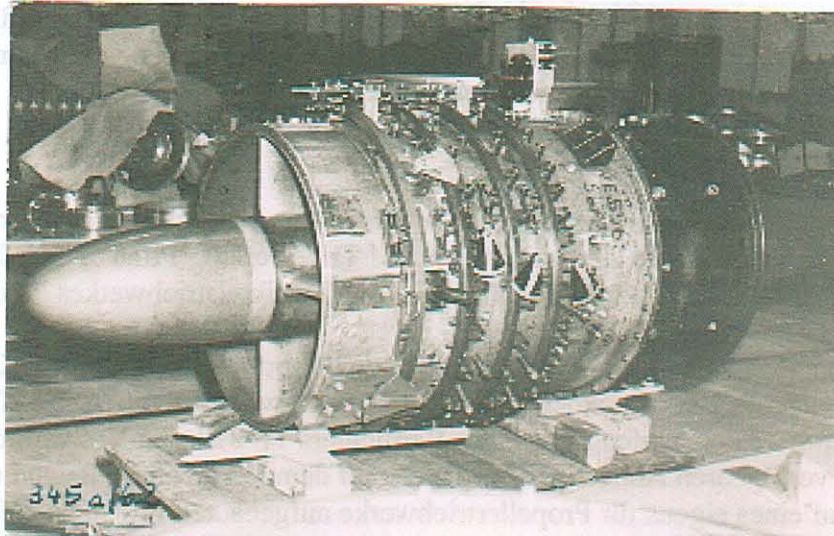


Abb.: 10.2.8 Verdichterprüfling des Triebwerkes Pirna TL 016.

Die Konstruktion des Verdichterprüfling lässt deutlich die Verstellereinrichtung für die ersten 4 Leitgitter erkennen.

Über die Genauigkeit der kinematischen Auslegung der einzelnen Verdichterstufen ergeben die Messungen der Strömungswinkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  im absoluten Strömungssystem vor und hinter den Laufgittern Auskunft (siehe auch hierzu Abb.: 5.1.1). Diese am Verdichterprüfling in den Stufen 1 bis 4 ermittelten Messpunkte zeigt die Abb.: 10.2.9 für einen Vergleich mit den gerechneten Auslegungswerten.

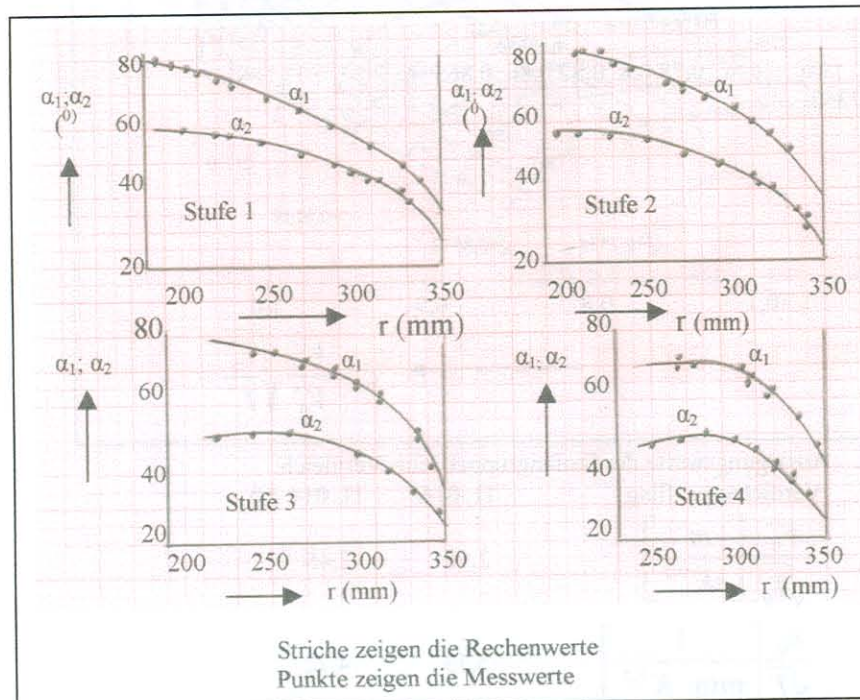
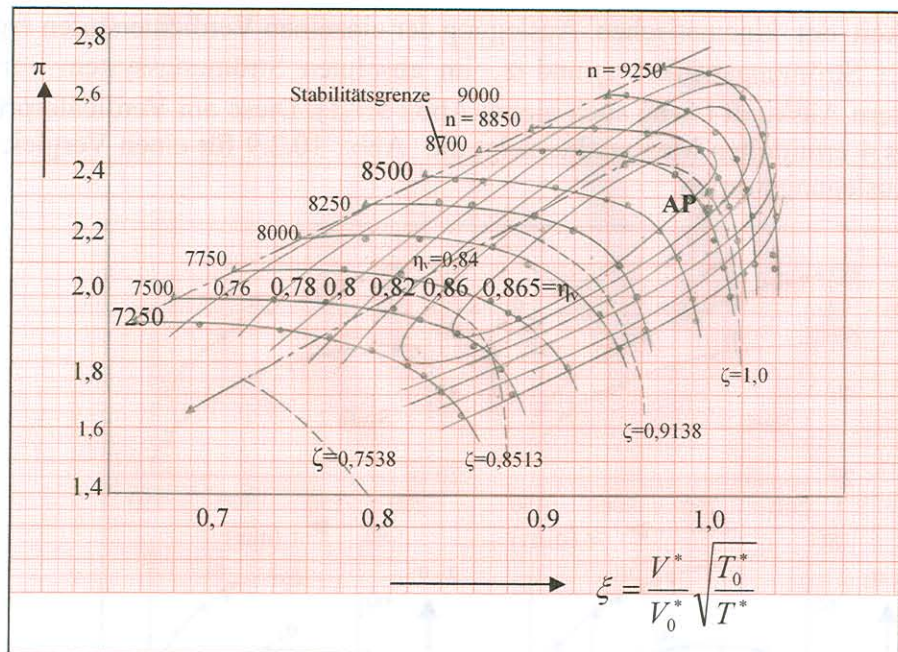


Abb.: 10.2.9 Die Strömungswinkel der absoluten Strömung in den Stufen 1 bis 4 des Verdichterprüflings TL 016.

Die Übereinstimmung zwischen den Messwerten und den gerechneten Werten kann hier als ausgezeichnet angesehen werden. Damit kann angenommen werden, dass die Profile im Gitterverband entsprechend der Abb.: 6.2.1 sehr nahe am Arbeitspunkt für die aerodynamisch stoßfreie Anströmung oder am optimalen Arbeitspunkt arbeiten. Dadurch werden die ovalen Wirkungsgradlinien im oberen Drosselbereich eines Kennfeldes auseinander gezogen und die Stabilitätsgrenze zu kleineren Luftdurchsätzen im Verdichter verschoben.

Diese Tendenz zeigt aber auch das auf den Verdichterprüfstand am Verdichter TL 016 gemessene Kennfeld. Die Abb.: 10.2.10 zeigt dieses Kennfeld.

Bemerkenswert ist auch der sehr flache Verlauf der Linien konstanter Drehzahlen im oberen Drosselbereich. Dieser Verlauf kann durch die Änderung der Druckpunktlage für die Auftriebskraft nach Abb.: 6.3.7.3 gedeutet werden. Die Profilwölbung ist am Außenradius einer Verdichterstufe infolge der kinematischen Strömungsbedingungen am kleinsten vergrößert und sich mit abnehmenden Stufenradius. Insofern ist zu erwarten, dass die Druckpunktlage zuerst am Außenradius einer Stufe an der Profilvorderkante herausläuft und nach Überwindung eines Instabilitätsbereiches nach Abb.: 6.3.7.4 über die Vorderkante auf der Saugseite wieder in die Profilsehne eintritt. Die Richtung der Auftriebskraft ist dann entgegengesetzt jener die auf der Druckseite des Profils wirksam ist.



Auslegungswerte der Stufengruppen zum Vergleich:

Verdichterprüfling	TL 016	TL 014 A0
$\frac{V_0^*}{\sqrt{T_0^*}} \left[ \frac{m^3}{sK^{0,5}} \right]$	2,96	2,45
$\frac{n_0}{\sqrt{T}} \left[ \frac{1}{\min K^{0,5}} \right]$	5,13	4,72
$\pi = p_2^* / p_1^*$	2,27	2,342
$v_i = r_i / r_a$	0,43	0,564
Stufenzahl	4	5

Abb.: 10.2.10 Das experimentell ermittelte Kennfeld des Verdichterprüflings TL 016. (Die Drehzahlkennlinien des Verdichterprüflings TL 014 A0 und die Stabilitätsgrenze nach Abb.: 10.2.2 sind zum Vergleich eingezeichnet).

Dieser Vorgang verschiebt sich bei einer weiteren Drosselung des Verdichters auf einer Linie konstanter Drehzahl ausgehend vom Außenradius zu kleineren Radien im Laufgitter. Als Stabilitätsgrenze wird dabei der Arbeitspunkt angesehen, bei dem sich die Auftriebskräfte auf der Druckseite (+Werte) und der Saugseite (-Werte) der Profile im Gleichgewicht befinden. Hier machen sich die sogenannten Pumperscheinungen des Verdichters bemerkbar die ein Schwingen des Gasvolumens im Strömungssystem (ähnlich wie im Abschnitt 9.3 beschrieben) darstellen.

Die in der Abb.: 10.2.10 wurden die Drehzahlkennlinien und die Stabilitätsgrenze des Verdichterprüflings Pirna TL 014 A0 entsprechend der Abb.: 10.2.2 mit eingezeichnet um die Erweiterung des gesunden Arbeitsbereiches beim Verdichterprüfling durch eine entsprechende Verdichterauslegung herauszustellen

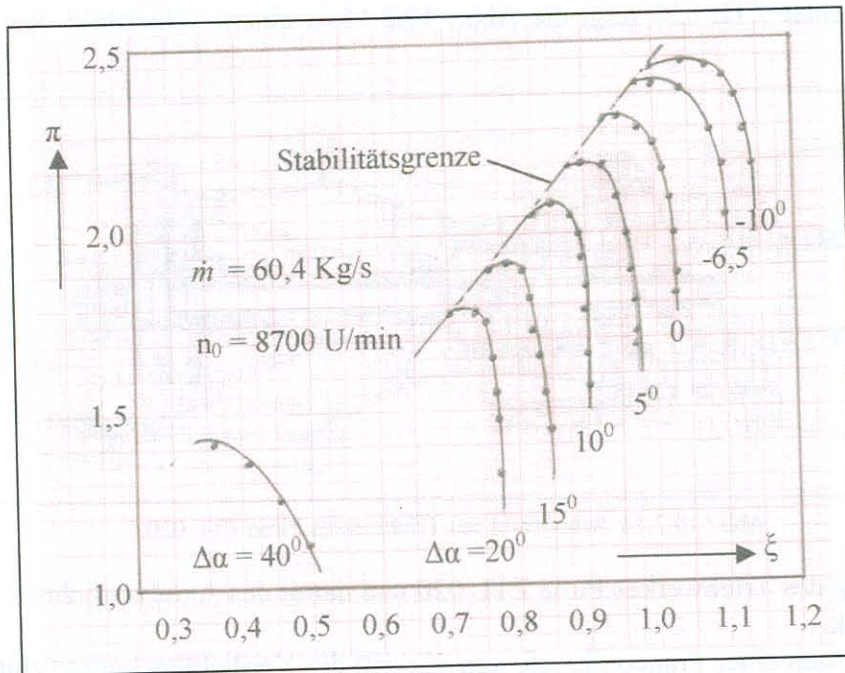


Abb.: 10.2.11 Kennfeld des Versuchsverdichters TL 016 (Stufe 1 bis 4) mit Leitgitterverstellung bei konstanter Auslegungsdrehzahl.

Die Abb.: 10.2.11 zeigt die auf den Prüfstand gemessenen Versuchswerte bei einer Leitgitterverstellung und konstanter Auslegungsdrehzahl für den Verdichterprüfling TL 016. Diese Messwerte veranschaulichen deutlich die Wirksamkeit der Leitgitterverstellung zur Vergrößerung des Arbeitsbereiches eines Axialverdichters.

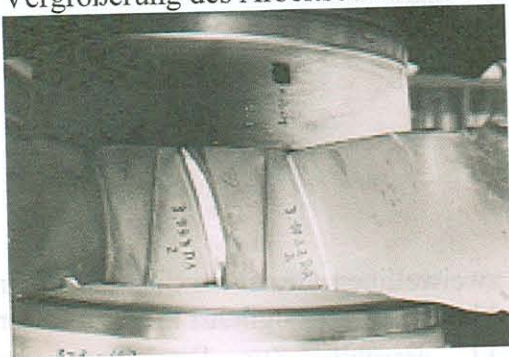


Abb.: 10.2.12 Dauerbruchstelle im zweiten Laufgitter des Prüflings TL 016

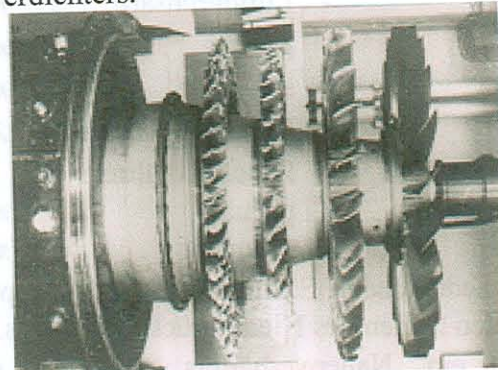


Abb.: 10.2.13 Verdichterprüflingsrotor nach den nach den Schaufelbruch im zweiten Laufgitter.

Die in Abb.: 10.2.11 angegebenen Verstellwinkel  $\Delta\alpha$  geben die Werte für das Vorleitgitter an. Mit zunehmender Stufenzahl verkleinern sich die Verstellwinkel.

Bei einem Verstellwinkel von  $\Delta\alpha = 40^\circ$  trat im zweiten Laufgitter am Schaufelfuß (siehe Abb.:10.2.12) ein Schaufelbruch ein der den Prüflingsrotor stark beschädigte (siehe Abb.: 10.2.13) und für weitere Versuche unbrauchbar machte. Hier ist offensichtlich der Verstellwinkel der Leitgitter zur Beherrschung eines gesunden Strömungszustandes im Laufgitter 1 überschritten worden.

Den Axialverdichter ZTL 020 zeigt die Abb.: 10.2.14 in einem Schnittbild des Triebwerkes Pirna ZTL 020.

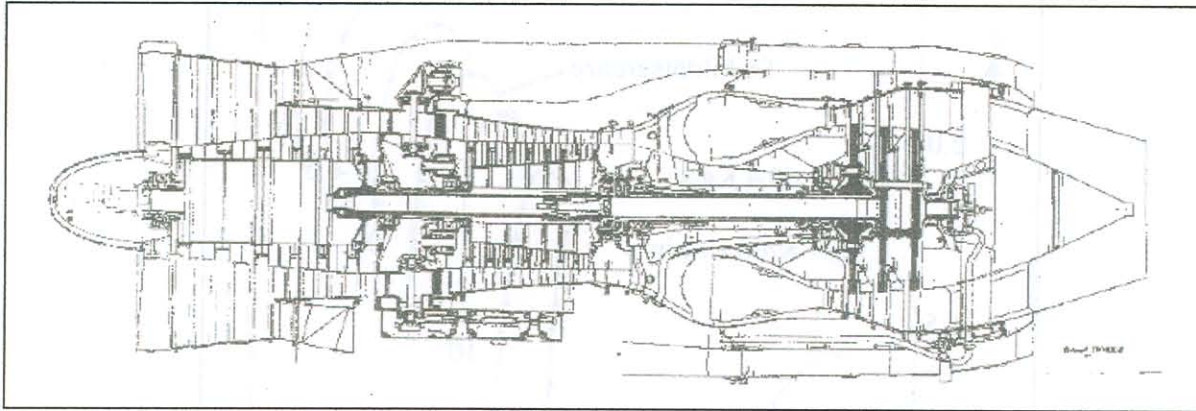


Abb.: 10.2.14 Schnittbild des Triebwerkes Pirna ZTL 020.

Die Entwicklung des Triebwerkes Pirna ZTL 020 und damit des Axialverdichters geht auf das Jahr 1959 zurück.

Die Forderung nach einer Tranconikstufe am Eintritt des Verdichters konnte zum damaligen Zeitpunkt wegen eines ungenügenden wissenschaftlich technischen Vorlaufes nicht nachgekommen werden. Somit wurde der Weg einer Übergangslösung mit reiner Unterschallströmung aber über die Stufenradien linear veränderlicher Energieumsetzung zur Erreichung des im Zweikreislauf geforderten Druckverhältnisses gewählt, der zur damaligen Zeit auch international üblich war.

Die Forderungen an den Verdichter ZTL 020 in einer Zweiwellenbauart waren:

- Luftdurchsatz:  $\dot{m} = 96,0$  kg/s
- primär  $\dot{m} = 57,6$  kg/s
- sekundär  $\dot{m} = 38,4$  kg/s
- Bypass-Verhältnis  $\lambda = 1,5$
- Druckverhältnis:
  - primär  $\pi = 12$
  - sekundär  $\pi = 1,75$

Einen bedeutenden Einfluss auf die Konzeption des zweiwelligen Gesamtverdichters haben die ersten Stufen des Niederdruckverdichters. Um die Abmessungen möglichst klein zu halten wurde ein Nabenverhältnis von  $v_i = r_i / r_a = 0,37$  gewählt. Zur Erreichung des Druckverhältnisses  $\pi = 1,75$  am Kontinuitätsradius des sekundären Luftstromes wurden drei Niederdruckstufen benötigt, womit auch die Energiezufuhr in den Laufgittern an den sekundären Luftstrom an den dort vorhandenen Kontinuitätsradien der einzelnen Stufen gegeben ist. Um die Strömungsstabilität nach Abschnitt 3.3 an den Innenradien dieser Stufen einzuhalten, wurde dort die Druckzahl  $(\psi_{thi} / 2) = 0,85$  eingesetzt.

Die ersten drei Stufen wurden mit konstanten Kontinuitätsradius konzipiert und die Außenradien vom Eintritt des ersten Laufgitters bis zum Austritt des dritten Leitgitters (siehe auch Abb.:10.2.16) linearisiert. Diese Linearisierung der Außenradien erforderte eine Korrektur der Kontinuitätsradien in den einzelnen Stufen die mittels einer thermodynamischen Durchrechnung der einzelnen Stufen in Abhängigkeit vom Radius erfolgte.

Bei Axialverdichterstufen mit linear über den Radius zunehmender Energieumsetzung an das Gas im Laufgitter wird die Axialgeschwindigkeit des Gases gegenüber dem Verlauf bei konstanter Energieumsetzung oberhalb des Kontinuitätsradius beschleunigt und unterhalb dieses Radius verzögert (siehe auch Abb.: 1.9). Es findet somit eine Volumenverschiebung des Gases beim Durchströmen des Laufgitters statt. Die kinematischen Werte sind so zu wählen, dass die Anströmmachzahlen der Gitterprofile an den Außenradien der einzelnen Stufen in strömungstechnisch beherrschbaren Grenzen bleiben. Dies wurde bei den ersten drei Stufen des Niederdruckverdichters mit folgenden in der Tabelle enthaltenen Werten erreicht.

Stufe	1	2	3
$r_a$ (m)	0,459	0,434	0,418
$r_i$ (m)	0,17	0,184	0,1972
$v_i = r_i / r_a$	0,37	0,424	0,4715
$\bar{r}$ (m)	0,347	0,333	0,327
$\bar{c}_{ax1}$ (m/s)	170	170	170
$\bar{u}$ (m/s)	257,1	247,5	243,0
K	+0,3835	+0,2911	+0,1563
q	+0,9	+0,8	+0,7
$M_{wa}$	0,754	0,755	0,768
$M_{wi}$	0,756	0,697	0,636

Die Drehzahl des Niederdruckverdichters beträgt somit:

$$n = 7095 \text{ U/min}$$

Der Trennradius zwischen den primären und sekundären Luftdurchsatz hinter dem Leitgitter der Stufe 3 liegt bei  $r = 0,303$  m. Dies entspricht einem Kontinuitätsradius von  $\bar{r}_s = 0,365$  m

bei dem das Druckverhältnis von  $\pi_s = 1,75$  im Sekundärluftstrom erreicht werden muss.

Eine Überlagerung der sogenannten Rohrreibungsströmung der theoretischen Axialgeschwindigkeitsverteilung zur

zur Vergrößerung des stabilen Betriebsbereiches

des Verdichters und die Verlegung des Arbeitsbereiches der Gitterprofile zumindest in die Nähe der aerodynamisch stoßfreien Anströmung wie beim Verdichter TL 016 wurde nicht angewendet, da zum Zeitpunkt der Verdichterauslegung ZTL 020 durch fehlende Messwerte die Wirksamkeit noch nicht nachgewiesen werden konnte. Erst spätere Messungen am

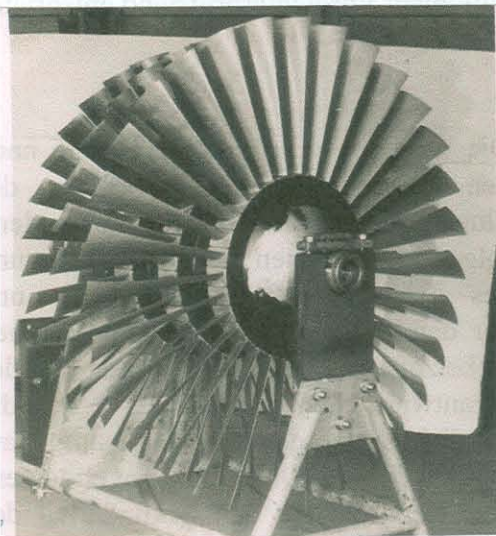


Abb.: 10.2.15 Niederdruckverdichterprüfling ZTL 020. Ansicht des dreistufigen Rotors.

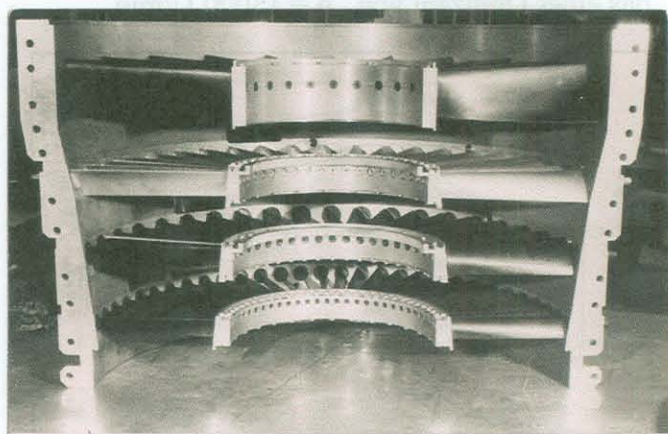


Abb.: 10.2.16 Ansicht des Stators für den dreistufigen Niederdruckverdichterprüfling ZTL 020.

Verdichter TL 016 bestätigten den positiven Einfluss ( siehe hierzu die Abbildungen 10.2.9 Und 10.2.10).

Zum Zeitpunkt (März 1961) des Beschlusses zur Einstellung der Flugzeugentwicklung und Produktion in der ehemaligen DDR waren die Verdichterprüflinge ZTL 020 Niederdruckteil



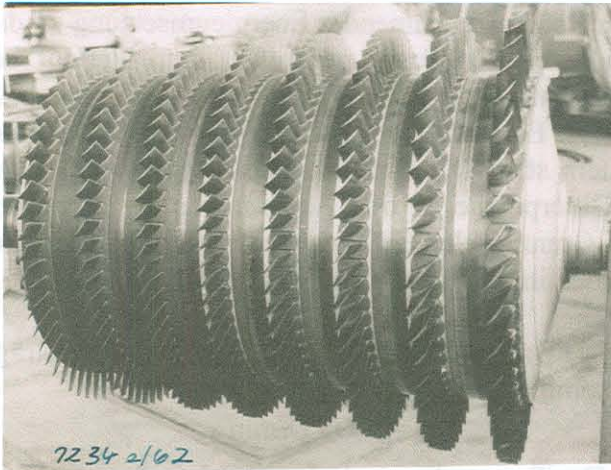


Abb.:10.2.17 Rotor des Hochdruckverdichterprüflings  
Primärkreislauf durchführen zu können zu können zu können.

(Stufe 1 bis 3) und den Hochdruckteil (Stufe 1 bis 8) für die Versuche auf den Verdichterprüfstand gebaut.

Die Abbildungen 10.2.15 und 10.2.16 zeigen den dreistufigen Rotor und Stator des Niederdruckverdichters und die Abb.: 10.2.17 den Rotor des achtstufigen Hochdruckverdichters ZTL 020.. Der Niederdruckverdichter wurde dreistufig gewählt um die geforderten Kenndaten des Verdichters im Zweitkreislauf des Triebwerkes zu überprüfen und eventuelle Korrekturen der drei nachfolgenden Stufen für den

Der Hochdruckverdichter ZTL 020 wurde nach dem Verfahren der Stufen mit näherungsweise optimalen Wirkungsgrad entsprechend Abschnitt 5.6.2 und die Gitterprofile mit dem Singularitätenverfahren nach Abschnitt 6.3 ausgelegt. Hier galt es insbesondere die Wirksamkeit dieser beiden Verfahren in der Praxis nachzuweisen. Die Kenndaten des Hochdruckverdichters in Zusammenarbeit mit den Niederdruckteil sind:

Massendurchsatz	$\dot{m} = 57.6 \text{ kg/s}$
Eintrittsdruck	$p_1 = 271,9 \text{ kN/m}^2$
Eintrittstemperatur	$T_1^* = 404,54 \text{ } ^\circ\text{K}$
Druckverhältnis	$\pi = 4,4$
Stufenzahl	$z = 8$
Drehzahl	$n = 13000 \text{ U/min}$

Für den separaten Betrieb des Hochdruckverdichters auf einen Verdichterprüfstand entspricht das einer Drehzahl von  $n = 13000 \text{ U/min}$ .

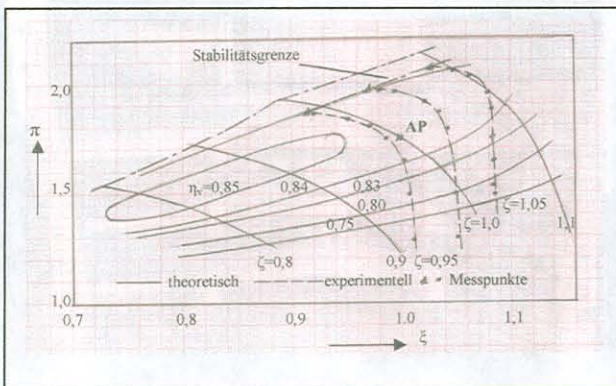


Abb: 10.2.18 Kennfeld für den Sekundärteil des Niederdruckverdichters ZTL 020. (Vergleich zwischen theoretischen und gemessenen Werten).

Die beiden Verdichterteile wurden nach den Beschluss zur Einstellung der Flugzeugentwicklung in der DDR in den folgenden Monaten der Umprofilierung des Triebwerkentwicklungswerkes und der damit verbundenen kaderpolitischen Nebelzone ohne Wissen des verantwortlichen Projektanten für die Verdichter auf den Prüfstand aufgebaut und jeweils drei Drehzahlkennvermessungen. Das Kennfeld für den Sekundärteil des Niederdruckverdichters zeigt die Abb.: 10.2.18.

