Theoretische Mechanik Sommersemester 2020

Prof. Dr. W. Strunz, PD Dr. G. Plunien, Institut für Theoretische Physik, TU Dresden
http://tu-dresden.de/physik/tqo/lehre

Aufwärmübungen

1. Aus Galileis "Discorsi":

Beweisen Sie Theorem VI, Proposition VI aus Galileis *Discorsi* von 1638:

Werden vom höchsten Punkt eines aufrechten Kreises beliebige Sehnen gezeichnet [z.B. AB, AC in der Figur], *so ist die Zeit, die ein Körper braucht, um aus der Ruhe startend eine solche schiefe Ebene zu durchgleiten für alle Sehnen gleich* [und damit gleich der Fallzeit durch den Kreis].

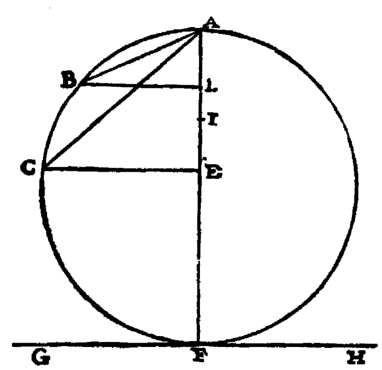

Fig. 56

2. Aus Huygens' "Über die Centrifugalkraft"

Beweisen Sie Lehrsatz XVII aus Huygens' *Über die Centrifugalkraft* von 1703
(er war mit den Geheimnissen der Kreisbewegung schon seit etwa 1670 vertraut):

Eine vom Mittelpunkte (A) *eines vertical stehenden Kreises an einem Faden herabhängende Kugel vermag auf der Peripherie jenes Kreises nicht zu rotiren, falls nicht der Faden das Sechsfache des angehängten Gewichts zu tragen im Stande ist.*

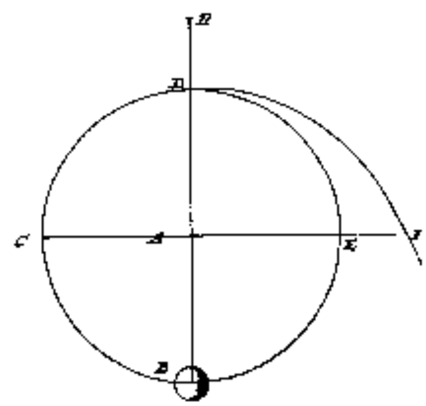

Fig. 23.

– bitte wenden –

3. Drittes Keplergesetz für Kreisbahnen:

Nutzen Sie Ihre Kenntnisse über die Zentrifugalkraft (siehe z.B. 2. Aufgabe) um aus dem 3. Keplerschen Gesetz, angewandt auf Kreisbahnen, die Abstandsabhängigkeit der Gravitationskraft herzuleiten - genau so, wie es auch schon Newton gemacht hat. Überlegen Sie sich auch, wie ein "verallgemeinertes 3. Keplergesetz" für Kreisbahnen in Zentralkraftfeldern mit Potential $U(r) = -\frac{\kappa}{r^\alpha}$ lauten würde, und betrachten Sie speziell den Fall des dreidimensionalen harmonischen Oszillators $\alpha = -2$, $(\kappa < 0)$.

4. Frühlingsanfang!

Am 20. März war astronomischer Frühlingsanfang (Tagundnachtgleiche, Äquinoktium).

Genauer finden Sie in einem astronomischen Kalender für 2020/2021 die Daten (MEZ):

Frühling 2020	Sommer 2020	Herbst 2020	Winter 2020	Frühling 2021
20.03., 04:49 Uhr	20.06., 22:44 Uhr