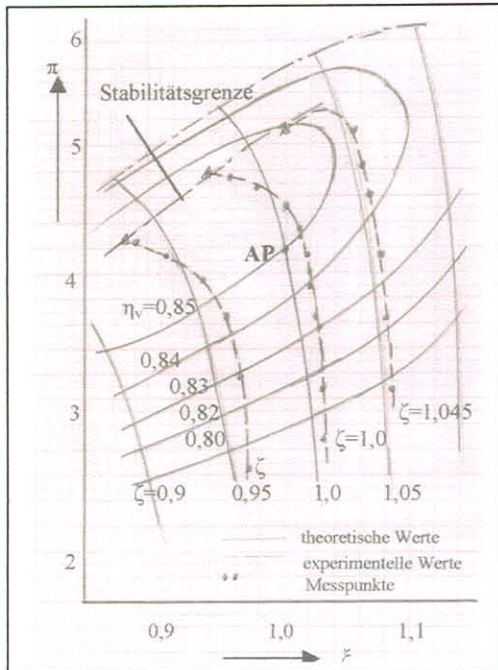


Abb.: 10.2.19 Kennfeld des Hochdruckverdichters ZTL 020 (Vergleich zwischen theoretischen und experimentelle Werten)

Die gemessenen Kennlinien für den Hochdruckverdichter ZTL 020 zeigt die Abb.: 10.2.19. Wie diese Abbildung auch zeigt, erreicht der Hochdruckverdichter voll das Auslegungsdruckverhältnis und auch den geforderten Luftdurchsatz. Der um 1,5% größer gemessene Luftdurchsatz kann als innerhalb des üblichen Toleranzfeldes liegenden Wertes angesehen werden.

Auch beim Niederdruckverdichter ZTL 020 (siehe Abb.: 10.2.18) wird das erwartete Druckverhältnis mit  $\pi = 1,75$  im Sekundärkreislauf ohne jegliche Abstriche erreicht. Der Luftdurchsatz zeigt jedoch um 4,4% größere Werte als der rechnerische Luftdurchsatz. Dieser vergrößerte Luftdurchsatz ist durch die Art der Drosselung des Verdichters vorgetäuscht und entspricht nicht der Realität. Die Gründe für diese Aussage sollen nachfolgend beschrieben werden.

Der Niederdruckverdichter ZTL 020 wurde mit über den Radien der Stufen linear vergrößerter Energiezufuhr an die zu verdichtende Luft im Laufgitter ausgelegt. Das bedeutet, dass auch der Verdichtungsdruck der Luft sich über den Stufenradius am Leitgitteraustritt der dritten Stufe vergrößern muss. Die Messstelle zur Ermittlung der Messwerte muss am Kontinuitätsradius für den Massenstrom der Sekundärluft  $\bar{r} = 0,365 \text{ m}$  liegen. Für die Drosselung zur Ermittlung der Kennwerte dieses Verdichters wird eine Drossel unmittelbar hinter der dritten Stufe benötigt, deren Drosselwert dem jeweiligen Verdichtungsdruck der Luft am Austritt der Stufe 3 entspricht. Der Verdichter wurde aber mit einer Druckdrossel gefahren, die über den Radius der dritten Verdichterstufe nur einen einzigen Drosselwert am Kontinuitätsradius ( $\bar{r} = 0,327 \text{ m}$ ) bewirken konnte. Solche Drosseln sind zwar für Verdichter mit in allen Stufen über den Radius konstanter Energieumsetzung geeignet aber nicht für Axialverdichter mit über den Radien linear veränderlicher Energiezufuhr an das Gas. Da aber diese Niederdruckstufen an den Kontinuitätsradien des sekundären Luftstromes dieser Luft die konzipierte Energieumsetzung bewirken ist hier ein Energieüberschuss gegenüber dem durch die Drossel am Kontinuitätsradius ( $\bar{r} = 0,327 \text{ m}$ ) wirksamen Drosselwert vorhanden, Dies macht sich durch eine Vergrößerung der kinetischen Energie der aus der dritten Stufe austretenden Luft bemerkbar wodurch ein vergrößerter Luftdurchsatz im Sekundärteil des Verdichters vorgetäuscht wird.

Grundsätzlich kann man aber einschätzen, dass sowohl der Hochdruckteil als auch der Sekundärteil des Verdichters ZTL 020 die geforderten Werte erreichen.



## Sachwortverzeichnis

### A

Abblasequerschnitt 248; 249  
Absolut- und Relativsystem 49  
Anwendung der Prandtl-Regel 184  
Auftriebskraft 199  
Axialgeschwindigkeitsverlauf 8  
Axialschubausgleich 253

### B

Beispiel für Stufen optimalen Wirkungsgrades 125  
Beschleunigungsgitter 191  
Betriebsverhalten der Verdichter 224  
Bezeichnungen am Profil bei  
    Unterschallanströmung 155  
    Überschallanströmung 155  
Breitbandschaufel/Seitenverhältnis einer Breitbandschaufel bei  
Überschallanströmung 146

### C

Charakteristische Werte bei  
Überschallanströmung der Laufgitter 144  
Charakteristische Werte für  
Grenzleistungsstufen 131

### D

Drallverteilung 7; 66  
Dreidimensionale Strömungsvorgänge  
74 u. f.  
Drallwiderstand der Profile 215  
Druckverteilung am Profil 194  
Druckpunktlage am Profil 197 bis 202  
Durchsatzkontrolle 72

### E

Einspannelastizität der Schaufeln 269  
Erreichbare Anströmmachzahlen am  
Laufgittereintritt (Überschall) 138

### G

Gasschwingungen 275  
Geschwindigkeitsvektorendiagramm 64  
Gitterbelastungszahl 49  
Gitterwirkungsgrad 156  
Gitterparameter 183  
Gittereinfluss auf die induzierten  
Geschwindigkeiten 180  
Gitterverlust 242

### G

Grenzleistungsstufen 128  
Grenzen im Vorleitgitter 242

### H

Hinterkantendicke der Profile 165; 170

### I

Instabilitätsbereich der Profile 2003

### K

Keilwinkel 35  
Kinematik bei Überschallanströmung der  
Laufgitter 132 bis 136- -  
Koaxialer Zylinderschnitt 7  
Kontinuitätsradius 91 bis 93  
Korrekturwerte der Drallströmung für  
Gitter ohne Vorleitgitter 139  
Kräfte am Profil 138  
Kräfte am Massenelement 64

### L

Labyrinthberechnung 256  
Lieferzahl 2

### M

Maximale Profildicke 196  
Mischungswegkonstante 101

### N

Nasenradius der Profile 165; 168

### O

Optimalwerte für  
- ein Stufenelement 46  
-Stufen optimalen Wirkungsgrades  
144 bis 116

### P

Prandtl-Faktor 184  
Pseudostromlinien 7; 66  
Profilverlust 55  
Profilskelettlinie 160  
Profilkoordinaten 190  
Profilschwerpunkte 211 bis 212  
Profilträgheitsmomente 213  
Profilform bei Überschallanströmung  
220 bis 223

## P

Profilbezeichnungen 194

## Q

Quell-Senkenbelegung am Profil 194

## R

Radialspalt 60

Randverlust 37

Reaktionsgrad

-kinematisch 2: 53

-statisch 53

Resonanzschaubild bei

Schaufelschwingungen 265

## S

Schaufelschwingungen 259

Schubkraft am Profil 199

Sekundärwirbel 4: 66

Sekundärverlust 56

Singularitätenverteilung auf der

Profilsehne 157

Strömungsebene 1; 66

Strömungsstabilität 43

Stoßwinkel und Keilwinkel 34; 38

Spaltverlust 59

Stufenverlust

- relativ 102

\_ absolut 104

Stufen optimalen Wirkungsgrades 1; 117

## T

Tangentialkraft am Profil 199

Temperatur- und Druckverlauf im

Absolut- und Relativsystem 49

Thermodynamischer Verlustfaktor 41

Torsionsschwingungen 265

## U

Umrechnung von der kompressiblen

Strömungsebene in die inkompressible

Strömungsebene und umgekehrt 184

## V

Verdichtungsstoßkombination 27

Verlustbeiwert 57

## W

Widerstandsbeiwert 51

Wirkungsgrad des Stufenelementes 45;47

Wirkungsgrad der Stufe 100

## Z

Zähigkeitseinfluss auf den

Geschwindigkeitsverlauf 93 bis 100

Zirkulationsbeiwert 47

Zirkulation 164

Zulässige Strömungsumlenkung 48

Zulässiger Gitterstoß 238

Zulässige Profildicke 196

Zustandsänderung des Gases bei

-Unterschallanströmung 20 u.f.

\_ Überschallanströmung 27 u.f.

\_ im mehrstufigen Verdichter 39

## Literaturverzeichnis.

- /1/ Faltin, H. Technische Wärmelehre; Verlag von Wilhelm Knapp Halle (Saale) 1948
- /2/ Dubbel. Taschenbuch für den Maschinenbau. Bd.:1 Berlin Springer-Verlag 1943
- /3/ Keenan J.H. und Kaye J. Gas Tables. John Wiley u.Sohn. New York 1948
- /4/ Albring, W. Angewandte Strömungslehre. Verlag von Theodor Steinkopf Dresden und Leipzig 1961.
- /5/ Schnell, E. Probleme des Überschallverdichters. MTZ 16 (1955) Nr.:2
- /6/ Bischoff, H. Überschall-Axialverdichter. Zukunftsmöglichkeiten der Turbotriebwerke. Luftfahrttechnik 5 (1959) Nr.:4
- /7/ Liepe, F. Zur Theorie des Überschallverdichters. Maschinenbautechnik. 7. Jg.(1958) Heft 11.
- /8/ Schubert, F. Zur Theorie des stationären Verdichtungsstoßes. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. B 23 Juni (1943) Nr.:3.
- /9/ Baule. Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. 5. Auflage. S. HIRTZEL Verlag. Leipzig 1955.
- /10/ Howell, A.R. Bonham R.P. Overall and Stage Characteristics of Axial-flow Compressors. Proceedings 163 (1950) 60 S.:235-248.
- (11) Wichert, K. Beitrag zur optimalen Schaufelbelastung in axial durchströmten Turbomaschinen. Der Maschinenmarkt 23a Coburg- Nr. 58. 20.Juni 1956.
- (12) Schlichting,H. Grenzschichttheorie. Verlag: G. Braun, Karlsruhe 1954.
- (13) Schlichting, Truckenbrodt. Aerodynamik des Flugzeuges. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York 1967.
- /14/ Emery,J.C.,Herrig, L.J., Erwin,J.R., Felix, A.R. Systematic Two-Dimensional Cascade Test to NACA.65-Series Compressor Blades At Low Speeds. NACA-Report 1368.
- /15/ Bahr, W. Untersuchungen über den Einfluss der Profildicke auf die Verlustbeiwerte von Verdichtergittern bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten. Forschungsbericht Nr.62.02 Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen 1961.
- /16/ Scholz, N. Über den Einfluss der Schaufelhöhe auf die Randverluste in Schaufelgittern. Forschung, 20. Bd. Heft 5, 1954.
- /17/ Hubert,G. Vergleich der dreidimensionalen Strömung durch Verdichterleiträder mit bewegter Nabe und durch gerade Verdichtergitter Zeitschrift für Flugwissenschaft 8(1960)

- /18/ Hubert, G. Untersuchungen über die Sekundärströmungen in axialen Turbomaschinen. VDI-Forschungsheft 496, Ausgabe B, Bd. 29, 1963.
- /19/ Bauermeister, K.J. Über den Einfluss der Schaufelbelastung auf die Sekundärströmung in geraden Turbinen- und Verdichtergittern. VDI-Forschungsheft 496, Ausgabe B. Bd. 29. 1963.
- /20/ Wolf, H. Untersuchungen von Sekundärströmungen in geraden Verdichtergittern. Maschinenbautechnik 14 (1965) H.12.
- /21/ Gersten, G. Über den Einfluss der Geschwindigkeitsverteilung in der Zuströmung auf die Sekundärströmung in geraden Schaufelgittern. Forsch. Ing.-Wesen. Bd.23 (1957).
- /22/ Schäffer, H. Untersuchungen über die dreidimensionale Strömung durch axiale Schaufelgitter mit zylindrischen Schaufeln. Forsch. Ing.-Wesen Bd. 21 (1955).
- (23) Speidel, L. Vergleichende Untersuchungen der Sekundärströmung eines Verdichtergitters im Gitterkanal und in der Stufe. Forschungsbericht 62.02. Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen 1961
- (24) Klein, A. Untersuchungen über den Einfluss der Zuströmungsgrenzschicht auf die Sekundärströmung in den Beschaukelungen von Axialturbinen. Forsch. Ing.-Wesen 32 (1966) Nr.2
- (25) Schlichting, H. Randverluste in Pumpengittern. Z.f.Flugwiss. 4 (1965)
- (26) Wolf, H. Die Randverluste in geraden Schaufelgittern. Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Dresden 10 (1961) H. 2
- (27) Eckert, B. Axialkompressoren und Radialkompressoren. Berlin/ Göttingen/ Heidelberg 1955.
- (28) Rehbach, J. Untersuchungen der Spaltverluste von Turbinenrädern mit bewegter Spaltwand. Forsch. Ing.-Wesen, Bd. 26, 1960, Ausgabe A.
- (29) Jefferson, I.L. ; Member, B.A.; Turner, R.C. Some chrouding and tip clearance effects in axial flow compressors. 7; February 1858.
- (30) Ainley, D. An Approximate Method of the Estimation of Point Efficiency of Axial-Flow Turbines. Aeronautical Res Council (Great Britain). Current Paper Nr. 30, (1950).
- (31) Traupel, W. Neue allgemeine Theorie der mehrstufigen axialen Turbomaschinen. Diss. ETH Zürich/Leemann u. Vo. 1942.

- (32) Mäcker, G. Die Kinematik in der Stufe eines Axialverdichters mit über der Schaufelhöhe konstanter oder linear veränderlicher Energiezufuhr an das Medium. Maschinenbautechnik 11 (1962) Heft 2.
- (33) Schröder, H.J. Entwicklung eines Näherungsverfahrens zur Berechnung von dreidimensionalen Gitterströmungen. Jahrbuch der WGL 1955.
- (34) Eckert, B. Axialkompressoren und Radialkompressoren. Springer. Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg. 1955.
- (35) Petermann, H. Über den Strömungsverlauf in Axialverdichtern. Konstruktion 8 (1956) H.1
- (36) Conrad, O. Strömung in Axialverdichtern mit 50% Reaktion. MTZ 19 (1958) Nr. 8
- (37) Seippel, C. Räumliche Strömung durch vielstufige Turbinen. BBC-Mitteilungen 45. (1958) Nr. 3.
- (38) Bragg, S.L. Some exact solution of the flow through annular cascade actuator discs. J. Aeronautics 17 (1950)
- (39) Breshin, J.R.: Two-dimensional flow about half bodies between parallel walls. J. Appl. Mech. 22 (1955).
- (40) Chung-Hua Wu. Subsonic flow of air through a Single-Stage and a seven stage compressor. NACA TN 2961 (1963)
- (41) Hütte. Des Ingenieurs Taschenbuch Bd. 1, 27. Auflage. Berlin 1950 Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn.
- (42) Baule, B. Die Methodik des Naturforschers und Ingenieurs. Bd: 5 Variationsrechnung. 2. Auflage. S. HIRZEL-VERLAG Leipzig 1945 § 12
- (43) Andrews, Jeffs, Mardley. Test Concerning Designs of Blades for Axial-Compressors. Report and Memoranda Nr.2929 (1951).
- (44) Eck, B. Technische Strömungslehre. Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg. (1954)
- (45) Kaufmann, W. Technische Strömungslehre. Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1954
- (46) Recknagel-Sprengel. Taschenbuch für Heizung und Lüftung. Verlag von Oldenbourg, München. 1956
- (47) Jahnke, H.D. Auslegung und Untersuchung von Axialverdichtern für stationäre Gasturbinenanlagen. Maschinenbautechnik 10 (1961) H. 3.



- (48) Gut, W. Vergleich der relativen Verluste und der Charakteristik von Axialkompressoren. Escher-Wyss-Mitteilungen. Zürich 32 /1959) 2/3
- (49) Hoffmeister, M. Zur Bildung strömungstechnischer und thermischer Mittelwerte an einer Turbomaschine. Maschinenbautechnik 12 (1963) H. 11
- (50) Mäcker, G. Untersuchungen über die optimale Stufenkinematik hochbelasteter Axialverdichter. Dissertation an der Technischen Universität Dresden. Fakultät für Maschinenwesen 1969.
- (51) de Haller, P. Das Verhalten von Tragflügelgittern in Axialverdichtern und im Windkanal. VDI-Bericht Bd. 3, Düsseldorf (1955)
- (52) Marcinowsky, H. Optimalwerte bei Axialventilatoren. Voith Forschung und Konstruktion. Heft 5 Oktober 1959.
- (53) Hausenblas, H. Axialverdichterberechnung in Großbritannien und den USA. Konstruktion. Heft 5, Oktober 1959.
- (54) Held, W. Die Auslegung von Verzögerungsgittern axialer Turbomaschinen mittels einfacher Näherungsbeziehungen. Die Technik, 14. Jahrg. Heft 1, Jan. 1959.
- (55) Wolf, H. Ein einfaches Berechnungsverfahren für Verdichtergitter. Maschinenbautechnik 12 (1963) H. 8.
- (56) Stiefel, W. Betrachtungen zur Auslegung der Beschau felung von axial durchströmten Verdichtern. MTZ, Jahrg. 20; Heft 9, September 1959.
- (57) Weinig, F. Die Strömung um Schaufeln von Strömungsmaschinen. Leipzig: Joh.-A. Barth 1935.
- (58) Schröder, H.J. Das ebene gerade Profilgitter- ein altes Thema in neuer Beleuchtung. Maschinenbau und Wärmewirtschaft 12. Jahrg. , H 7/8; 1957.
- /59/ Schlichting, H. Die Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter. VDI-Forschungsheft 447; Band 21; 1955.
- (60) Scholz, N. Einfluss des Nasenradius uf die kritische Anströmmachzahl von Profilen. Jahrbuch der WGL 1960.
- (61) Glauert, H. Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie. Berlin 1929. Vergl. Auch ders.: The elements of aerofoil and airserew theory. 2. Aufl., Cambridge 1948.
- (62) Birnbaum, W. Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. ZAMM (1923 ).

- (63) Hausenblas, H. Zusammenfassende Übersicht über britische Schaufelgittermessungen. Konstruktion 11 (1959) Nr.:12
- (64) Riegels, F. Das Umströmproblem bei inkompressibler Potentialströmung. Ing. Arch. 16 (1948) und 17 (1949)
- (65) Prandtl, L. Strömungslehre. Verlag Friedr. Vieweg u. Sohn. Braunschweig 1956.
- (66) Wolf, H. Die Strömungsverluste in Schaufelgittern Unveröffentlichter Bericht des VEB Entwicklungsbau Pirna.
- (67) Wolf, H. Über den Einfluss der Turbulenz und der Reynoldzahl auf die Strömung in Verdichtergittern. Maschinenbautechnik 13 (1964), Heft 12
- (68) Traupel, W. Thermische Turbomaschinen Bd.1 Springer – Verlag. Berlin/Göttingen/Heidelberg.
- (69) Scholz, N. Strömungsuntersuchungen an Schaufelgittern. VDI – Forschungsheft 442, Ausgabe B, Bd.: 21, 1954.
- (70) Howell, A.R. The Present Basis of Axial Flow Compressor. Desgn, Part 1 Cascade Theorie and Performance. Report and Memoranda Nr.: 2095, June 1
- (71) Cordes, G. und Beckmann, G. Über den Einfluss des Isentropenexponenten auf die Kennfelder von Kreiselmashinen. Maschinenbautechnik 10 (1961) H.9
- (72) Horlock, J.H. Axial-Flow Compressors. Buherworths Scientific Publications. London 1958.
- (73) Stone, A. Effects of Stage Characteristic and Matching an Axial-Flow Compressor Performance. Trans. ASME 80 (1958)8
- (74) Gatzke, H. und Mäcker, G. Der Einfluss der Belastung von Axialverdichter-Einzelstufen und deren Gitter auf das Betriebsverhalten von mehrstufigen Axialverdichtern. Maschinenbautechnik (1963) H.3.
- (75) Salzmann, F. Über die Druck-Volumenkennlinien vielstufiger Axialverdichter. Schweizer Bauzeitung 124 (1944) 2.
- (76) Held, W. Über die Kennfeldberechnung mehrstufiger Axialverdichter bei hohen Unterschallgeschwindigkeiten und großen Druckverhältnissen. Wissenschaftliche Zeitschrift der T.H.-Dresden. 8 (1958/59) Nr.:2
- (77) Beckmann, G. Eine einfache analytische Beschreibung des Teillastverhaltens axialer Strömungsmaschinen. Maschinenbautechnik 13 (1964) H.3
- (78) Mäcker, G. Eine einfache Kennfeldberechnungsmethode ein und mehrstufiger Axialverdichter. Maschinenbautechnik 14 (1965). H.:8.

- (79) Pfeleiderer H. Strömungsmaschinen. Berlin/Göttingen/Heidelberg. Springer-Verlag 1952
- (80) Schmidt, R. Schwingungsprobleme an Strahltriebwerken. – 1. Teil Deutsche Flugtechnik (1958) H. 12.
- (81) Müller .H. Berechnungsverfahren für Schaufelschwingungen und Vergleich mit experimentellen Untersuchungen. Maschinenbautechnik 11 (1962) H. 12
- (82) Schmidt, R. Das Schwingungsverhalten von Verdichter-Leitschaufeln. Die Technik 11 (1956) H.7
- (83) Schmidt, R. Schwingungsprobleme an Strahltriebwerken – I Teil Deutsche Flugtechnik (1958) H. 12
- (84) Schmidt, R. Festigkeitsprobleme an Strahltriebwerken - II Teil Deutsche Flugtechnik (1958) H.9
- (85) Brandner, F. Die Entwicklung der Propellerturbinen in der Sowjetunion. MTZ 18 (1957) Nr.:8
- (86) Hartlepp, H. Entwicklung des Strahltriebwerkes Pirna 014 und des Verkehrsflugzeuges 152 (Eine Chronik über 15 Jahre Luftfahrtentwicklung im Osten Deutschlands) Vortrag Deutsches Museum München. 1. Februar 1991.
- (87) Bergander, H. Die deutsche Triebwerks- und Flugzeugentwicklung in der Sowjetunion 1946 – 1954. Vortrag vor der Interessengemeinschaft 152 in Dresden am 28.06.1994
- (88) Mewes, K.H. : Pirna 014; Flugtriebwerke der DDR. – Entwicklung, Erprobung und Bau von Strahltriebwerken und Propellerturbinen. AVIAATIC – VERLAG Oberhaching 1997.

## Form- und Rechenblätter.

### **Formblatt: 1**

Ermittlung der Gitterparameter für Laufgitter.

### **Formblatt: 2**

Ermittlung der Gitterparameter für Leitgitter.

### **Formblatt: 3**

Ermittlung der Gitterparameter für Beschleunigungsgitter.

### **Formblatt: 4**

Zur Ermittlung der Profilkordinate.

### **Formblatt: 5**

Ermittlung der Koeffizienten für die Quellbelegung  
symmetrischer Profile und Rechenblatt.



**Ermittlung der Gitterparameter.**

Formblatt: 1.1

Stufe: n =

Laufgitter

Profilreihe: Q

$$T_1^* = \begin{bmatrix} 0 \text{ K} \\ J / (\text{kg}^0 \text{ K}) \end{bmatrix} \quad \kappa =$$

$$c_p = \begin{bmatrix} J / (\text{kg}^0 \text{ K}) \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} J / (\text{kg}^0 \text{ K}) \end{bmatrix}$$

$$C = \text{(siehe Abschn. 6.5)}$$

1	$v = r/r_a$	1,0		$\bar{r}/r_a$		$r_i/r_a$	Dim.
2	$c_{ax\infty} = (c_{ax1} + c_{ax2})/2$				aus dem Geschwindigkeitsvektordiagramm <sup>1)</sup>		m/s
3	$(c_{ax2} - c_{ax1})/2$			siehe 1)			m/s
4	$\beta_{\infty k}$			siehe 1)			grad.
5	$\alpha_{\infty k}$			siehe 1)			grad
6	$\sin \beta_{\infty k}$						-
7	$\sin \alpha_{\infty k}$						-
8	$w_\infty = (2)/(6)$						m/s
9	$c_\infty = (2)/(7)$						m/s
10	$c_1^2$			siehe 1)			$(\text{m/s})^2$
11	$w_1^2$			siehe 1)			$(\text{m/s})^2$
12	$w_\infty^2 = (8)^2$						$(\text{m/s})^2$
13	$(10) - (11) + (12)$						$(\text{m/s})^2$
14	$(13)/2c_p$						$^0\text{K}$
15	$T_1^* - (14)$						$^0\text{K}$
16	$M_\infty^2 = (12)/[\kappa R(15)]$						-
17	$\sqrt{1 - M_\infty^2}$						-
18	$(M_\infty \sin \beta_{\infty k})^2$						-
19	$\cot \alpha n \beta_{\infty k}$						-
20	$\cot \alpha n \beta_{\infty i} = (19)/(17)$						-
21	$\beta_{\infty i}$						grad
22	$t_i/t_k = \sqrt{1 - (18)}$						-
23	$(t/l)_k$						-
24	$(t/l)_i = (22)(23)$						-
25	$\Delta w_u$			siehe 1)			m/s
26	$\bar{\Gamma}_k = 1/2 (25)/(8)$						-
27	$\bar{\Gamma}_i = (26)/(22)$						-

Fortsetzung siehe Blatt 2

1	$v = r/r_a$							Dim.
28	$v_{\mathcal{W}} / (\Delta w_u / 2) = v_{\mathcal{H}} / (\Delta w_u / 2)$	siehe Abb.: 6.3.3.2						-
29	$u_{\mathcal{W}} / (\Delta w_u / 2) = u_{\mathcal{H}} / (\Delta w_u / 2)$	siehe Abb.: 6.3.3.3						-
30	$d/l$	siehe Abb.: 6.3.6.4						-
31	$F_P / l^2 = C(30)$							-
32	$(F_P / l^2)_i = (31)/(17)$							-
33	$v_{qV} / w_\infty (F_P / l^2)_i$	siehe Abb.: 6.3.3.8 und 6.3.3.12						-
34	$u_{qV} / w_\infty (F_P / l^2)_i$	siehe Abb.: 6.3.3.10 und 6.3.3.14						-
35	$v_{qH} / w_\infty (F_P / l^2)_i$	siehe Abb.: 6.3.3.9 und 6.3.3.						-
36	$u_{qH} / w_\infty (F_P / l^2)_i$	siehe Abb.: 6.3.3.11 und 6.3.3.15						-
37	(27)(28)							-
38	$\cos \beta_{oi}$							-
39	(27)(18)(38)							-
40	(3)(6)/(8)							-
41	(39)+(40)							-
42	(20)(41)							-
43	(32)(33)							-
44	$(v_V / w_\infty)_i = (37)+(42)-(43)$							-
45	(27)(29)							-
46	(32)(34)							-
47	$(u_V / w_\infty)_i = 1+(45)-(41)+(46)$							-

(21), (28), (33), (34), (35) und (36) ohne Vorzeichen benutzen.

Fortsetzung siehe Blatt 3

							Dim.
1	$v = r/r_a$						
48	$\tan \vartheta_{1i} = \frac{(44)}{(47)}$						-
49	$\tan \vartheta_{1k} = (48)(17)$						-
50	$\vartheta_{1k}$						grd
51	$(32)(35)$						-
52	$\left(\frac{v_H}{w_\infty}\right)_i = (37) + (42) + (51)$						-
53	$(32)(36)$						-
54	$\left(\frac{u_H}{w_\infty}\right)_i = 1 - (45) + (41) - (53)$						-
55	$\tan \vartheta_{2i} = \frac{(52)}{(54)}$						
56	$\tan \vartheta_{2k} = (55)(17)$						
57	$\vartheta_{2k}$						grd
58	$\frac{1}{2}[(57) - (50)]$						-
59	$\beta_T = (4) + (58)$						grd
60	$\Theta = (50) + (57)$						grd
61	$\frac{1}{2}(60)$						grd
62	$\tan(61)$						-
63	$\frac{f}{l} = \frac{1}{4}(62)$						-
64	$\beta_{\infty k} - \beta_{1k}$		siehe 1)				grd
65	$i = -(\vartheta_{1k} - (64))$						grd
66	$\beta_{2k} - \beta_{\infty k}$		siehe 1)				grd
67	$\delta = \vartheta_{2k} - (66)$						grd

Zur Kontrolle graphisch auftragen:

(17);(27);(28);(29);(33);(34);(35);(36);(50);(57);(59);(60);(63);(65)und(67.)





### Ermittlung der Gitterparameter

Formblatt: 2.1

Stufe n:

Leitgitter

Profilreihe: Q

$$T_2^* = \begin{bmatrix} 0 & K \end{bmatrix} \quad \kappa =$$

$$c_p = \begin{bmatrix} J / kg^0 K \end{bmatrix} \quad R = \quad J / kg^0 K$$

$$C = \quad (\text{siehe Abschn.: 6.5})$$

Bemerkung: die Indices 1 und 2 der Geschwindigkeiten beziehen sich auf den Ein- bzw. Austritt des Leitgitters.

1	$v = \frac{r}{r_a}$	1,0								Dim.	
2	$c_{ax\infty} = (c_{ax1} + c_{ax2})/2$								aus dem Geschwindigkeitsvektordiagramm	1)	m/s
3	$(c_{ax2} - c_{ax1})/2$								siehe 1)		m/s
4	$\alpha_{\infty k}$								siehe 1)		grad.
5	$\sin \alpha_{\infty k}$										-
6	$c_\infty = (2)/(5)$										m/s
7	$c_\infty^2 = (6)^2$										(m/s) <sup>2</sup>
8	$(7)/(2c_p)$										°K
9	$T_2^* - (8)$										°K
10	$M_\infty^2 = (7)/\kappa R(9)$										-
11	$\sqrt{1 - M_\infty^2}$										-
12	$(M_\infty \sin \alpha_{\infty k})^2$										-
13	$\cot \alpha_{\infty k}$										-
14	$\cot \alpha_{\infty i} = (13)/(11)$										-
15	$\alpha_{\infty i}$										grad.
16	$t_i / t_k = \sqrt{1 - (12)}$										-
17	$(t/l)_k$										-
18	$(t/l)_i = (16)(17)$										-
19	$\Delta c_u$										m/s
20	$\Gamma_k = (19)/[2(6)]$										-
21	$\Gamma_i = (20)/(16)$										-
22	$v_\gamma / (\Delta c_u / 2)$										-
23	$u_\gamma / (\Delta c_u / 2)$										-
24	d/l								siehe Abb.: 6.3.6.4		-
25	$F_p / l^2 = C(24)$										-
26	$(F_p / l^2)_i = (25)/(11)$										-
27	$v_{qV} / [c_\infty (F_p / l^2)]$								siehe Abb.: 6.3.3.3 und 6.3.3.12		-
28	$u_{qV} / [c_\infty (F_p / l^2)]$								siehe Abb.: 6.3.3.10 und 6.3.3.14		-
29	$v_{qH} / [c_\infty (F_p / l^2)]$								siehe Abb.: 6.3.3.9 und 6.3.3.13		-
30	$u_{qH} / [c_\infty (F_p / l^2)]$								siehe Abb.: 6.3.3.11 und 6.3.3.15		-

Fortsetzung siehe Blatt 2

1	$v = r/r_a$					Dim.
31	(21)(22)					-
32	$\cos \alpha_{oi}$					-
33	(21)(12)(32)					-
34	(3)(5)/(6)					-
35	(33)+(34)					-
36	(14)(35)					-
37	(26)(27)					-
38	$(v_v / c_\infty)_i = (31)+(36)-(37)$					-
39	(21)(23)					-
40	(26)(28)					-
41	$(u_v / c_\infty)_i = 1+(39)-(35)+(40)$					-
42	$\tan \vartheta_{1i} = (38)/(41)$					-
43	$\tan \vartheta_{1k} = (42)(11)$					-
44	$\vartheta_{1k}$					grad.
45	(26)(29)					-
46	$(v_H / c_\infty)_i = (31)+(36)+(45)$					-
47	(26)(30)					-
48	$(u_H / c_\infty)_i = 1-(39)+(35)-(47)$					-
49	$\tan \vartheta_{2i} = (46)/(48)$					-
50	$\tan \vartheta_{2k} = (49)(11)$					-
51	$\vartheta_{2k}$					grad.
52	$(\vartheta_{2k} - \vartheta_{1k})/2$					grad.
53	$\alpha_T = (4)+(52)$					grad.
54	$\Theta = \vartheta_{2k} + \vartheta_{1k}$					grad.
55	(54)/2					grad.
56	$\tan(55)$					-
57	$f/l = (56)/4$					-
58	$\alpha_{\infty k} - \alpha_{1k}$			siehe 1)		grad.
59	$i = -(\vartheta_{1k} - (58))$					grad.
60	$\alpha_{2k} - \alpha_{\infty k}$			siehe 1)		grad.
61	$\delta = \vartheta_{2k} - (60)$					grad.

Zur Kontrolle graphisch auftragen:

(11);(21);(22);(23);(27);(28);(29);(30);(44);(51);(53);(54);(57);(59)und(61)

**Ermittlung der Gitterparameter.**

Formblatt: 3.1

$T_1^* =$   $[^{\circ}K]$        $\kappa =$   
 $c_p =$   $[J/kg^{\circ}K]$        $R =$   $[J/kg^{\circ}K]$   
 $C = 0,7510$

Vorleitgitter.  
 Beschleunigungsgitter.  
 Profilverihe: Q 30

1	$v = r/r_a$	1,0		$\bar{r}/r_a$		$r_i/r_a$	Dim.
2	$c_{ax0}$		aus dem Geschwindigkeitsvektordiagramm			<sup>1)</sup>	m/s
3	$c_{ax1}$		siehe 1)				m/s
4	$c_{ax\infty} = ((2) + (3))/2$						m/s
5	$\alpha_{\infty k}$		siehe 1)				grad.
6	$\sin \alpha_{\infty k}$						-
7	$c_{\infty} = (4)/(6)$						m/s
8	$c_{\infty}^2 = (7)^2$						(m/s) <sup>2</sup>
9	$(8)/2c_p$						<sup>0</sup> K
10	$T_1^* - (9)$						<sup>0</sup> K
11	$M_{\infty}^2 = (8)/\kappa R(10)$						-
12	$\sqrt{1 - M_{\infty}^2}$						-
13	$(M_{\infty} \sin \alpha_{\infty k})^2$						-
14	$\cot \alpha_{\infty i}$						-
15	$\cot \alpha_{\infty i} = (14)/(12)$						-
16	$\alpha_{\infty i}$						grad.
17	$t_i/t_k = \sqrt{1 - (13)}$						-
18	$(t/l)_k$						-
19	$(t/l)_i = (18)(17)$						-
20	$\Delta c_u$						m/s
21	$\Gamma = (20)/2(7)$						-
22	$\Gamma_i = (21)/(17)$						-
23	$v_{\gamma} / (\Delta c_u / 2)$		siehe Abb.: 6.3.3.2				-
24	$u_{\gamma} / (\Delta c_u / 2)$		siehe Abb.: 6.3.3.3				-
25	d/l		siehe Abb.: 6.3.6.4				-
26	$F_p / l^2 = C(25)$						-
27	$(F_p / l^2)_i = (26)/(12)$						-
28	$v_{qV} / [c_{\infty} (F_p / l^2)]$		siehe Abb.: 6.3.3.4				-
29	$u_{qV} / [c_{\infty} (F_p / l^2)]$		siehe Abb.: 6.3.3.6				-
30	$v_{qH} / [c_{\infty} (F_p / l^2)]$		siehe Abb.: 6.3.3.5				-
31	$u_{qH} / [c_{\infty} (F_p / l^2)]$		siehe Abb.: 6.3.3.7				-

Fortsetzung siehe Blatt 2

1	$v = r / r_a$					Dim.
32	(22)(23)					-
33	$\cos \alpha_{oi}$					-
34	(22)(33)(13)					-
35	$[(3)-(2)]/2$					-
36	(35)(6)/(7)					-
37	(34)+(36)					-
38	(15)(37)					-
39	(27)(28)					-
40	$(v_V / c_\infty)_i = (32)+(28)-(39)$					-
41	(22)(24)					-
42	(27)(29)					-
43	$(u_V / c_\infty)_i = 1 - (42) - (37) + (41)$					-
44	$\tan \mathcal{G}_{1i} = (40)/(43)$					-
45	$\tan \mathcal{G}_{1k} = (44)(12)$					-
46	$\mathcal{G}_{1k}$					grad.
47	(27)(30)					-
48	$(v_H / c_\infty)_i = (32)+(38)+(47)$					-
49	(27)(31)					-
50	$(u_H / c_\infty)_i = 1 + (41) + (37) - (49)$					-
51	$\tan \mathcal{G}_{2i} = (48)/(50)$					-
52	$\tan \mathcal{G}_{2k} = (51)(12)$					-
53	$\mathcal{G}_{2k}$					grad.
54	$(\mathcal{G}_{2k} - \mathcal{G}_{1k})/2$					grad.
55	$\alpha_T = (5) - (54)$					grad.
56	$\Theta = (46) + (53)$					grad.
57	(56)/2					-
58	$\tan(57)$					-
59	$f/l = (58)/4$					-
60	$i = -[(5) + (47) - 90^\circ]$					grad.
61	$\alpha_1$			siehe 1)		grad.
62	$\delta = (61) - (5) + (53)$					grad.

Zur Kontrolle graphisch auftragen:

(12); (22); (23); (24); (28); (29); (30); (31); (46); (53); (55); (56); (59); (60) und (62.)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$x_s / l$	$x'_s = (1)y$	$y_d / d$	$y'_d = (3)d$	$y_s / f$	$y'_s = (5)f$	$\frac{\tan \kappa}{f/l}$	$\tan \kappa = (7)f/l$	$\sin \kappa$	$\cos \kappa$	$y_d \sin \kappa = (4)(9)$	$y_d \cos \kappa = (4)(10)$	$x_o = (2)-(11)$	$x_U = (2)+(12)$	$y_o = (6)+(12)$	$y_U = (6)-(12)$
0				0		4,0000									
1	0,0076			0,0302		3,9392									
2	0,0301			0,1168		3,7592									
3	0,0670			0,2500		3,4640									
4	0,1170			0,4132		3,0640									
5	0,1786			0,5868		2,5712									
6	0,250			0,7500		2,0000									
7	0,3290			0,8830		1,3680									
8	0,4132			0,9699		0,6944									
9	0,500			1,0000		0,0									
10	0,5868			0,9699		-0,6944									
11	0,671			0,8830		-1,3680									
12	0,750			0,7500		-2,0000									
13	0,8214			0,5868		-2,5712									
14	0,8830			0,4132		-3,0640									
15	0,9330			0,2500		-3,4640									
16	0,9699			0,1168		-3,7592									
17	0,9924			0,0302		-3,9392									
18	1,0000			0		-4,0000									

**Zur Ermittlung der Profilkoordinaten**

(siehe auch Abb.: 6.3.5.3)

Profil-Nr.	A =	$x'_s = Al$	mm
Stufe n =	B =	$y'_s = Bl$	mm
$r/r_a =$	r = mm	$\beta_T =$	grd
d = mm	f/l =	f =	mm
l = mm	d/l =		



**Berechnung der Koeffizienten für die Quellbelegung symmetrischer Profile.**

Vorgegebene Werte:

Nasenradius  $\frac{r_N}{l} =$

Hinterkantendicke  $\frac{2y_H}{l} =$

Profildicke  $\frac{d_{\max}}{l} =$

Dickenrücklage  $\frac{x_{d\max}}{l} =$

Zu berechnende Werte:

$$B_0 = \sqrt{2 \frac{r_N}{l}} =$$

$$B_1 = \frac{4}{\pi} \frac{2y_H}{l} - 2B_0 =$$

$$\cos \varphi_D = 1 - 2 \frac{x_{d\max}}{l} =$$

$$\sin \varphi_D = 2 \sqrt{\frac{x_{d\max}}{l} - \left(\frac{x_{d\max}}{l}\right)^2} =$$

$$\varphi_D =$$

$$\arccos \varphi_D$$

Zur Bestimmung der Konstanten  $B_2$  und  $B_3$  gelten folgende zwei Gleichungen:

$$B_0 + 2B_1 \frac{x_{d\max}}{l} + 4B_2 \frac{x_{d\max}}{l} \left(1 - 2 \frac{x_{d\max}}{l}\right) + 2B_3 \frac{x_{d\max}}{l} \left[16 \left(\frac{x_{d\max}}{l}\right)^2 - 16 \frac{x_{d\max}}{l} + 3\right] = 0$$

$$\frac{d_{\max}}{l} = \frac{1}{4} (2B_0 + B_1) \hat{\varphi}_D + \frac{B_2}{2} \sin \varphi_D - \frac{B_1}{4} \sin \varphi_D \cos \varphi_D + \frac{B_2}{3} \sin^3 \varphi_D + \frac{B_3}{2} \sin^3 \varphi_D \cos \varphi_D$$

$$\text{mit } \hat{\varphi}_D = \frac{\varphi^\circ \pi}{180}$$



Rechenblatt

$$\frac{y}{d} = \frac{1}{8}(2B_0 + B_1)\hat{\varphi} + \frac{B_0}{4}\sin\varphi - \frac{B_1}{8}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{B_2}{6}\sin^3\varphi + \frac{B_3}{4}\sin^3\varphi\cos\varphi$$

<u>1</u>	<u>2</u>	<u>3</u>	<u>4</u>	<u>5</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>9 = y/d</u>
0	0°	0	0,000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	10°	0,0076	0,17453	0,17365	0,17101	0,00524	0,00516	
2	20°	0,0030	0,34907	0,34202	0,32135	0,04001	0,03760	
3	30°	0,0670	0,52360	0,50000	0,43302	0,12500	0,10825	
4	40°	0,167	0,69813	0,64275	0,49240	0,26559	0,20345	
5	50°	0,1786	0,87266	0,76604	0,49240	0,44953	0,28895	
6	60°	0,250	1,04720	0,86603	0,43302	0,64953	0,32476	
7	70°	0,329	1,22173	0,93969	0,32139	0,82976	0,28380	
8	80°	0,4132	1,39626	0,98481	0,17101	0,95512	0,16586	
9	90°	0,500	1,57030	1,00000	0,00000	1,00000	0,00000	
10	100°	0,5868	1,74533	0,98481	-0,17101	0,95512	-0,16586	
11	110°	0,6710	1,91986	0,93969	-0,32139	0,82976	-0,28380	
12	120°	0,750	2,09440	0,86603	-0,43302	0,64953	-0,32476	
13	130°	0,8214	2,26893	0,76604	-0,49240	0,44953	-0,28895	
14	140°	0,8830	2,44346	0,64279	-0,49240	0,26559	-0,20345	
15	150°	0,9330	2,61799	0,50000	-0,43302	0,12500	-0,10825	
16	160°	0,9699	2,79253	0,34202	-0,32139	0,04001	-0,03760	
17	170°	0,9924	2,96706	0,17365	-0,17100	0,00524	-0,00516	
18	180°	1,000	3,14159	0,00000	0,00000	0,00000	-0,00000	

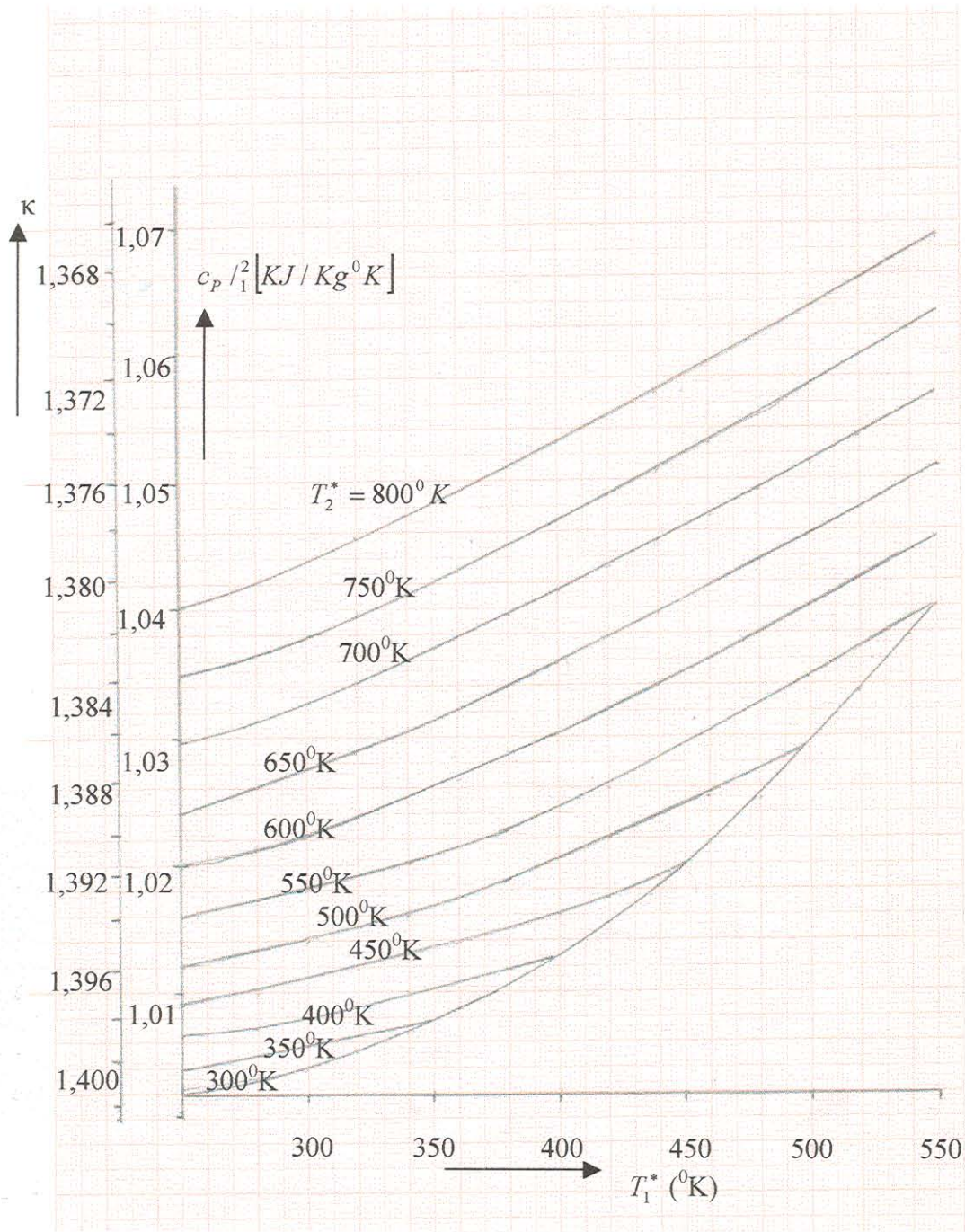
Es bedeutet:

- 1 laufende Zahl  
2 Hilfswinkel  $\varphi$   
3 Längenkoordinate  $\frac{x_d}{l}$  des Profils  
4 Winkel  $\hat{\varphi} = \frac{\varphi^\circ \pi}{180}$   
5  $\sin \varphi$   
6  $\sin \varphi \cos \varphi$   
7  $\sin^3 \varphi$   
8  $\sin^3 \varphi \cos \varphi$

## Zusammenstellung der Anlagen.

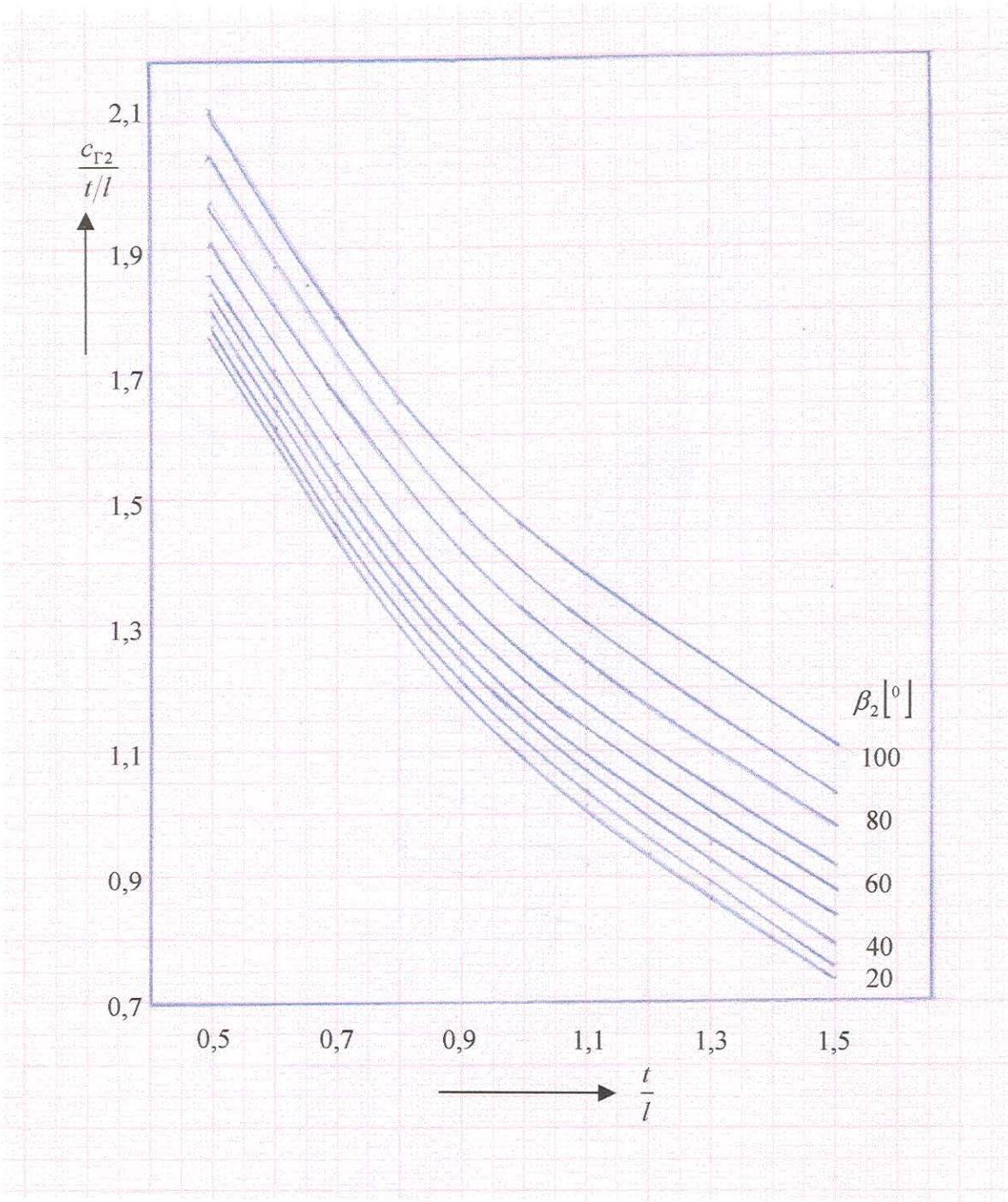
- Anlage 1 Mittlere spez. Wärme  $c_p / \frac{T_2}{T_1}$  für trockene Luft.
- Anlage 2.1 Gitterbelastungszahlen nach Howell /10/.
- Anlage 2.2 Zulässige Umlenkungen nach den Werten von Howell.
- Anlage 3.1 Korrekturfaktoren nach Schröder /33/.
- Anlage 3.2 Korrekturfaktoren nach Schröder /33/.
- Anlage 4 Stufen optimaler Wirkungsgrades
- Anlage 4.1 Optimalwerte der Stufen.
- Anlage 4.2 Umfangsgeschwindigkeiten der Laufgitter.
- Anlage 4.3 Energieumsetzungen in den Laufgittern.
- Anlage 4.4 Machzahl- und Verzögerungsverhältnisse im Laufgitter.
- Anlage 4.5 Volumendurchsatz in den Stufen.
- Anlage 4.6 Zur Bestimmung des Nabenverhältnisses.
- Anlage 4.7 Dichteverhältnis des Gases.
- Anlage 5 Für Grenzleistungsstufen
- Anlage 5.1 Massendurchsatz für Grenzleistungsstufen.(für INA-Normalatmosphäre)
- Anlage 5.2 Zulässige Energieumsetzungen in Grenzleistungsstufen.
- Anlage 5.3 Lieferzahlen am Kontinuitätsradius.
- Anlage 6 Für Gitterprofile.
- Anlage 6.1 Induzierte Geschwindigkeiten  $v_y / (\Delta c_u / 2)$  aus der Wirbelverteilung am Profil.
- Anlage 6.2 Induzierte Geschwindigkeiten  $u_y / (\Delta c_u / 2)$  aus der Wirbelverteilung am Profil.
- Anlage 6.3 Induzierte Geschwindigkeiten  $v_{qv}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Vorderseite des Profils Q 30:
- Anlage 6.4 Induzierte Geschwindigkeiten  $v_{qH}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Hinterseite des Profils Q 30.
- Anlage 6.5 Induzierte Geschwindigkeiten  $u_{qv}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Vorderseite des Profils Q 30.
- Anlage 6.6 Induzierte Geschwindigkeiten  $u_{qH}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Hinterseite des Profils Q 30.
- Anlage 6.7 Induzierte Geschwindigkeiten  $v_{qv}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Vorderseite des Profils Q 40.
- Anlage 6.8 Induzierte Geschwindigkeiten  $v_{qH}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Hinterseite des Profils Q 40.
- Anlage 6.9 Induzierte Geschwindigkeiten  $u_{qv}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Vorderseite des Profils Q 40.
- Anlage 6.10 Induzierte Geschwindigkeiten  $u_{qH}$  aus der Quell-Senkenbelegung an der Hinterseite des Profils Q 40.
- Anlage 6.11 Induzierte Geschwindigkeiten  $v_{qv}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Vorderseite des Profils Q 50.

- Anlage 6.12 Induzierte Geschwindigkeiten  $v_{qH}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Hinterseite des Profils Q 50.
- Anlage 6.13 Induzierte Geschwindigkeiten  $u_{qV}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Vorderseite des Profils Q 50.
- Anlage 6.14 Induzierte Geschwindigkeiten  $u_{qH}$  aus der Quell-Senkenverteilung an der Hinterseite des Profils Q 50.
- Anlage 6.15 Maximale relative Profildicke  $d/l$  in Abhängigkeit von der kritischen Anströmmachzahl  $M_{\infty kr}$  mit der Skelettlinienwölbung  $x_f/l = 0,5$  und Der Dickenrücklage  $x_d/l = 0,5$  als Parameter bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung der Profile. (Die angegebenen Werte können auch als Richtwerte für andere Dickenrücklagen der Profile angesehen werden).

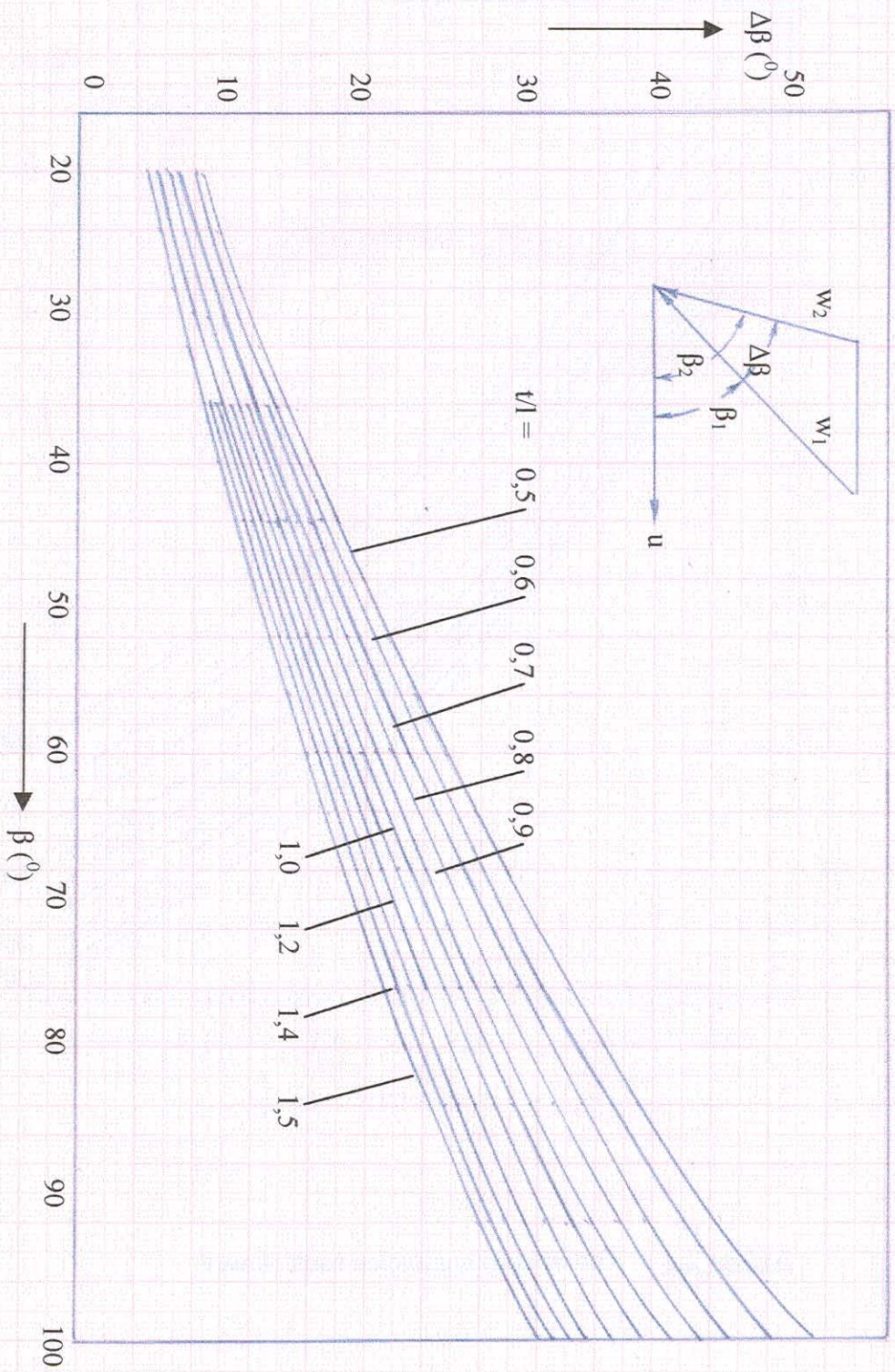


**Anlage: 1** Mittlere spez. Wärme  $c_p / i^2$  für trockene Luft.

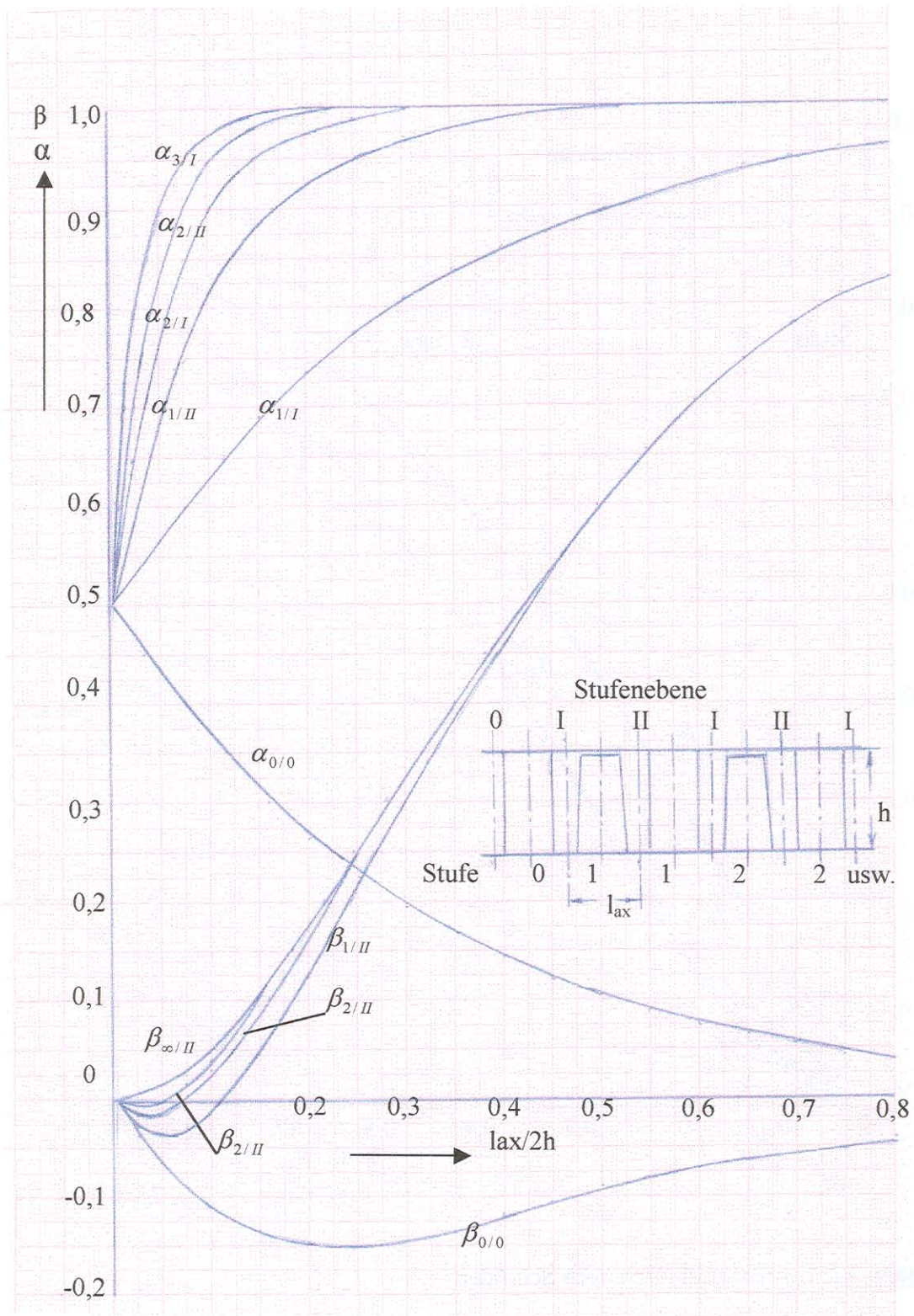




**Anlage 2.1** Gitterbelastungszahlen nach Howell.

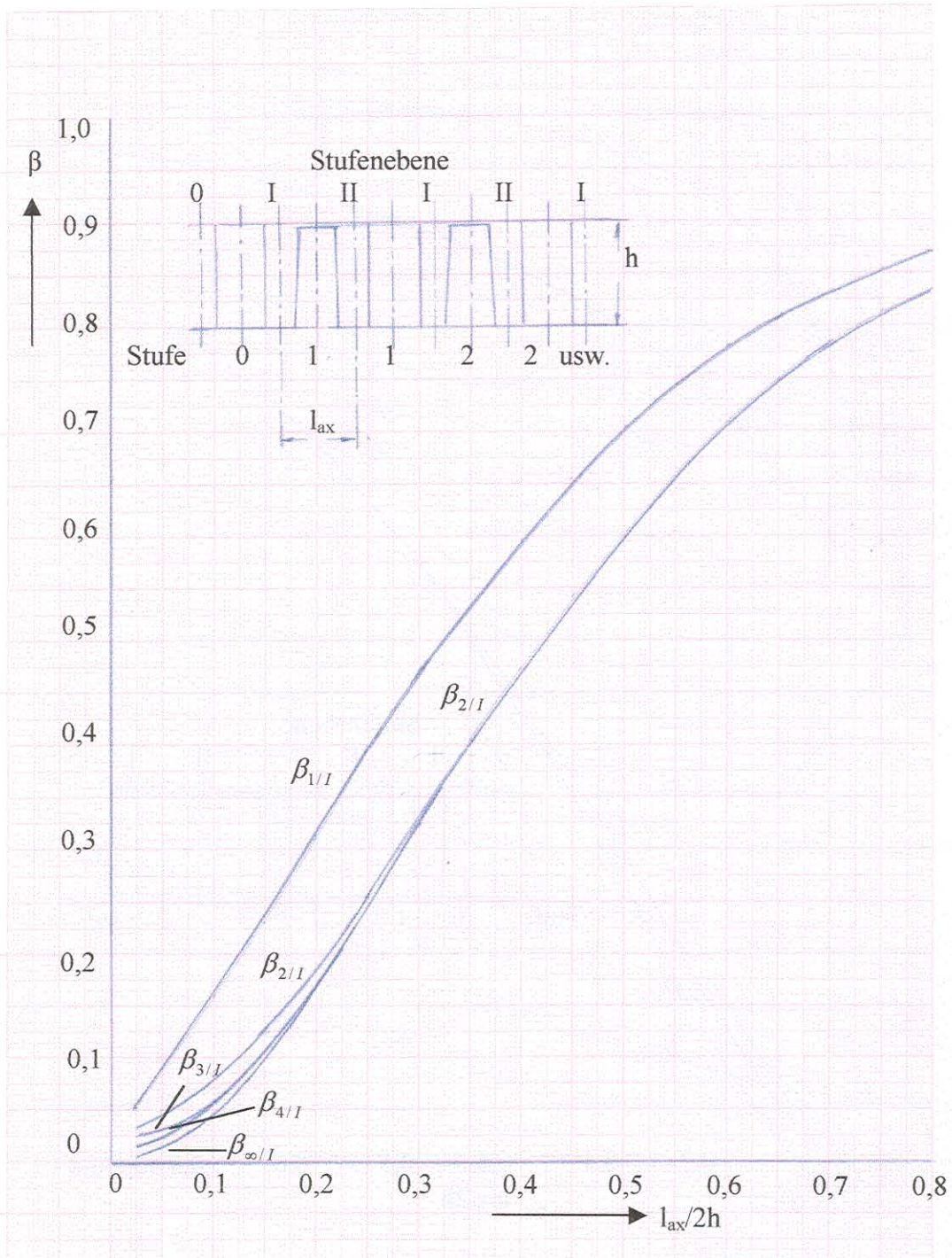


**Anlage 2.2** Zulässige Umlenkungen nach Werten von Howell /10/.

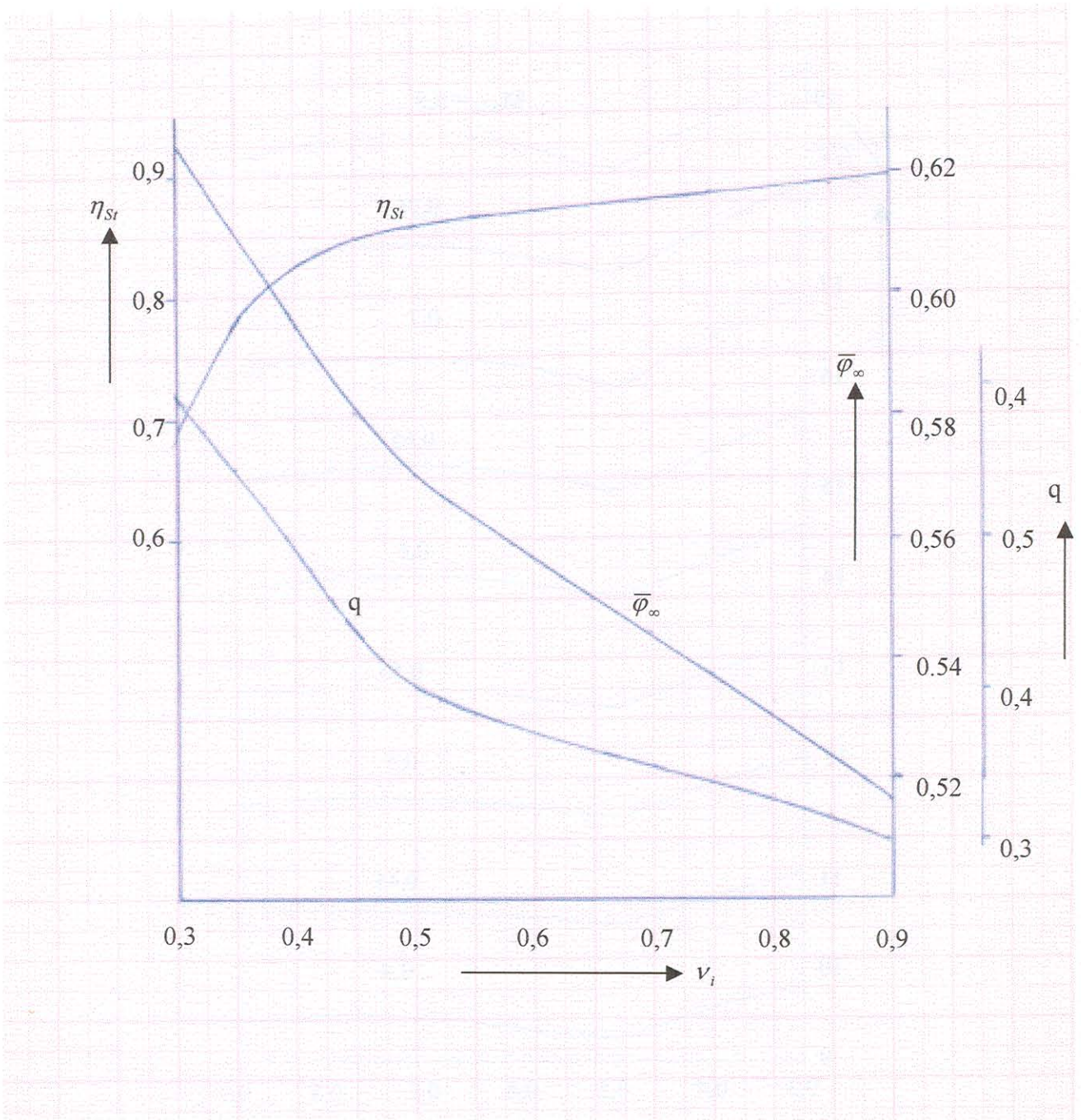


**Anlage 3.1** Korrekturfaktoren nach Schröder.

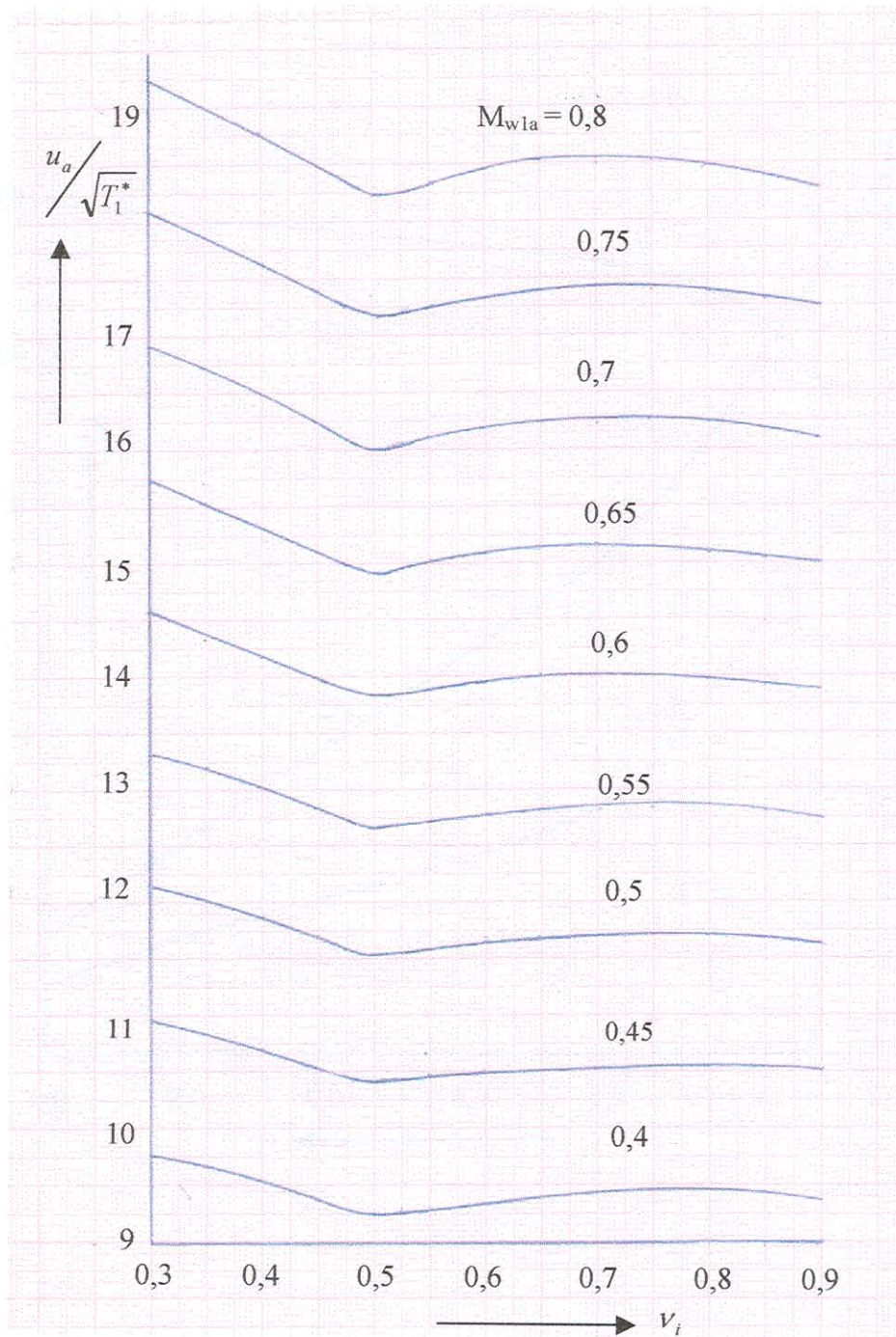




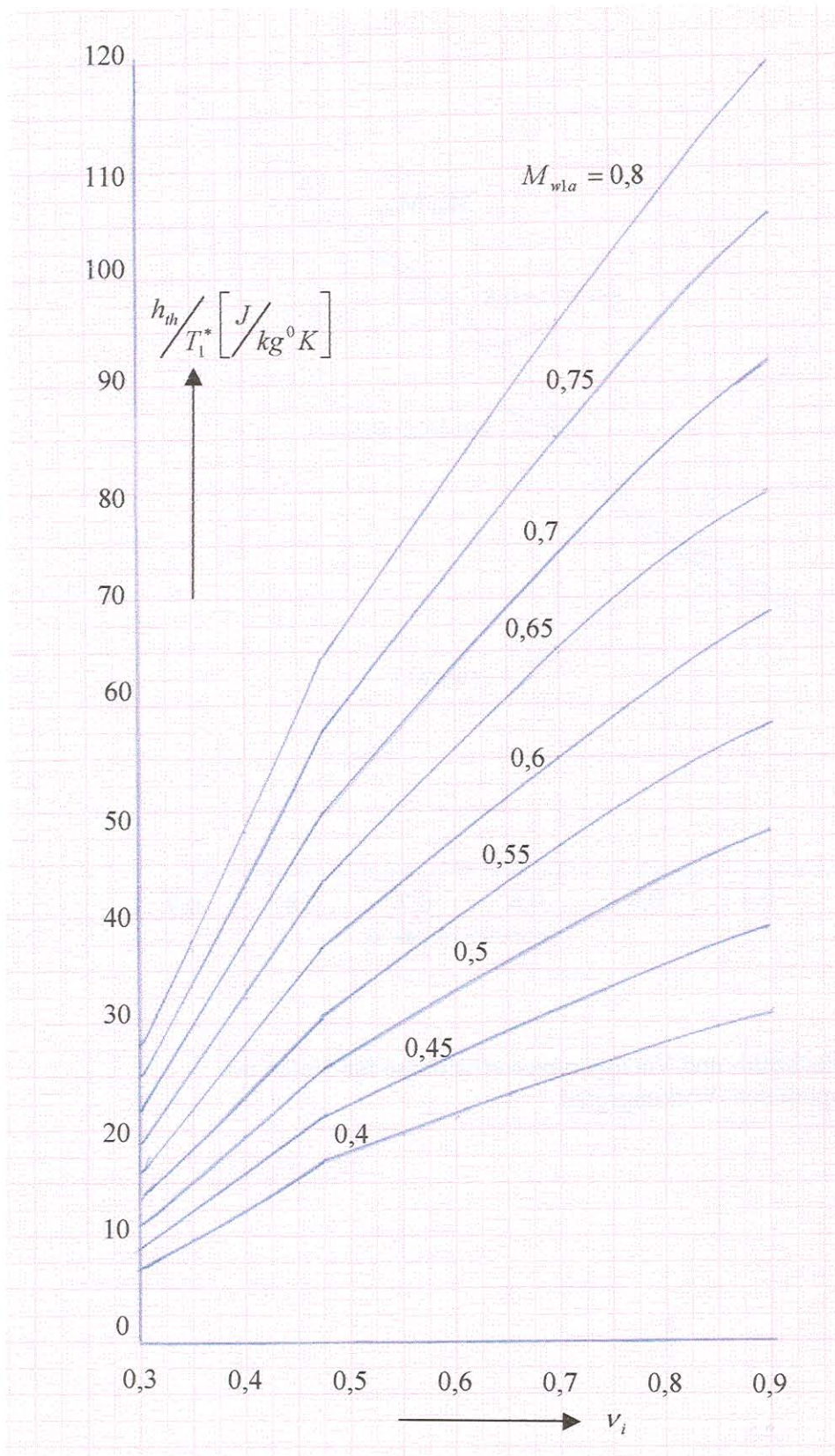
**Anlage 3.2** Korrekturfaktoren nach Schröder.



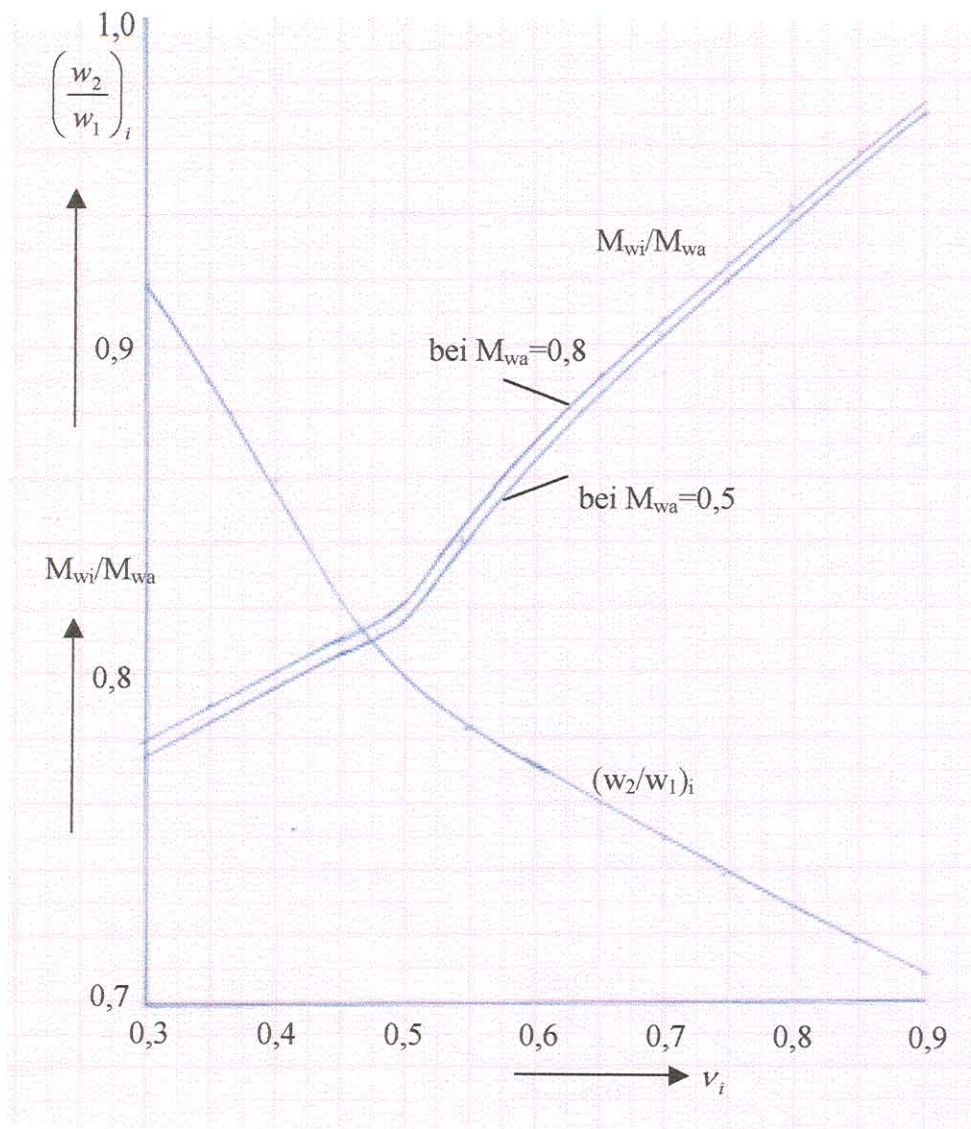
**Anlage 4.1** Kinematische Werte für Stufen mit optimalen Wirkungsgrad.



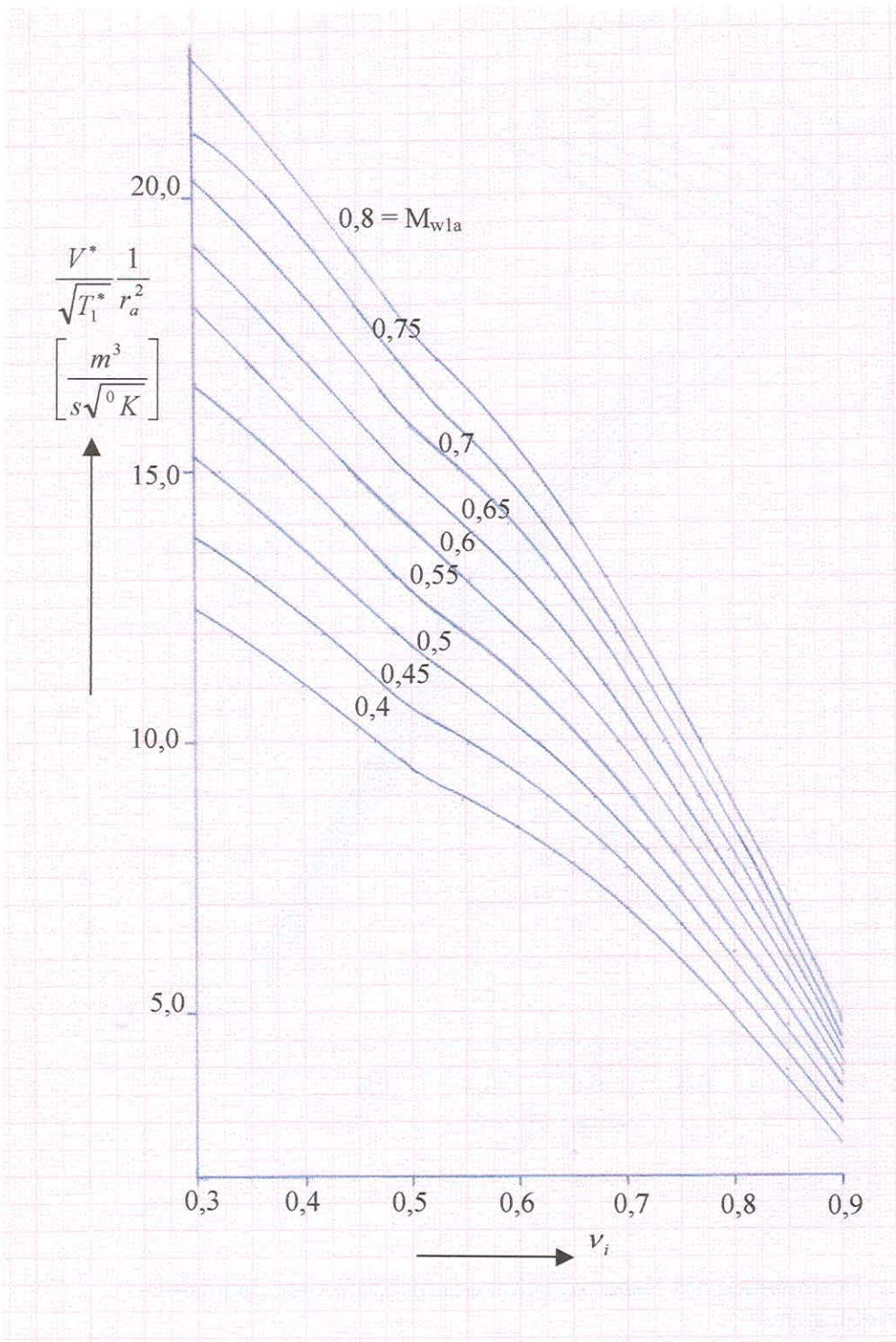
**Anlage 4.2** Umfangsgeschwindigkeiten der Laufgitter für Stufen mit optimalen Wirkungsgrad.



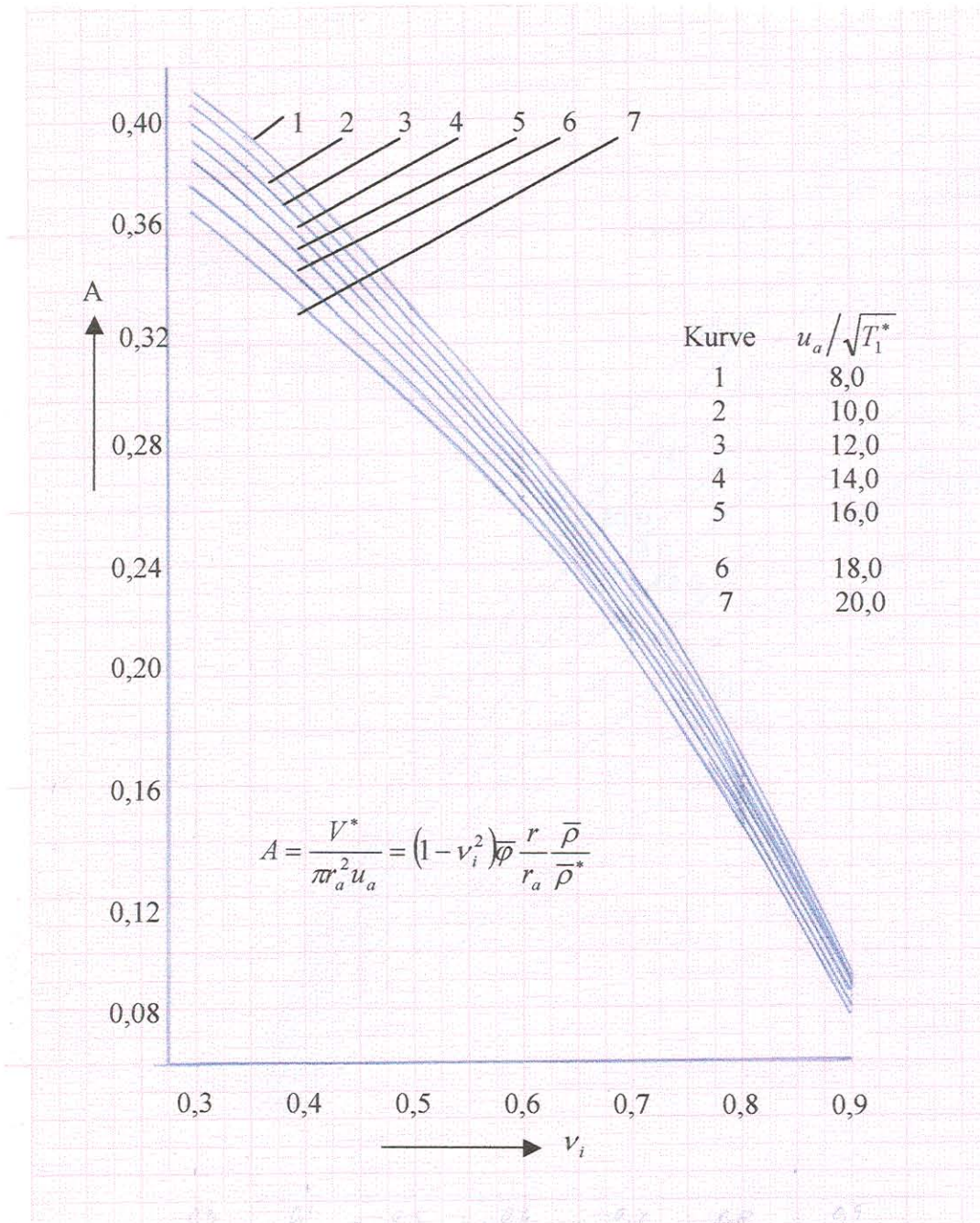
**Anlage 4.3** Energieumsetzungen in den Laufgittern für Stufen mit optimalen Wirkungsgrad.



**Anlage 4.4** Machzahl- und Verzögerungsverhältnisse für Stufen mit optimalen Wirkungsgrad.

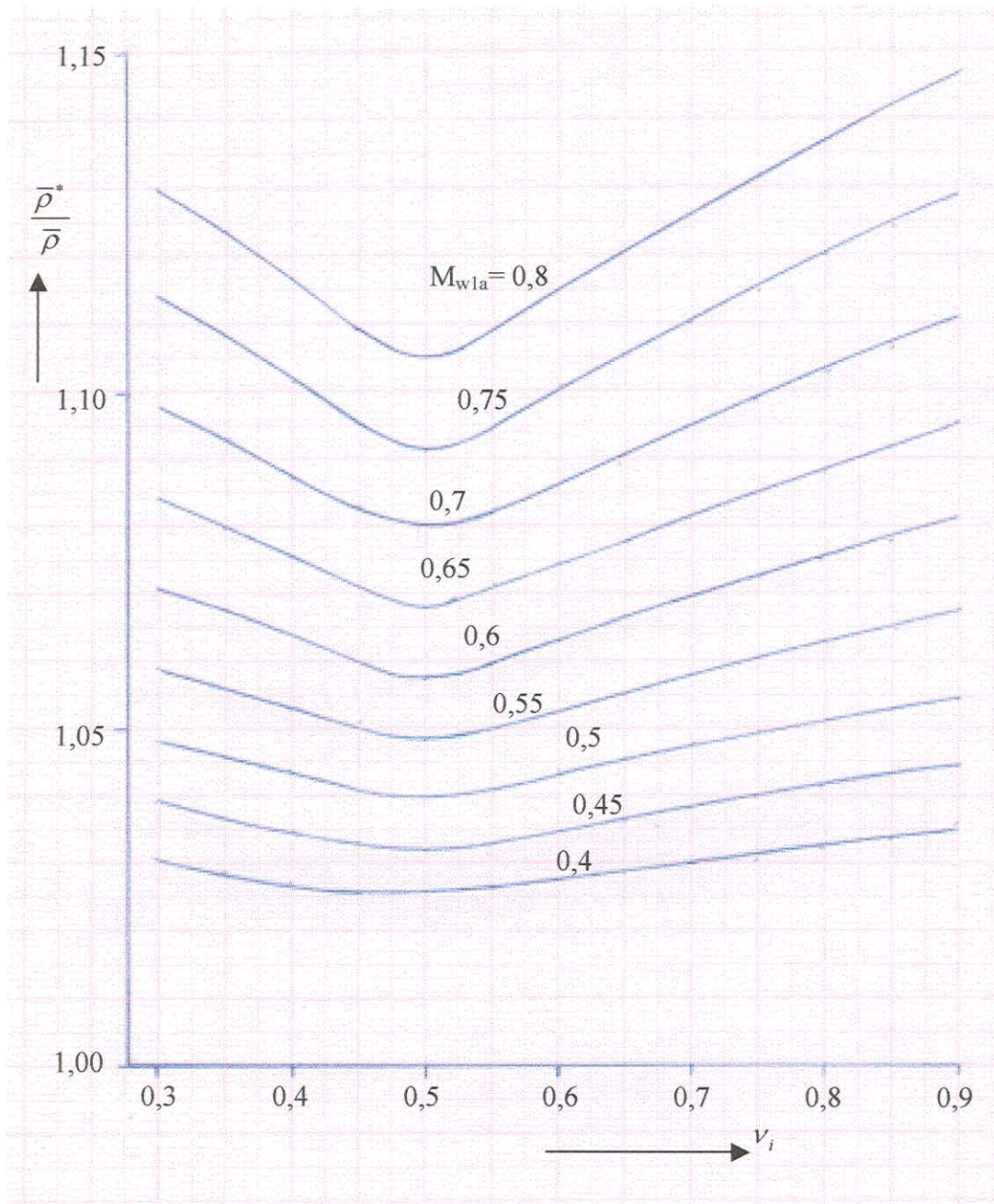


**Anlage 4.5** Volumendurchsatz in den Stufen mit optimalen Wirkungsgrad.



**Anlage 4.6**

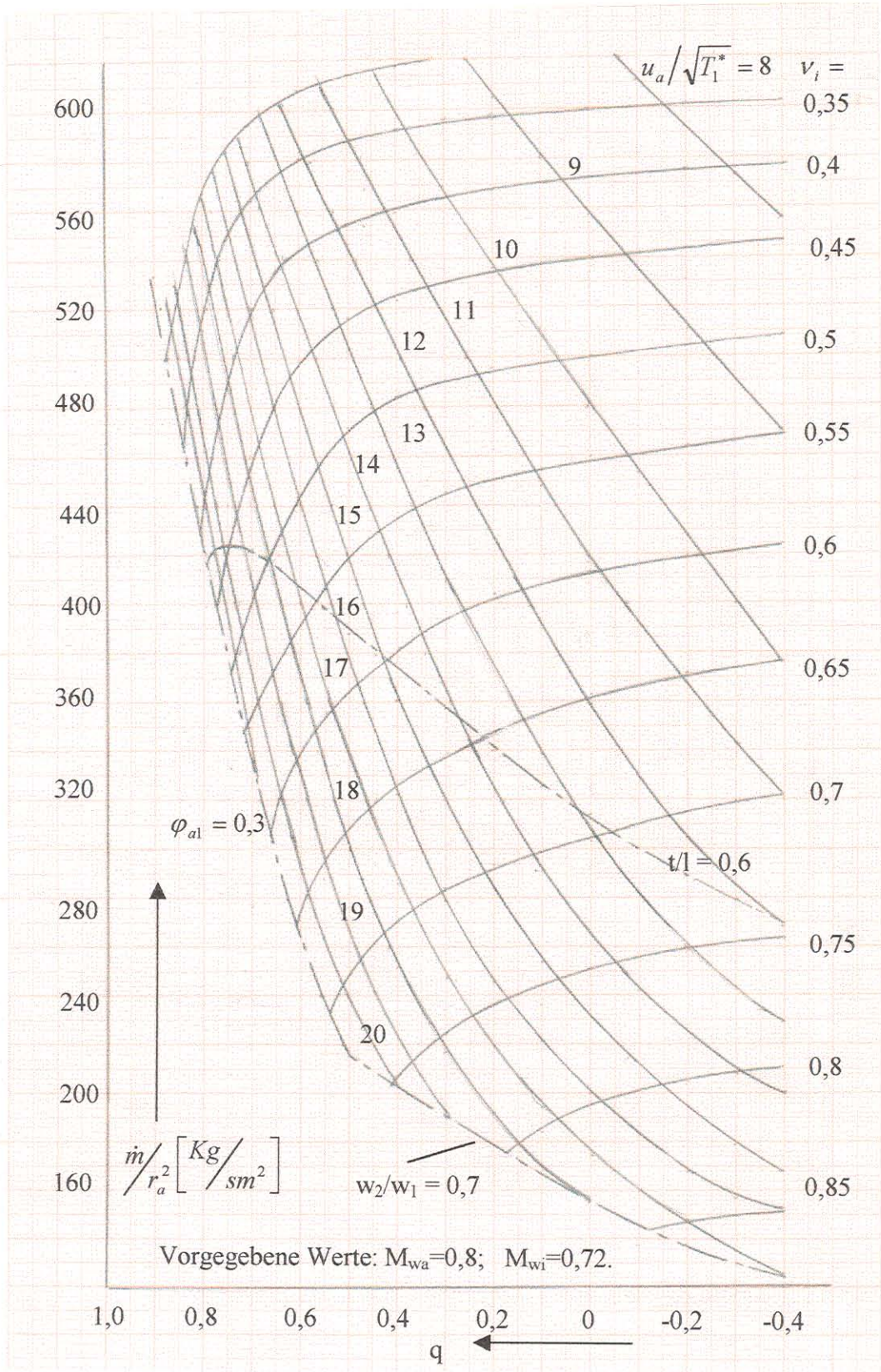
Zur Bestimmung des Nabenverhältnisses für Stufen mit optimalen Wirkungsgrad.



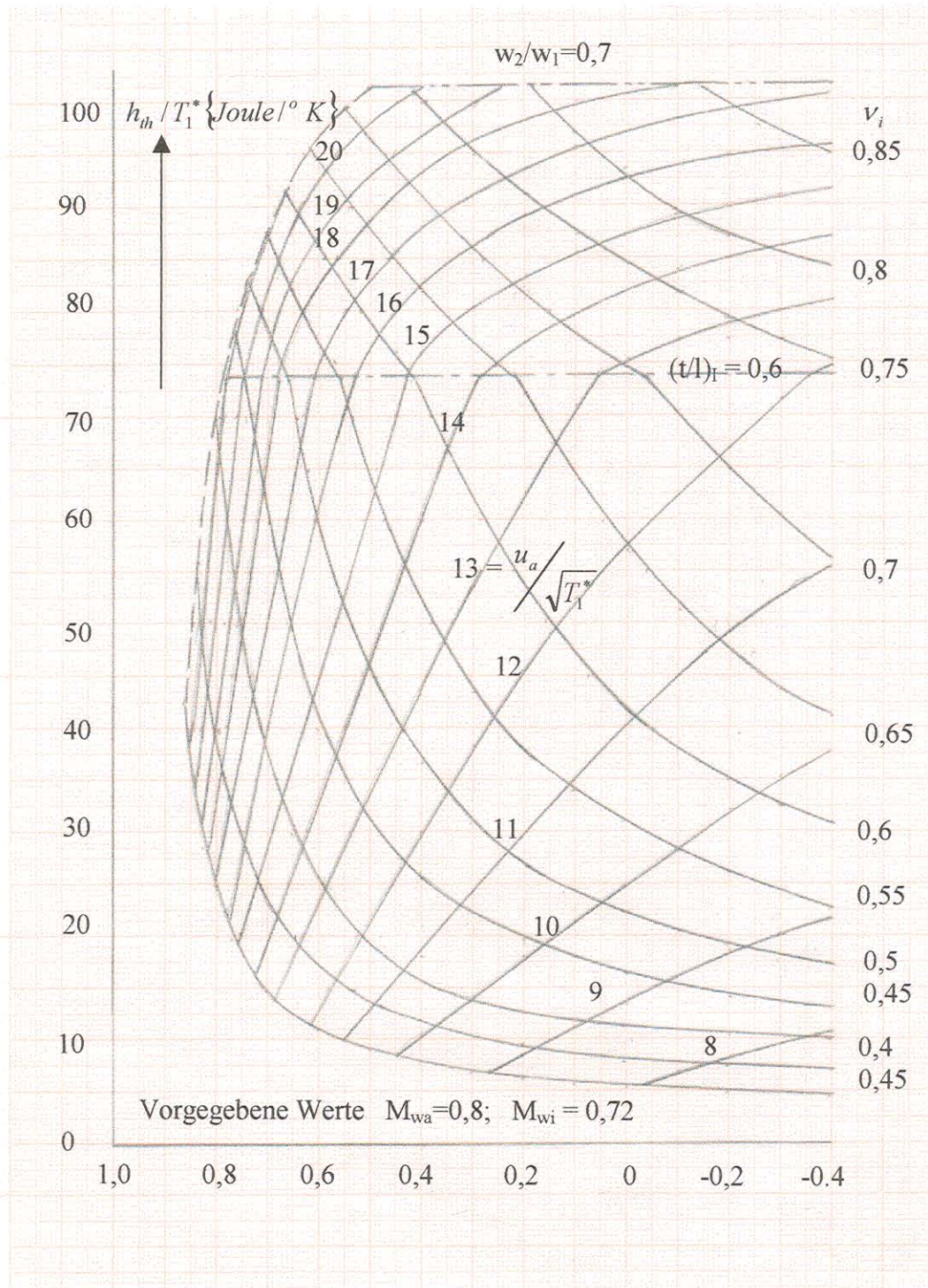
**Anlage 4.7** Dichteverhältnis des Gases für Stufen mit optimalen Wirkungsgrad.



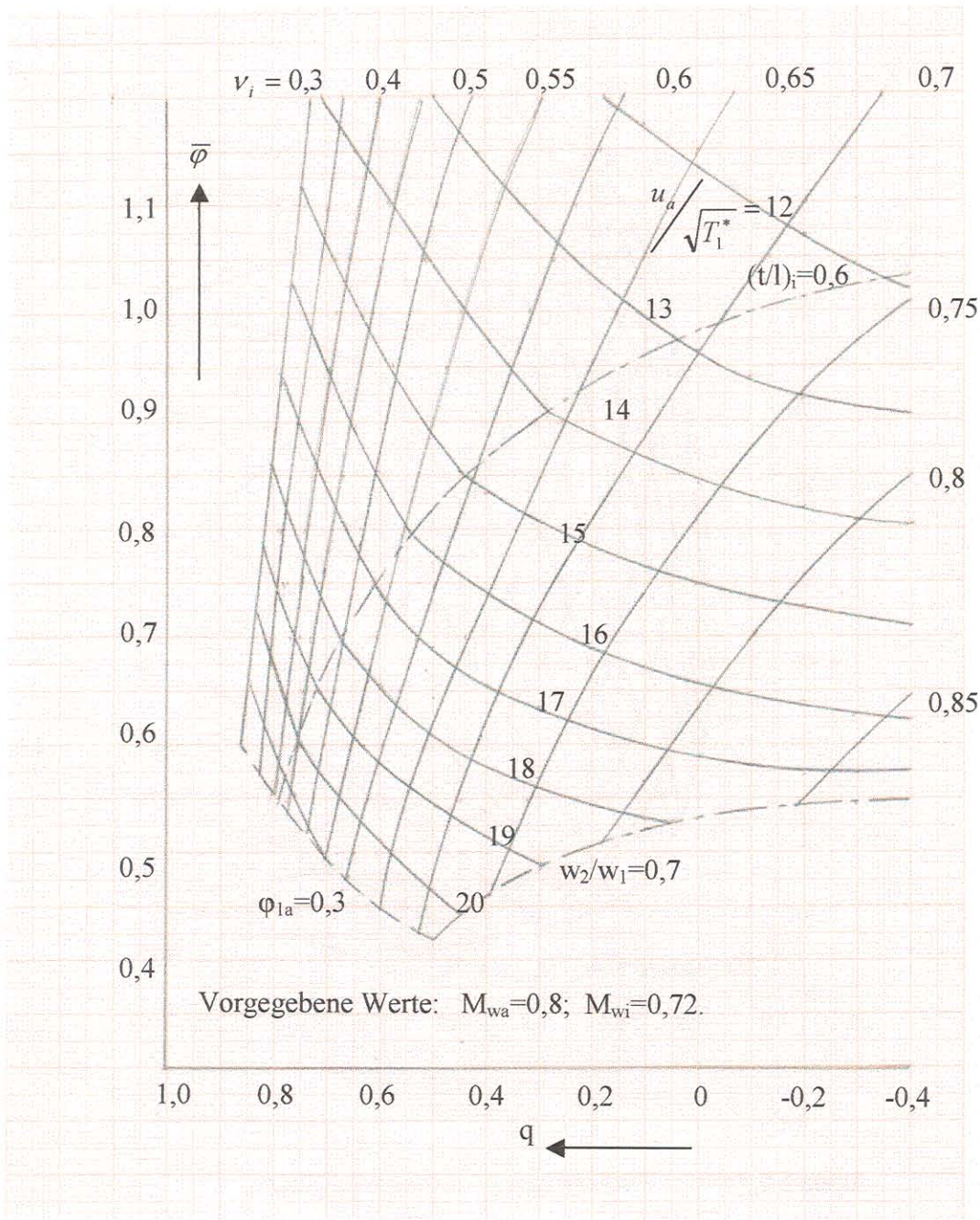




**Anlage 5.1** Massendurchsatz für Grenzleistungsstufen ( für INA-Normalatmosphäre).

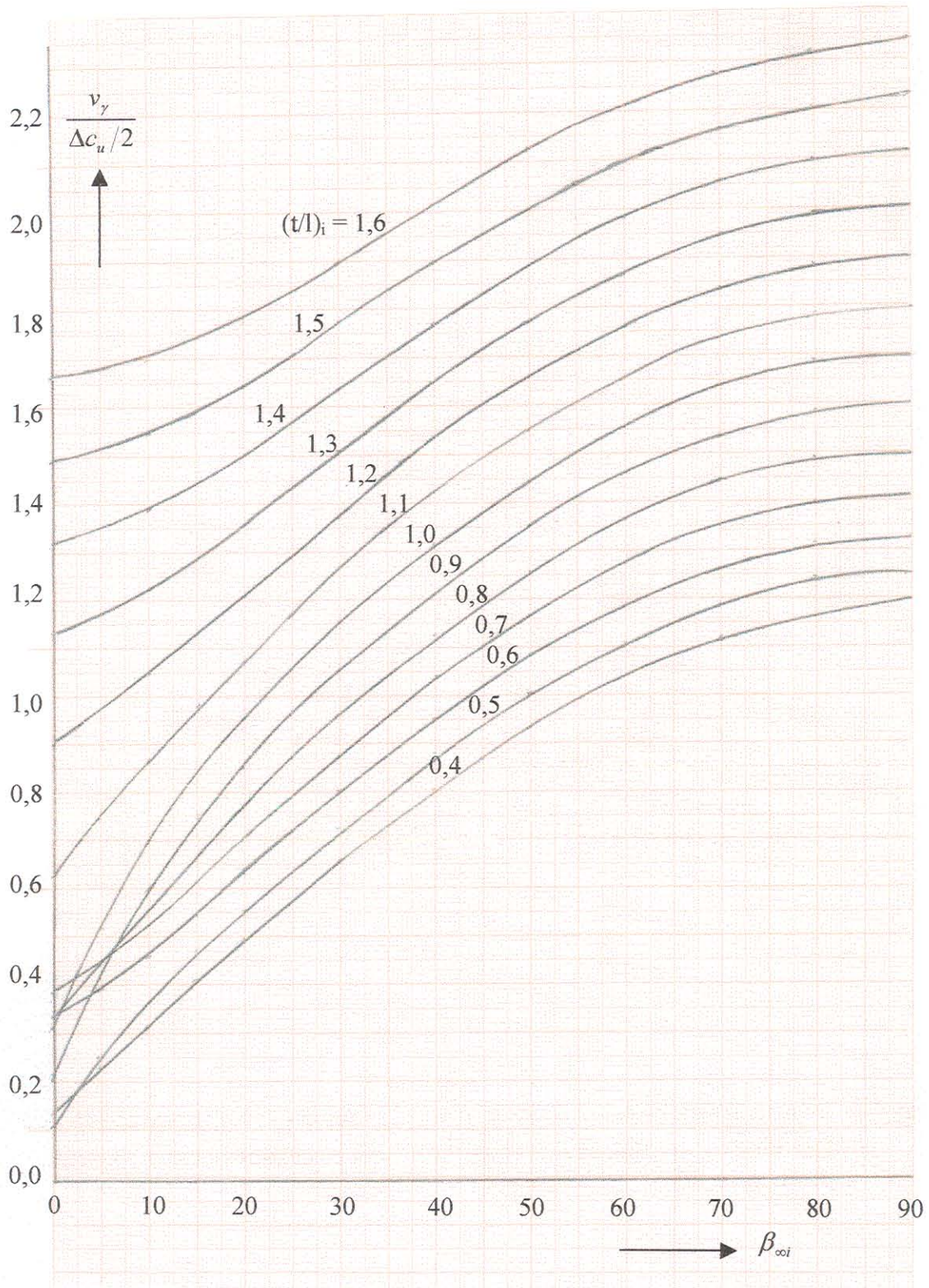


**Anlage 5.2** Zulässige Energieumsetzungen in Grenzleistungsstufen.

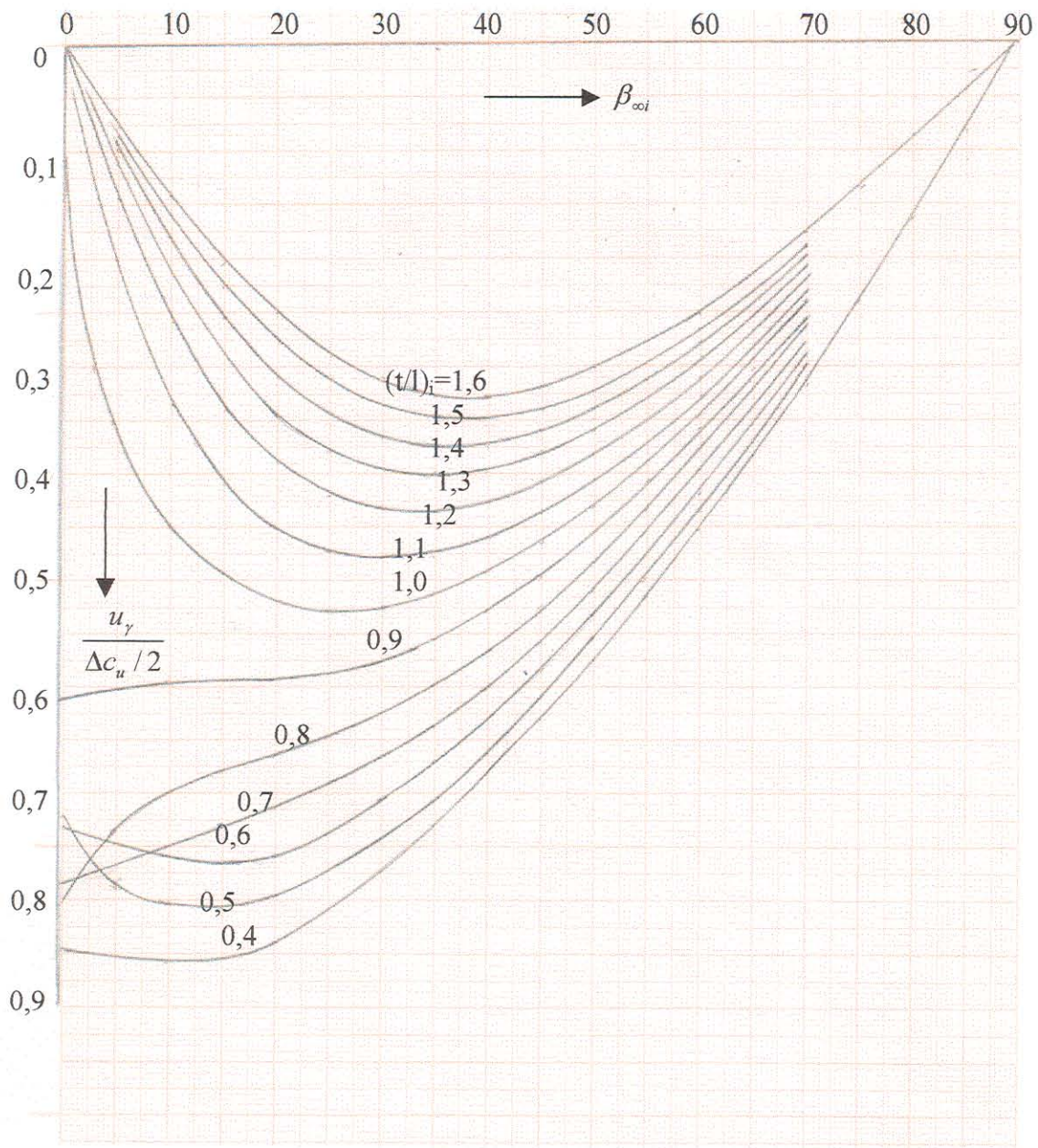


**Anlage 5.3** Lieferzahlen am Kontinuitätsradius in Grenzleistungsstufen.

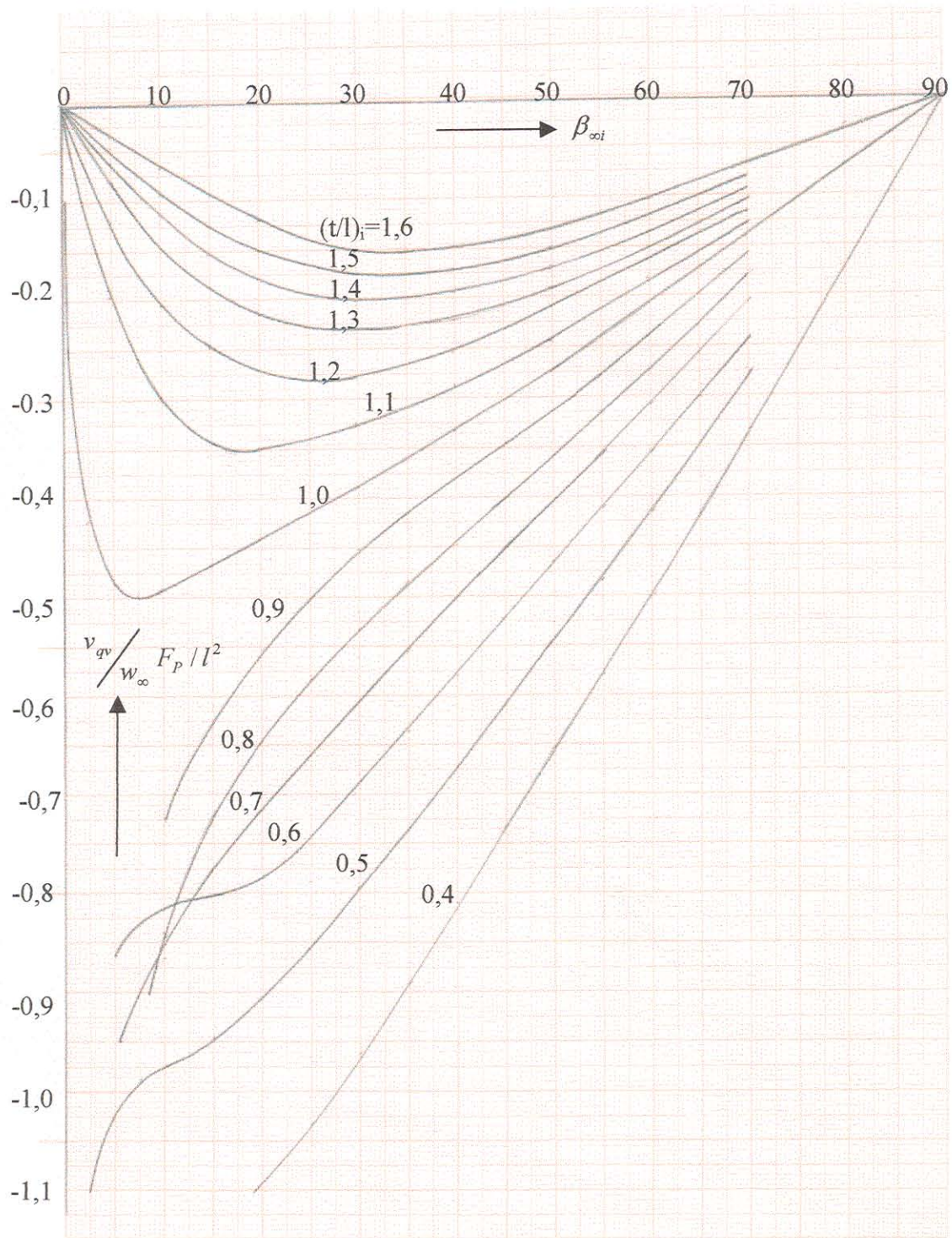




**Anlage 6.1** Induzierte Geschwindigkeiten  $v_\gamma / (\Delta c_u / 2)$  aus der Zirkulationsverteilung an der Vorder- und Hinterkante eines Profils mit einer parabolischen Skelettlinie P 50 ( $x_f/l = 0,5$ ).

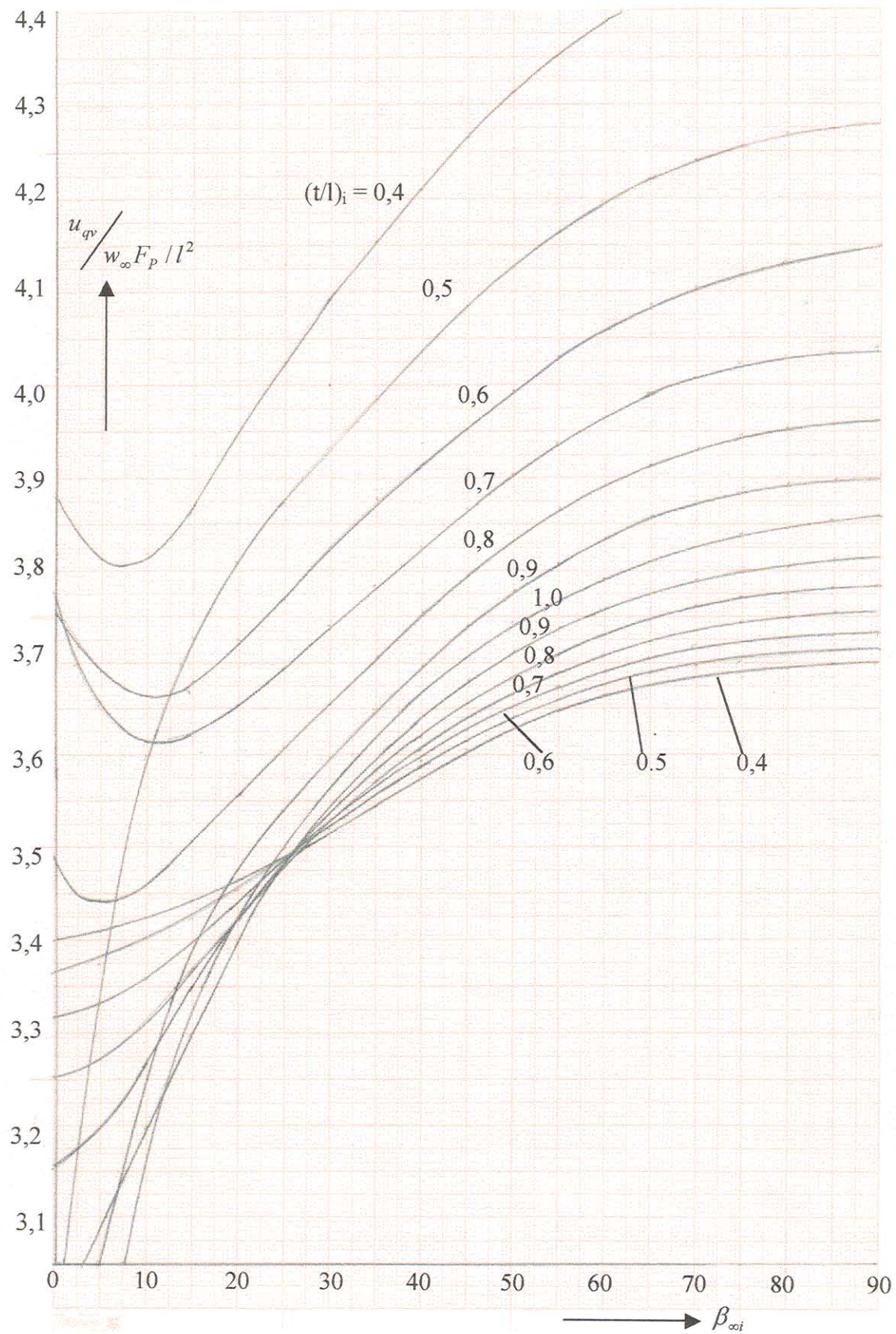


**Anlage 6.2** Induzierte Geschwindigkeiten  $u_y / (\Delta c_u / 2)$  aus der Zirkulationsverteilung an Der Vorder- und Hinterkante eines Profils mit einer parabolischen Skelettlinie P 50 ( $x_f/l = 0,5$ ).

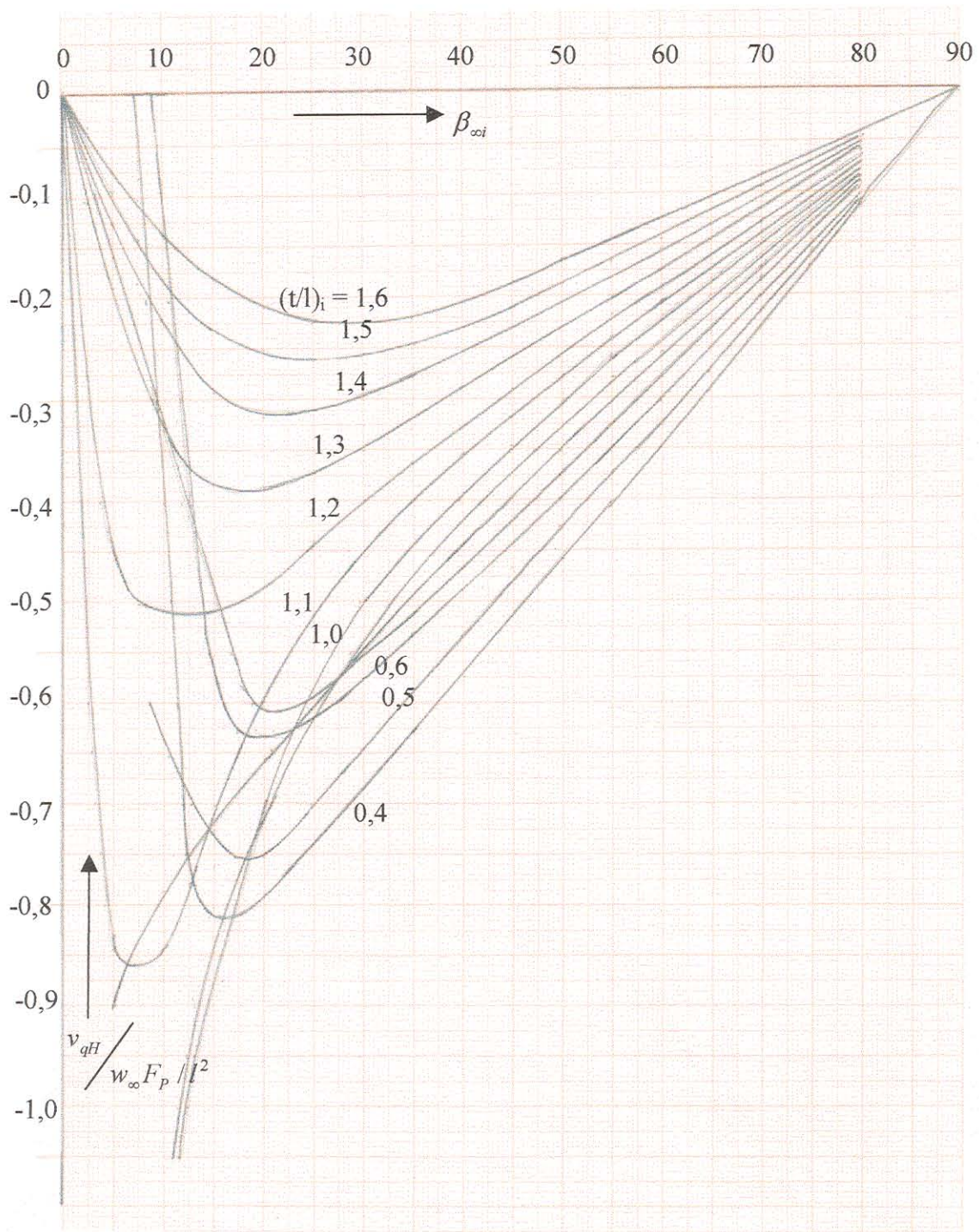


**Anlage 6.3** Induzierte Geschwindigkeiten durch die Quell-Senkenverteilung  $v_{qv} / w_\infty F_P / l^2$  an der Vorderkante des Profils Q 30.

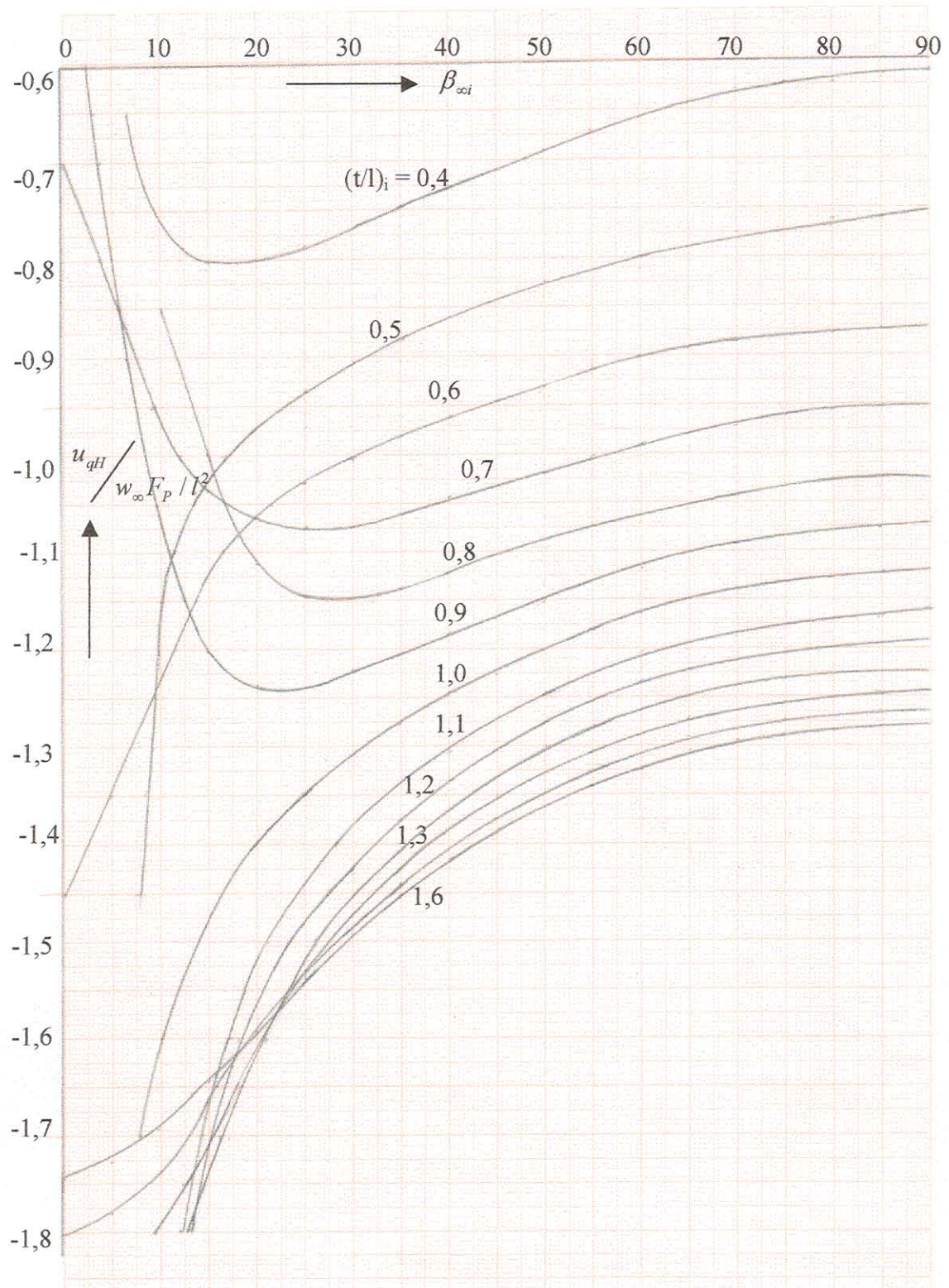




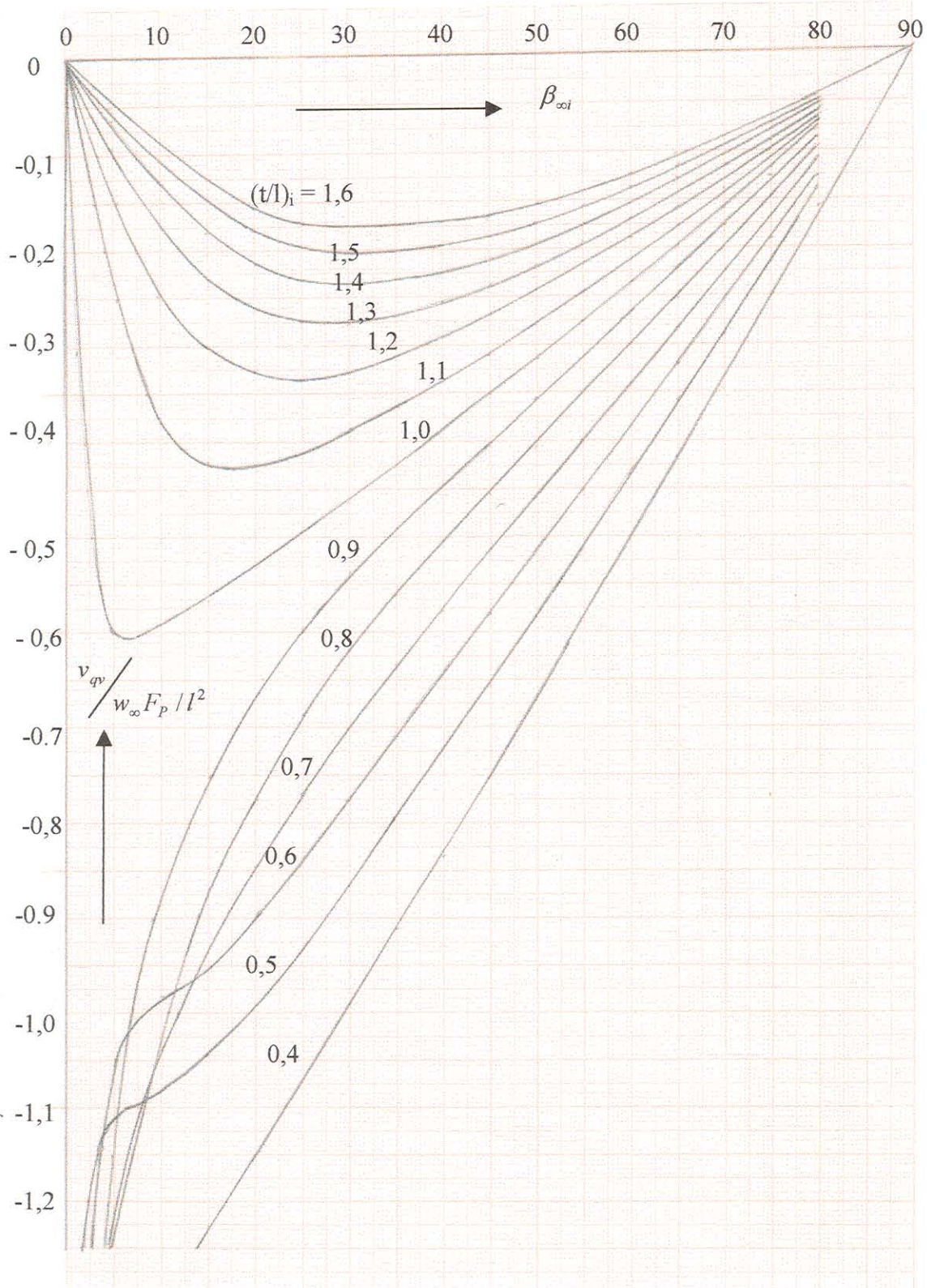
**Anlage 6.4** Induzierte Geschwindigkeiten durch die Quell- Senkenverteilung  $u_{qv} / (w_{\infty} F_p / l^2)$  an der Vorderkante des Profils Q 30.



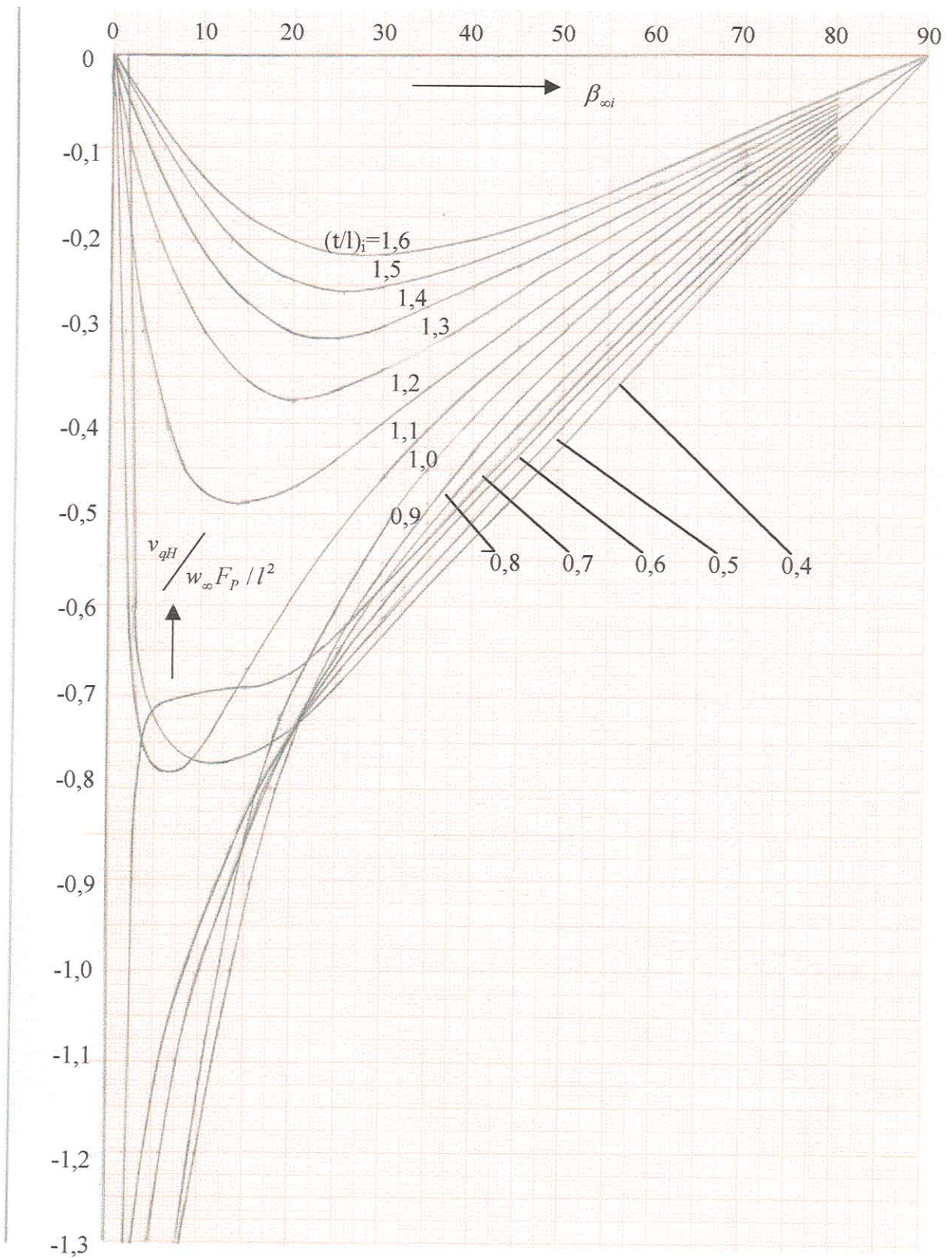
**Anlage 6.5** Induzierte Geschwindigkeiten durch die Quell- Senkenverteilung  $v_{qH} / w_{\infty} F_p / l^2$  an der Hinterkante des Profils Q 30.



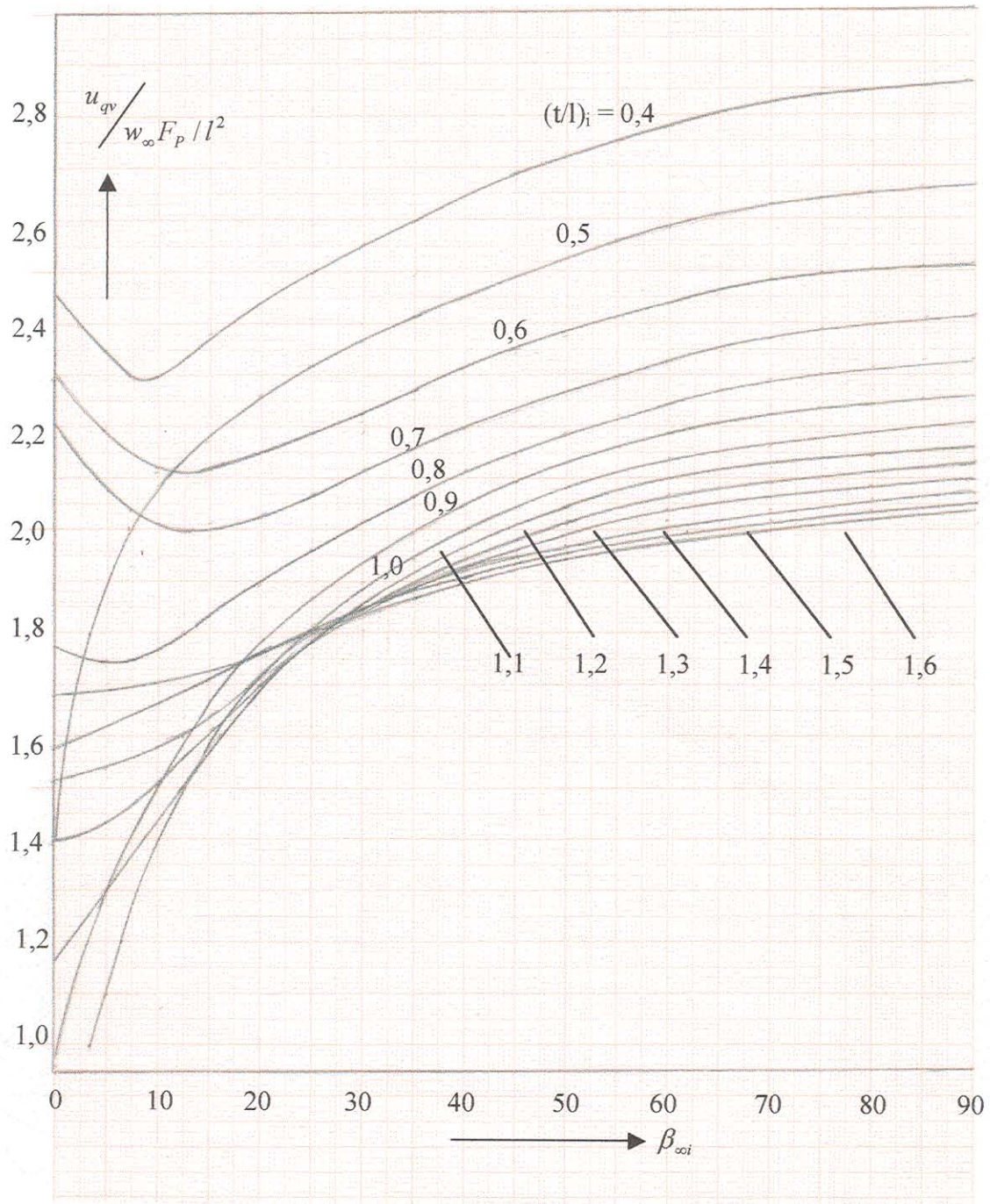
**Anlage 6.6** Induzierte Geschwindigkeiten durch die Quell-Senkenverteilung  $u_{qH} / (w_{\infty} F_P / l^2)$  an der Hinterkante des Profils Q 30.



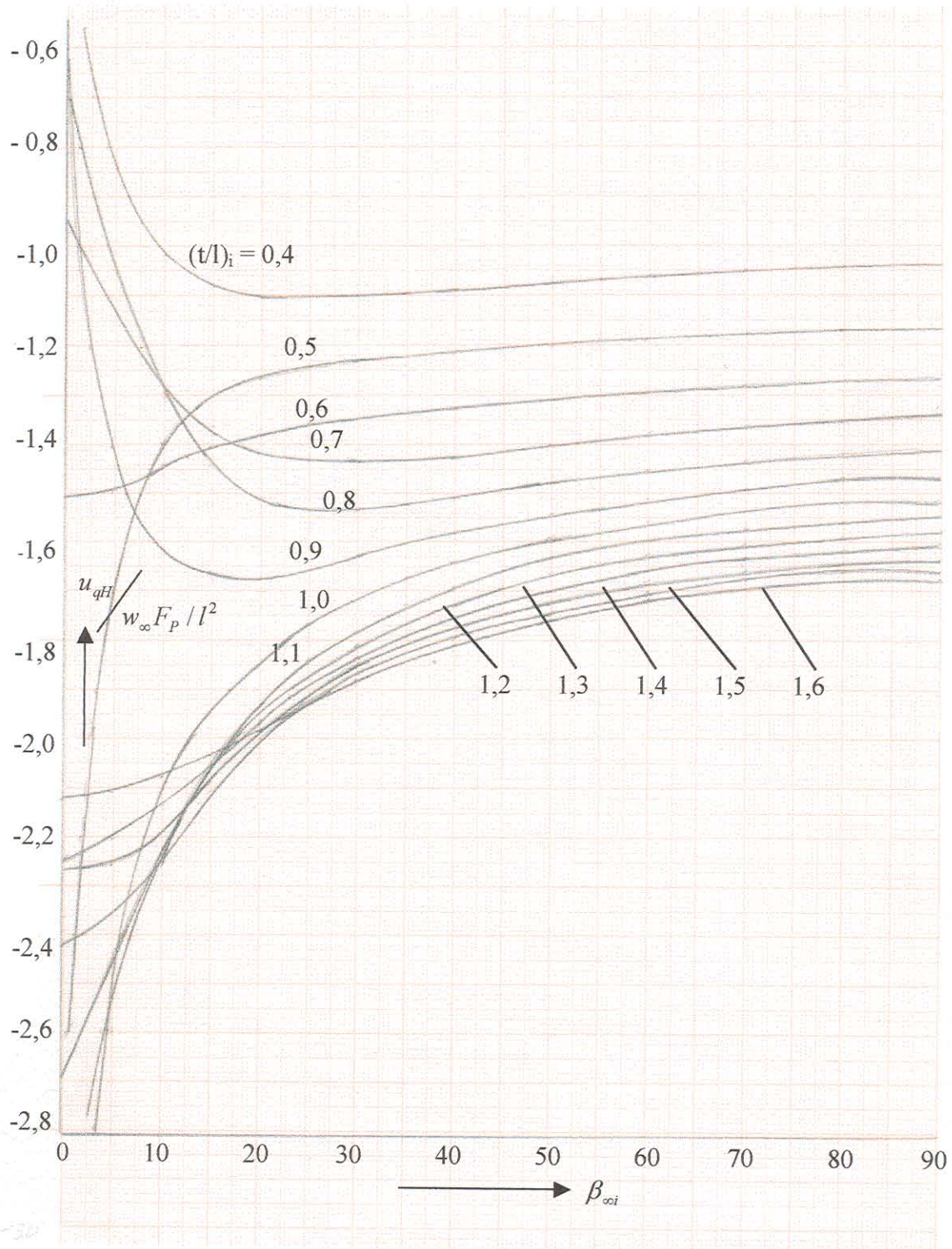
**Anlage 6.7** Induzierte Geschwindigkeiten durch die Quell-Senkenverteilung  $v_{qv} / (w_{\infty} F_p / l^2)$  an der Vorderkante des Profils Q 40.



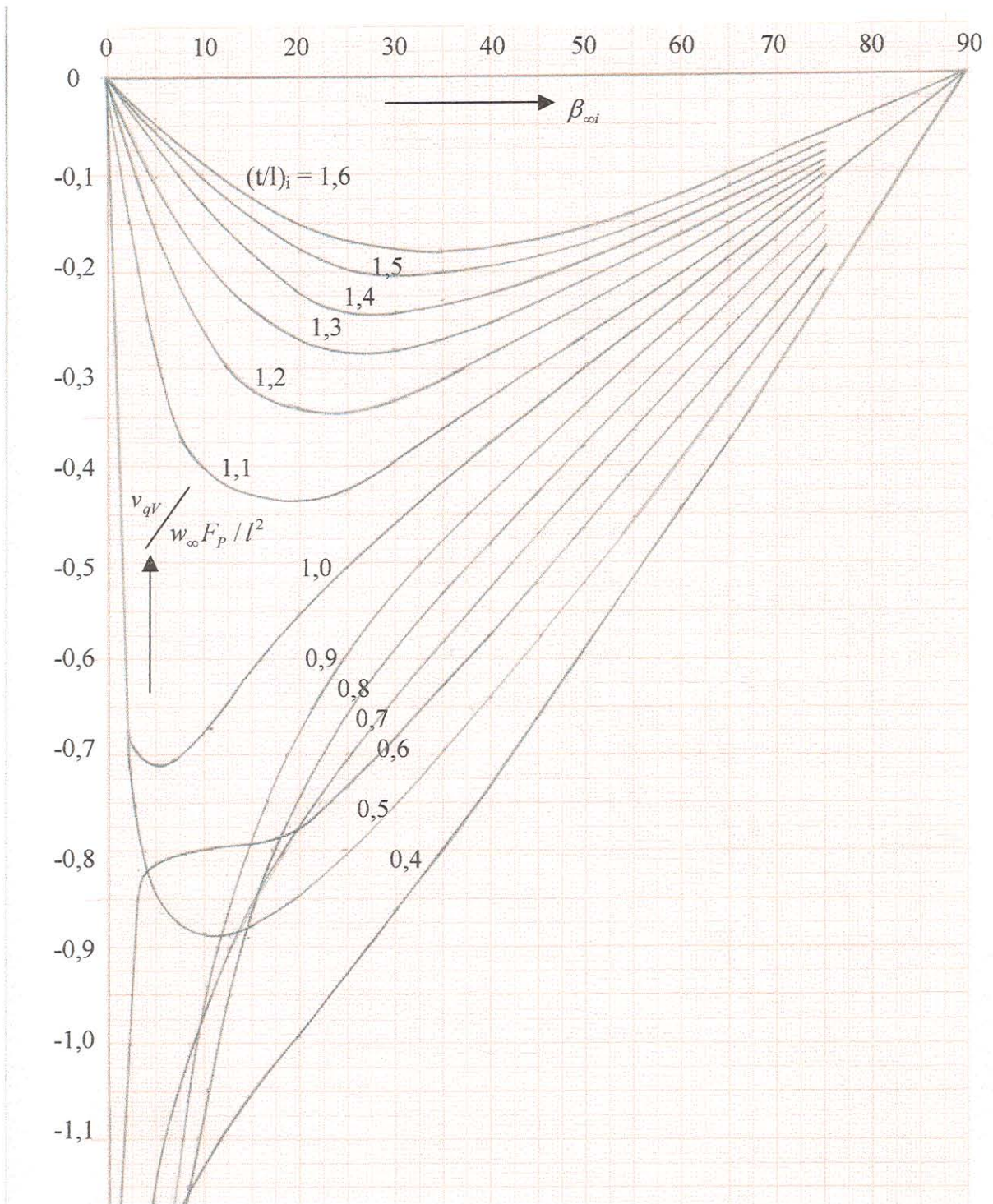
**Anlage 6.8** Induzierte Geschwindigkeiten durch die Quell-Senkenverteilung  $v_{qH} / (w_{\infty} F_p / l^2)$  an der Hinterkante des Profils Q 40.



**Anlage 6.9** Induzierte Geschwindigkeiten durch die Quell-Senkenverteilung  $u_{qv} / (w_{\infty} F_p / l^2)$  an der Vorderkante des Profils Q 40.

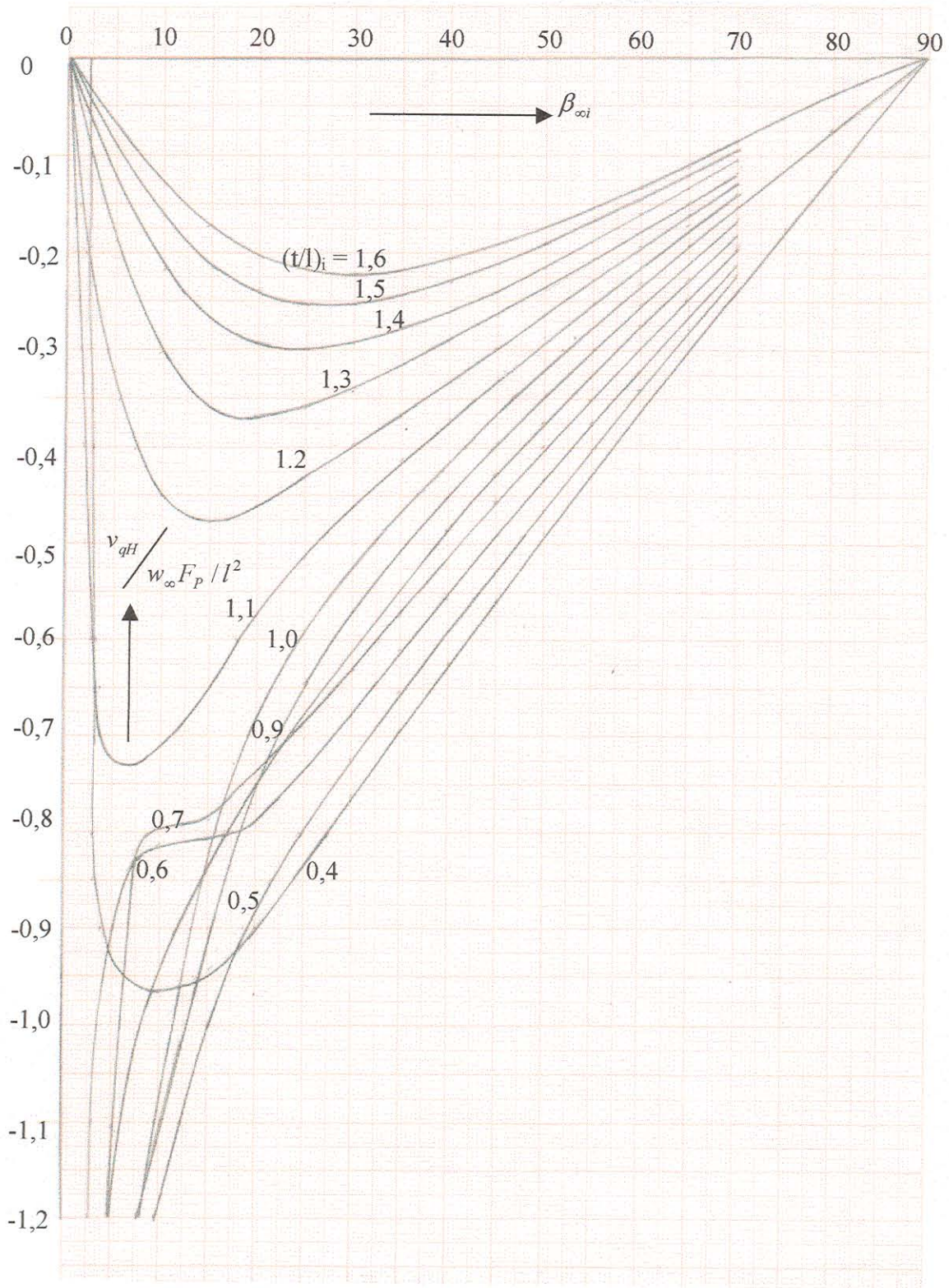


**Anlage 6.10** Induzierte Geschwindigkeiten durch die Quell-Senkenverteilung  $u_{qH} / (w_{\infty} F_P / l^2)$  an der Hinterkante des Profils Q 40.

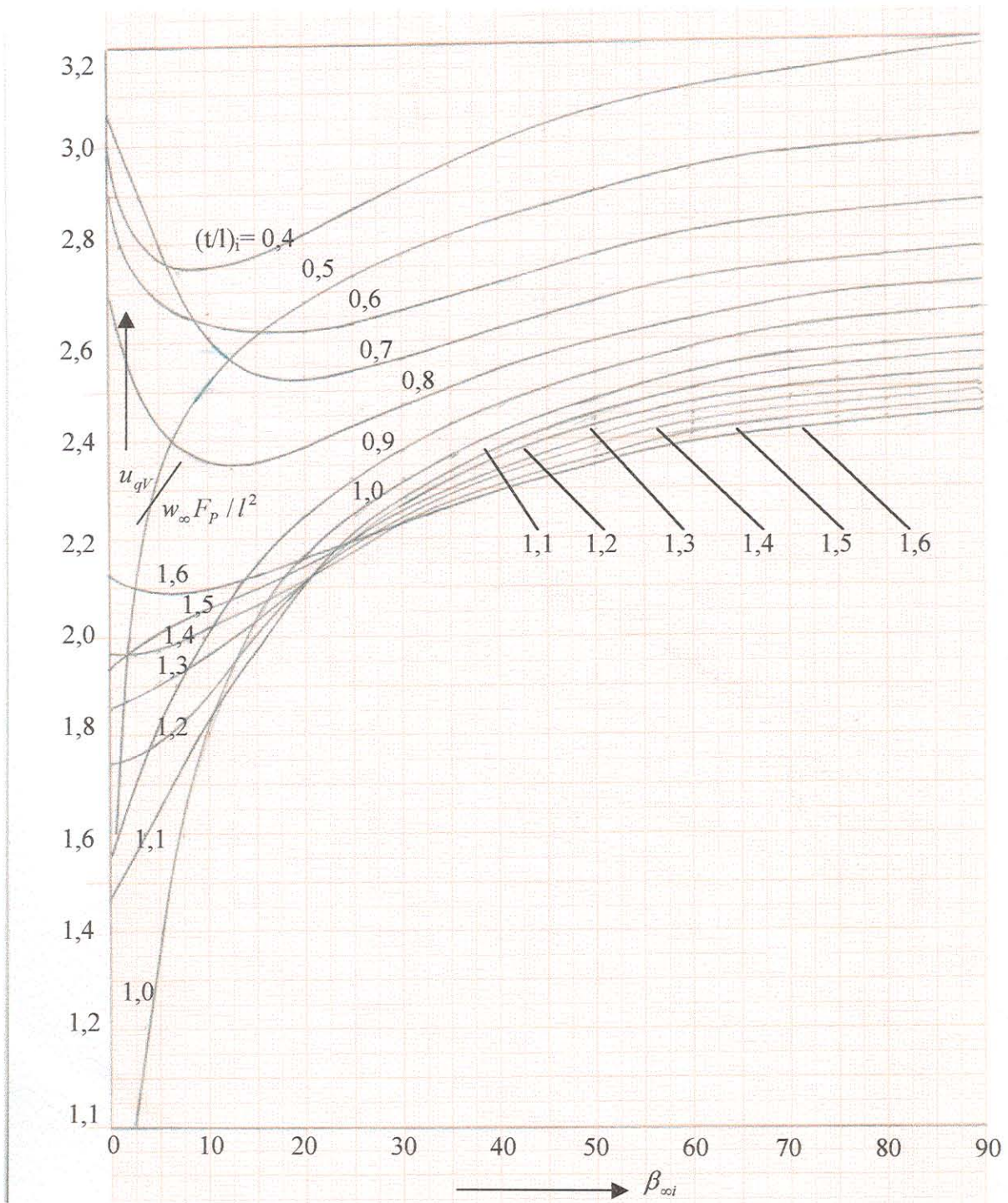


**Anlage 6.11** Induzierte Geschwindigkeiten durch die Quell-Senkenverteilung  $v_{qv} / w_{\infty} F_p / l^2$  an der Vorderkante des Profils Q 50.

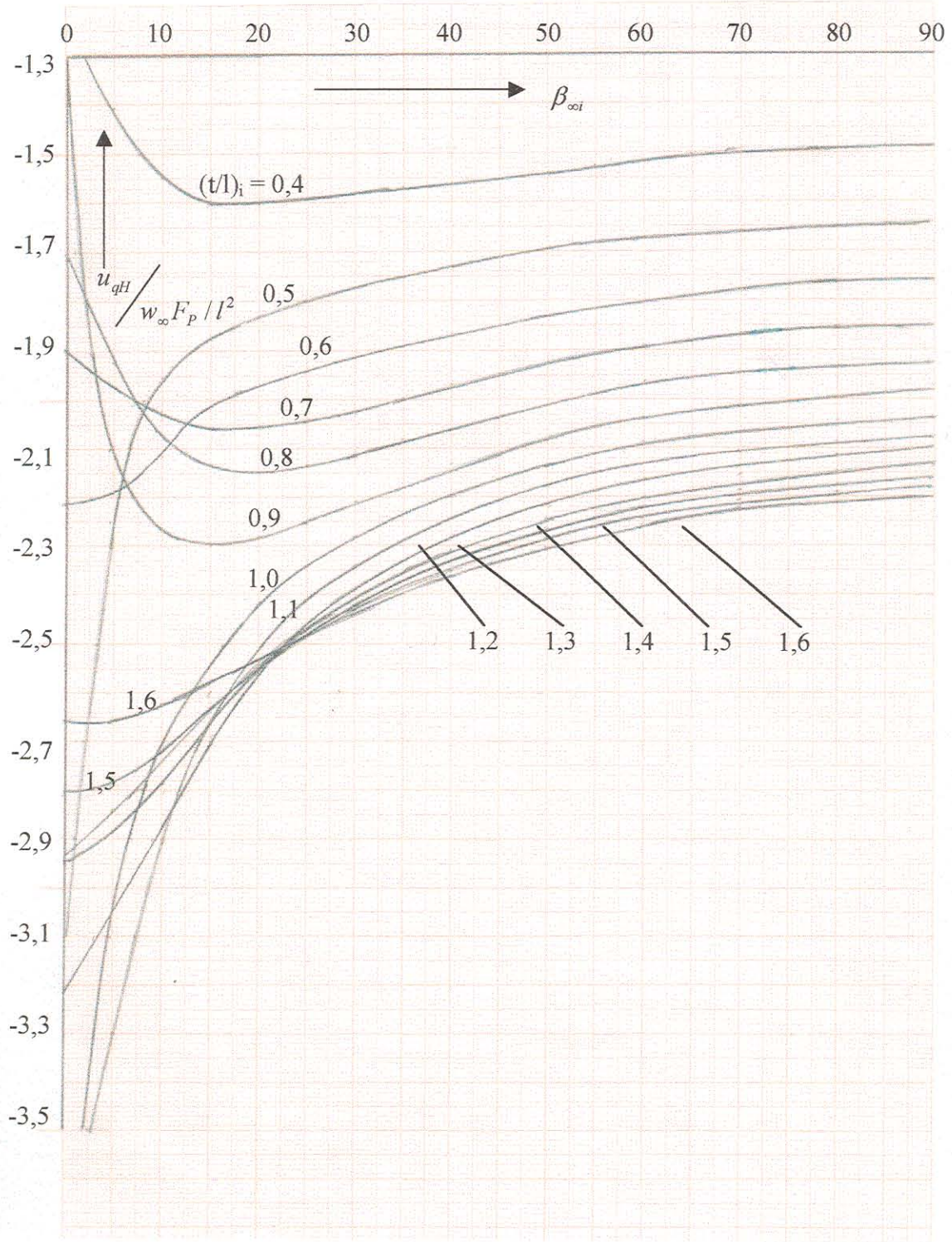




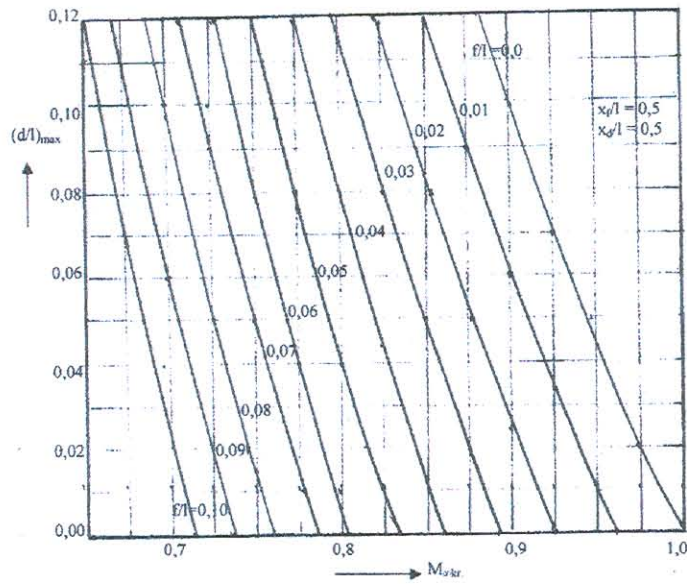
**Anlage 6.12** Induzierte Geschwindigkeiten durch die Quell-Senkenverteilung  $v_{qH} / (w_{\infty} F_p / l^2)$  an der Hinterkante des Profils Q 50.



**Anlage 6.13** Induzierte Geschwindigkeiten durch die Quell-Senkenverteilung  $u_{qv} / (w_{\infty} F_p / l^2)$  an der Vorderkante des Profils Q 50,

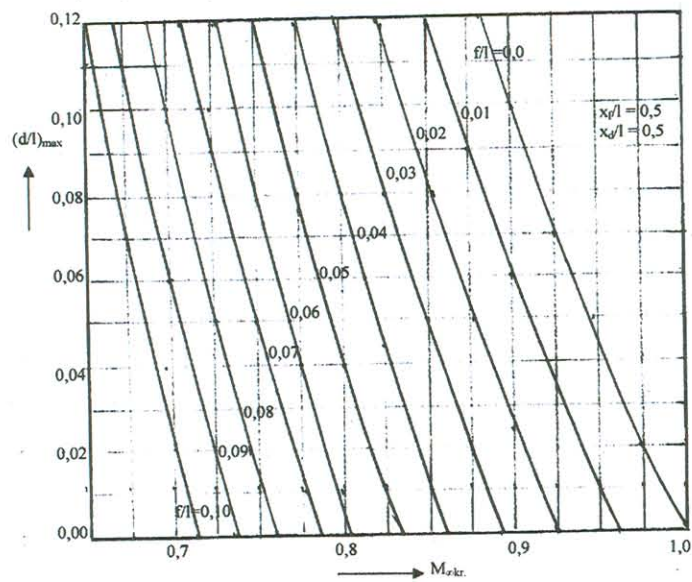


**Anlage 6.14** Induzierte Geschwindigkeiten durch die Quell-Senkenverteilung  $u_{qH} / (w_{\infty} F_P / l^2)$  an der Hinterkante des Profils Q 50.



**Anlage 6.15** Maximale relative Profildicke  $d/l$  in Abhängigkeit von der kritischen Anströmmachzahl  $M_{\infty,kr}$  mit der Skelettlinienwölbung  $f/l$  als Parameter bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung.





**Anlage 6.15** Maximale relative Profildicke  $d/l$  in Abhängigkeit von der kritischen Anströmmachzahl  $M_{\infty,kr}$  mit der Skelettlinienvölbung  $f/l$  als Parameter bei aerodynamisch stoßfreier Anströmung.



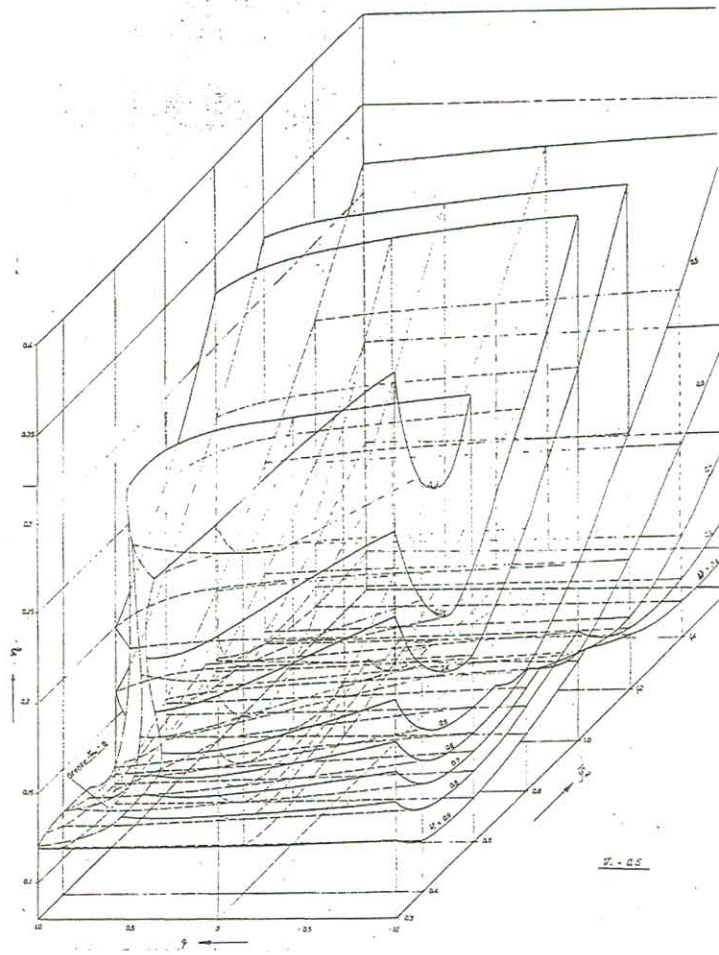


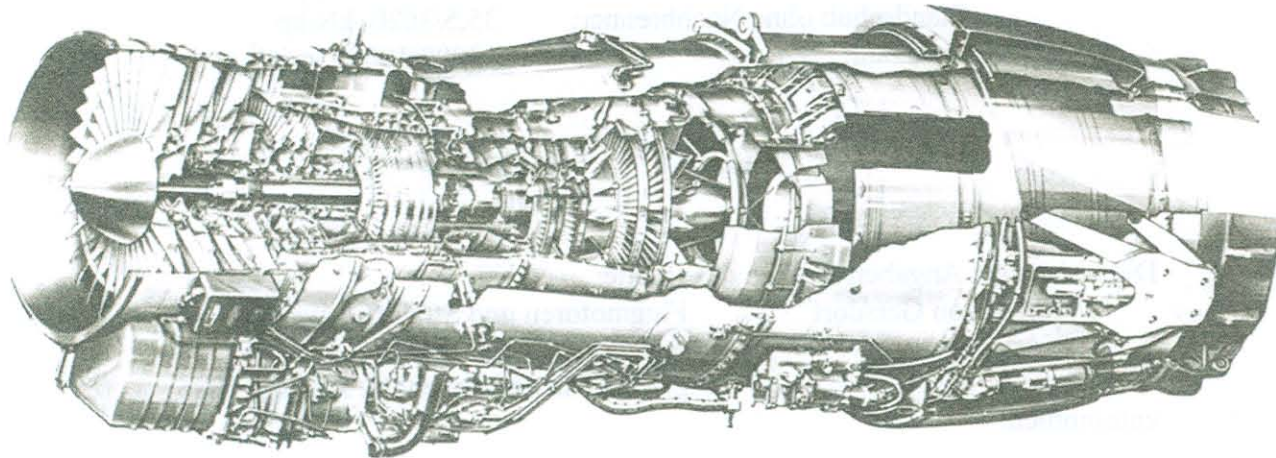
Abb.: 5.5.2.1 Absoluter Stufenverlust in Abhängigkeit vom Drallverteilungsexponenten, der Lieferzahl am Kontinuitätsradius und dem Radienverhältnis der Stufe.





**Einige Betrachtungen über die erste Stufe des Niederdruckverdichters  
für das  
Strahltriebwerk RB 199-34R**

---



Schnittperspektive des Dreiwellen-Zweistrom-Strahltriebwerkes Turbo Union RB 199-34R mit dem das Mehrzweckflugzeug Tornado ausgerüstet ist. Die im Bild gezeigte Prototypenausführung unterscheidet sich von den Serienausführungen Mk 101 und Mk 103 hauptsächlich im Geräteteil.

Das Strahltriebwerk RB 199-34R hat am Ende des Nachbrenners eine Schubumkehrvorrichtung, deren Klappen im eingefahrenen Zustand sich der Form des Flugzeuges anpassen.

Das Strahltriebwerk RB 199-34 R ist eine gemeinsame Entwicklung von Rolls Royce (England), MTU (Deutschland) und Fiat (Italien).

In den einzelnen Ländern wurden folgende Baugruppen entwickelt:

- Rolls- Royce      Niederdruckverdichter, Brennkammer, Hochdruckturbine, Turbinengehäuse, Nachbrenner.
- MTU                Mitteldruckverdichter, Hochdruckverdichter, Mitteldruckturbine, Zwischengehäuse, Getriebe, Geräteträger, Schubumkehr, Mantelstromgehäuse.
- Fiat                Niederdruckturbine, Abgassdiffusor, hinteres Strahlrohr, Schubdüse.

Für das Triebwerk sind folgende Daten bekannt:

Verdichter:

Luftdurchsatz :	70 kg/s	Stufenzahl:	3A + 3A + 6A
Druckverhältnis:	23	Bypassverhältnis	> 1
Brennkammer:	Ringbrennkammer	Turbine	1A + 1A + 2A

Abmessungen des Triebwerkes:

Länge: 3200 mm  
 Durchmesser: 870 mm  
 Trockenmasse: 1000 kg

Stand Schub mit Nachbrenner: 71/7245 kN/kp  
 Stand Schub ohne Nachbrenner: 35,5/3620 kN/kp  
 Drehzahl: 12000/19000 min<sup>-1</sup>

Einsatz: Tornado  
 Panavia

Die bisherigen Angaben wurden der Quelle:

/1/ Kyrill von Gersdorf Flugmotoren und Strahltriebwerke  
 Kurt Grasmann Bernard u. Graef- Verlag  
 2. ergänzte und erweiterte Auflage 1985

entnommen.

Da die erste Stufe des Niederdruckverdichters ohne Vorleitgitter konzipiert ist, deutet diese Tatsache auf ein Laufgitter mit Überschall- und Unterschallanströmung hin. Um einen Überblick über die dessen Auslegungskonzeption zu erhalten genügt die Kenntnis folgender Werte:

- Die Drehzahl des Verdichterrades
- Der Luftdurchsatz durch den Verdichter
- Das Radienverhältnis  $r_i/r_a$  in der ersten Verdichterstufe.

Die ersten beiden Werte sind durch die Quelle /1/ bekannt.

Aus der Abbildung des Triebwerkes RB 199-34R auf Seite 1 (etwas verkleinerte Darstellung) ergeben sich folgende Abmessungen:

Nabendurchmesser am Verdichtereintritt  $d_i = 21$  mm  
 Außendurchmesser am Verdichtereintritt  $d_a = 56$  mm

Das Nabenverhältnis der Verdichterstufe am Eintritt beträgt dann:

$$v_i = \frac{r_i}{r_a} = \frac{21}{56} = 0,375$$

Damit ist es möglich, die wichtigsten Daten der Auslegungskonzeption für die erste Stufe des Niederdruckverdichters zu ermitteln. Die Größen der zu ermittelnden Werte werden durch die Genauigkeit der Bestimmung des Radienverhältnisses  $r_i/r_a$  aus der Triebwerksabbildung und vom angenommenen Druckverlust der angesaugten Luft im Verdichtereinlauf beeinflusst. Dadurch muss mit einem geringen Toleranzbereich bei den zu ermittelnden Werten gerechnet werden.

Die wichtigsten weiterhin angegebene Gleichungen und Abbildungen sind dem Buchmanuskript

/2/ g. Mäcker Die Grundlagen der Axialverdichter  
 entnommen.

Bei axialer Zuströmung der Luft zur ersten Verdichterstufe gilt unter der Voraussetzung eines kleinstmöglichen Außenradius der Verdichterstufe nach /2/ die Gleichung 5.6.4.5, die den Zusammenhang zwischen dem Radienverhältnis  $r_i/r_a$  und der Zuströmmachzahl  $M_0$  der Luft zur Verdichterstufe darstellt.

$$1 - \nu_i^2 = \frac{M_0 \left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \right]^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}}{\left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2 \right]^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}}$$

oder auch:

$$\frac{1 - \nu_i^2}{\left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} \right]^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}} = \frac{M_0}{\left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2 \right]^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}}$$

Mit  $\nu_i = 0,375$  und  $\kappa = 1,4$  wird:

$$0,49732 = \frac{M_0}{\left[ 1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2 \right]^{\frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)}}}$$

Die einzelnen Rechenwerte sind:

1	$M_0$	0,5	0,55	0,6	0,625	0,65	0,7
2	$(1 + 0,2M_0^2)^3$	1,15762	1,19927	1,23192	1,2531	1,27557	1,3223
3	$\frac{1}{2}$	0,4319	0,4611	0,48	0,4987	0,5178	0,529

Ein Vergleich der Werte zeigt, dass mit einer Anströmmachzahl der Luft zur ersten Verdichterstufe von

$$M_0 = 0,625$$

gerechnet werden kann.

Um eine weitere Einschätzung der Ersten Verdichterstufe vornehmen zu können, werden die Zustandswerte der angesaugten Luft am Eintritt der ersten Verdichterstufe angenommen.

$$p_0^* = 10330 \text{ kp} / \text{m}^2 = 101337,3 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$\text{Einlaufverlust} = 1337,3 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$p_0^* = 100000 \text{ N} / \text{m}^2$$

$$T_0^* = 288^0 \text{ K}$$

$$\rho^* = \frac{p^*}{RT^*} = \frac{100000}{9,81 * 29,27 * 288} = 1,20925 \text{ kg} / \text{m}^3$$

Mit den bekannten gasdynamischen Gesetzmäßigkeiten können somit die statischen Zustandswerte der angesaugten Luft am Eintritt der ersten Verdichterstufe angegeben werden:

$$p_0 = \frac{p_0^*}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}} = \frac{100000}{\left(1 + 0,2 * 0,625^2\right)^{3,5}} = 766852,7 \text{ N / m}^2$$

$$T_0 = \frac{T_0^*}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2} = \frac{288}{1 + 0,2 * 0,625^2} = 276,13^0 \text{ K}$$

$$\rho_0 = \frac{\rho_0^*}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}} = \frac{1,20925}{\left(1 + 0,2 * 0,625^2\right)^{2,5}} = 1,00194 \text{ kg / m}^3$$

Für die Schallgeschwindigkeit der angesaugten Luft gilt dann:

$$a = 20,02 \sqrt{T_0} = 332,6 \text{ m / s}$$

und für die axiale Zuströmgeschwindigkeit der Luft:

$$c_{ax0} = a M_0 = 332,6 * 0,625 = 207,8 \text{ m/s}$$

Für den Luftdurchsatz durch die erste Verdichterstufe gilt dann:

$$\dot{m} = c_{ax} \rho_a r_a^2 \pi (1 - v_i^2)$$

oder deren Außendurchmesser

$$r_a^2 = \frac{\dot{m}}{c_{ax} \rho_a \pi (1 - v_i^2)}$$

wobei der Luftdurchsatz mit  $\dot{m} = 70 \text{ kg/s}$  angegeben wurde.

$$r_a^2 = \frac{70}{207,8 * 1,00194 * 3,14 (1 - 0,375^2)} = 0,12459 \text{ m}^2$$

oder

$$r_a = 0,3529 \text{ m}$$

$$D_a = 0,7058 \text{ m}$$

Die Umfangsgeschwindigkeit am Außenradius des Laufgitters der ersten Verdichterstufe ist dann:

$$u_a = \frac{D_a \pi n}{60} = 442,7 \text{ m/s}$$

und die bezogene Umfangsgeschwindigkeit:

$$\frac{u_a}{\sqrt{T_0^*}} = \frac{442,7}{\sqrt{288}} = 26,09$$

Die Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters am Innenschnitt der ersten Verdichterstufe beträgt:

$$u_i = u_a v_i = 166 \text{ m/s}$$

Für die Machzahl der Relativgeschwindigkeit am Laufgittereintritt gilt nach /2/ Gl.: 5.6.4.13 am äußeren Stufenradius:

$$M_{w1a}^2 = \frac{\frac{M_0^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2} + \left( \frac{u_a}{\sqrt{T_0^*}} \right)^2 \frac{1}{\kappa R}}{1 - \frac{\frac{\kappa - 1}{2} M_0^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M_0^2}}$$

$$M_{w1a}^2 = \frac{\frac{0,625^2}{1 + 0,2 * 0,625^2} + 26,09^2 \frac{1}{1,4 * 9,81 * 29,27}}{1 - \frac{0,2 * 0,625^2}{1 + 0,2 * 0,625^2}} = 2,2043$$

oder

$$M_{w1a} = 1,4847$$

Löst man die obige Gleichung nach  $u / \sqrt{T_0^*}$  auf und setzt  $M_{w1} = 1$  erhält man

$$\frac{u}{\sqrt{T_0^*}} = 15,139$$

und das Verhältnis mit den Wert am Außenradius der Stufe ergibt das Radienverhältnis:

$$\frac{r}{r_a} = \frac{\frac{u}{\sqrt{T_0^*}}}{\frac{u_a}{\sqrt{T_0^*}}} = \frac{15,139}{26,09} = 0,583$$

Oberhalb dieses Radienverhältnisses wird die erste Verdichterstufe im relativen Strömungssystem mit Überschall und unterhalb dieses Radienverhältnisses mit Unterschall angeströmt.

Das Prinzip von Hamilton (I ; Abschnitt 3.3 ) besagt, dass am Innenradius der ersten Verdichterstufe bei verlustloser Strömung das Stabilitätskriterium

$$\psi_{th} = 2 \frac{\Delta w_u}{u} = 2$$

eingehalten werden muss. Zur Vermeidung von Nabentotwassergebieten sollte man hier

$$\psi_{thi} < 2$$

wählen. Das bedeutet, dass die Energieübertragung im Laufgitter an die Luft am Innenradius kleiner ist als die Energieübertragung an die Luft durch die Anwendung einer Kombination der Stoßgesetze am Außenradius der Stufe.

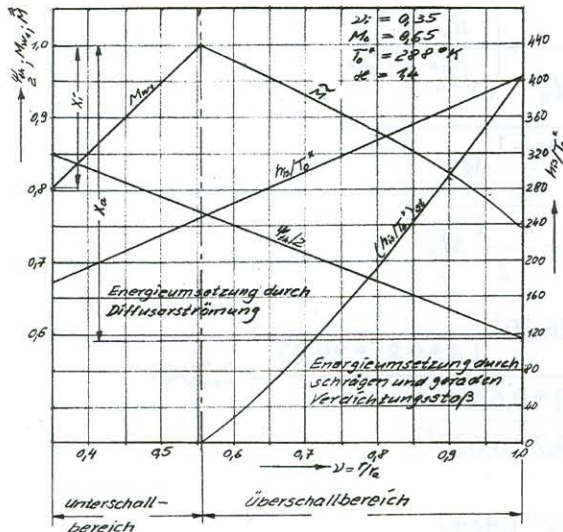


Abb.: 5.6.4.7 Charakteristische Werte einer Verdichterstufe mit Überschallanströmung Des Laufgitters.

Es ist zweckmäßig die Energieübertragung an das Strömungsmedium im Laufgitter über den Radius der ersten Stufe linear ansteigen zu lassen.

Damit ergeben sich zwei Strömungsbereiche.

Diese sind:

Bereich I):

von  $v_i$  bis  $v^*$

mit den Machzahlbereich

$M_{w1} < 1,0$  bis  $M_{w1} = 1,0$

Bereich II)

von  $v^*$  bis  $v_i = 1,0$

mit den Machzahlbereich

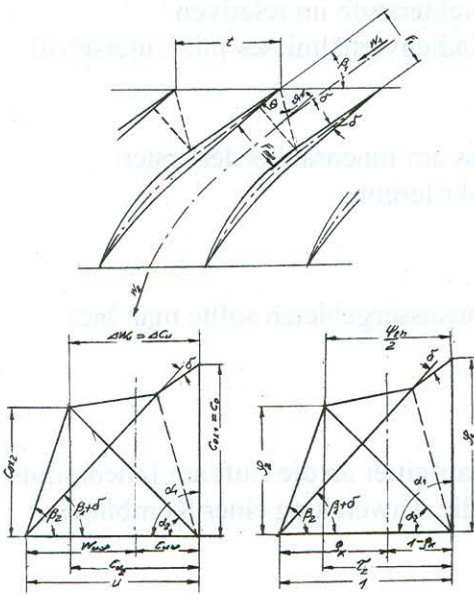
$M_{w1} = 1,0$  bis  $M_{w1a}$

Im Bereich I) erfolgt die Energieumsetzung an das Strömungsmedium im Laufgitter durch eine Diffusorströmung.

Im Bereich II) erfolgt die Energieumsetzung an das Strömungsmedium im Laufgitter

- durch eine Verdichtungsstoßkombination und
- durch eine Diffusorströmung.

Die Abb.: 5.6.4.7 nach /1/ zeigt als Beispiel diese Bereiche mit den Größen  $x_i$  und  $x_a$  als Reserve gegenüber dem Stabilitätskriterium der Strömung. (Die Ausgangswerte sind hier etwas anders als beim Triebwerk RB 199-34 R).



Die Abbildung 5.6.4.6 zeigt als Beispiel schematisch den Strömungskanal durch das Laufgitter und die Geschwindigkeitsvektordiagramme in absoluter und dimensionsloser Darstellung für den Bereich nach Abbildung 5.6.4.7. Dabei ist es durchaus denkbar, dass am Außenschnitt der ersten Stufe des Niederdruckverdichters die Reserve gegenüber dem Stabilitätskriterium  $x_a$  kleiner gehalten werden kann.

Der Axialgeschwindigkeitsverlauf  $c_{ax2}$  in der Rechnungsebene hinter dem ersten Laufgitter über den Radius bei linearer Energieübertragung an das Strömungsmedium im Laufgitter kann nach /2/ Gleichung 5.1.17 unter Einbeziehung der Pseudo-Stromlinien ermittelt werden. Die allgemeine Gleichung ist:

$$\left(\frac{c_{ax}}{u_a}\right)^2 = \varphi_a^2 + \alpha A \pm \beta B - C$$

Abb.: 5.6.4.6 Schematische Darstellung der Form der Laufgitterprofile mit den zugehörigen Geschwindigkeitsvektoren Diagrammen.

Für die Vorzeichen gilt:

- Strömungsebene vor Laufgitter
- + Strömungsebene hinter Laufgitter.

Die Größen A und B enthalten die kinematischen Größen nach Abbildung 5.6.4.6 /2/.

Die Größe C enthält den Temperaturverlauf des Fördermediums in der Strömungsebene vor Laufgitter (entfällt für die erste Stufe des Niederdruckverdichters).

Die Korrekturglieder  $\alpha$  und  $\beta$  berücksichtigen die induzierten Geschwindigkeiten durch die Umströmung der Lauf- und Leitgitter der einzelnen Stufen des Niederdruckverdichters.

Die Anwendung der Kombination von Stoßgesetzen im relativen Strömungssystem erfordert eine konstante Anströmmachzahl zum Laufgitter. Aus der Gleichung für die Axialgeschwindigkeitsverteilung in der Strömungsebene vor dem Laufgitter ergibt sich dann die Bedingung:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{A}{B}$$

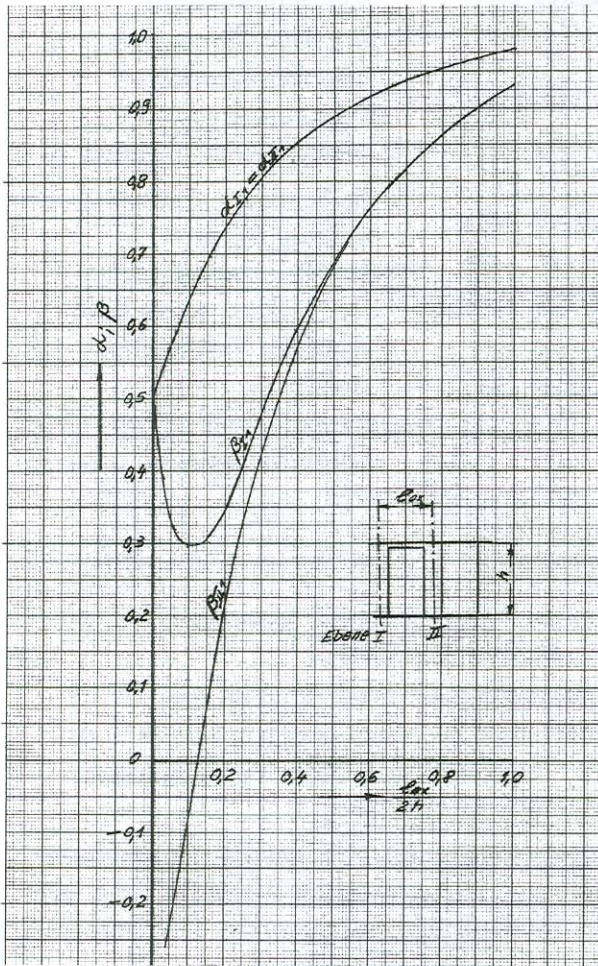


Abb.: 5.6.4.4 Korrekturwerte der Drallströmung für eine Einzelstufe ohne Vorleitgitter (Einzelstufe)

Die Abbildung 5.6.4.4 /2/ zeigt zum Beispiel die Korrekturfaktoren  $\alpha$  und  $\beta$  und die Abbildung 5.6.4.8 /2/ die Auswertung der obigen Gleichung für eine Einzelstufe (ohne nachgeschaltete Verdichterstufen).

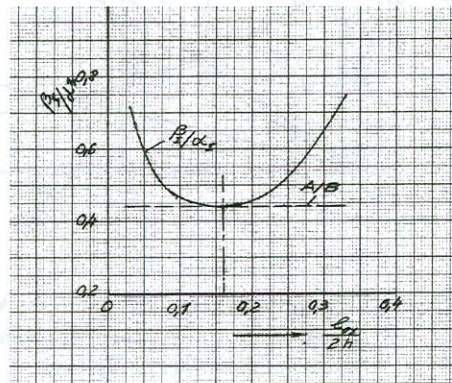


Abb.: 5.6.4.8 Zur Ermittlung des Seitenverhältnisses einer Stufe (Einzelstufe)

Eine Erweiterung auf einen mehrstufigen Niederdruckverdichter ist mit dem Verfahren von Schröder nach /2/ Abschnitt 5.2 /2/ und den Ausführungen nach /2/ auf den Seiten 139 bis 143 unproblematisch.

Die Abbildung 5.6.4.8 ergibt zum Beispiel für eine Einzelstufe ein Seitenverhältnis von

$$\frac{l_{ax}}{r_a - r_i} = \frac{l_{ax}}{h} \approx 3,3$$

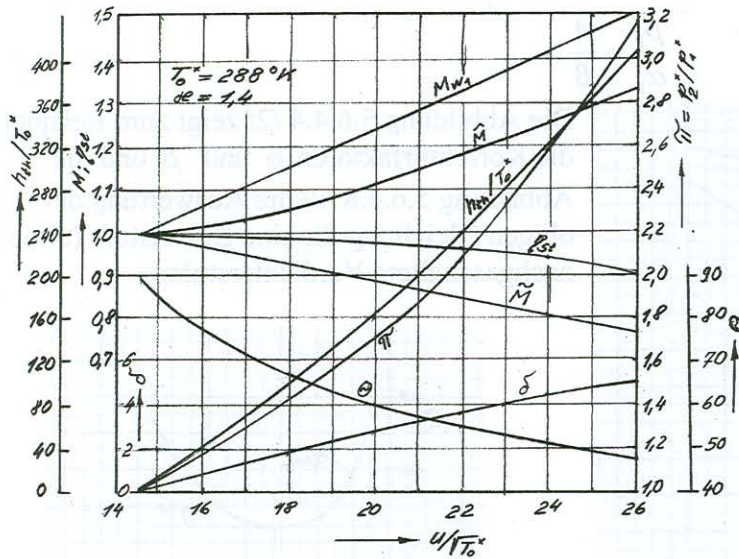
was an die sogenannte Breitbandschaufel erinnert. Bei Berücksichtigung nachgeschalteter



Stufen wird das Verhältnis  $l_{ax}/h$  schlanker was auch auf der Triebwerksabbildung auf Seite 1 erkennbar ist.

In /1/ sind keine Angaben enthalten die einen Rückschluss auf die Reserve  $x_i$  und insbesondere  $x_a$  nach Abbildung 5.6.4.7 gegenüber der Stabilitätsgrenze der Strömung zulassen. Weitere Betrachtungen dazu gehören in das Gebiet der Spekulationen. Aussagen über die erste Stufe des Niederdruckverdichters können somit nur für den Teil dieser Stufe gemacht werden, der im relativen Strömungssystem mit Überschall des Fördermediums angeströmt wird.

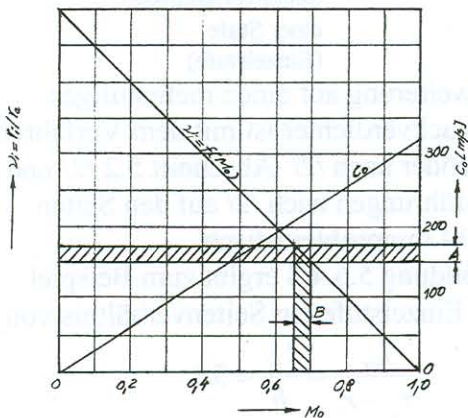
Alle durch die Anwendung der Verdichterstoßkombination erhaltenen Zustandswerte des Fördermediums lassen sich in Abhängigkeit von der bezogenen Umfangsgeschwindigkeit  $u/\sqrt{T_0^*}$  darstellen. Die Abbildung 5.6.4.5 /2/ zeigt zum Beispiel einige dieser Werte wie:



- die Anströmmachzahl  $M_{w1}$
- die Anströmmachzahl  $\hat{M}$  nach den schrägen Verdichtungsstoß
- die Anströmmachzahl  $\tilde{M}$  nach den geraden Verdichtungsstoß
- den Stoßwirkungsgrad  $\eta_{St}$
- die bezogene Energieübertragung  $h_{th}/T_0^*$
- das Druckverhältnis  $\pi$
- der Stoßfrontwinkel  $\Theta$  des schrägen Verdichtungsstoßes
- der Keilwinkel  $\delta$  am Laufgittereintritt.

Abb.: 5.6.4.5 Einige Werte der Luft durch die Verdichtungsstoßkombination in Abhängigkeit der bezogenen Umfangsgeschwindigkeit des Laufgitters.

Damit können alle Werte, auch die Zustandswerte des Fördermediums, jedem Radius des Laufgitters zugeordnet werden.



Die Abbildung 5.6.4.1 nach /2/ zeigt die Zusammenhänge zwischen dem Nabenverhältnis  $v_i = r_i/r_a$  der ersten Stufe eines Verdichters, der Anströmmachzahl  $M_0$  und der Strömungsgeschwindigkeit  $c_0$  des Fördermediums zum Laufgitter. Die ermittelten Werte für die erste Stufe des Niederdruckverdichters des Triebwerkes RB 199- 34 R wurden hier eingetragen,

Abb.: 5.6.4.1 Zusammenhang zwischen der Machzahl  $M_0$  und dem Radienverhältnis  $v_i$  ( $c_0$  für INA-Normalatmosphäre)

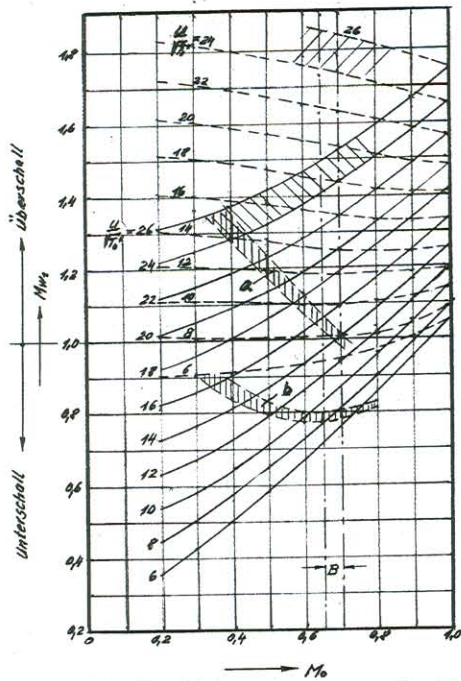


Abb.: 5.6.4.3 Erreichbare Anströmmachzahlen  
Am Laufgittereintritt.

Die Abbildung 5.6.4.3 /2/ zeigt die in der Verdichterstufe erreichbaren Anströmmachzahlen des Laufgitters im relativen Strömungssystem. Auch hier wurden die Werte für die erste Stufe des Niederdruckverdichters für das Triebwerk RB 199-34R eingetragen. Es zeigt sich hier, dass die Ausgangswerte für die Konzipierung der ersten Niederdruckstufe für das Triebwerk RB 199-344R optimal sind und die Strömungsmachzahl am Innenradius bei einem Kleinstwert von  $M_{wi} \approx 0,8$  liegt die bei Unterschallströmung im Relativsystem des Laufgitters noch realisierbar ist.

Über die Profilierung der Laufgitter siehe Abschnitt 6.7 im Konzept des Buches:

G. Mäcker; Die Grundlagen der  
Axialverdichter.

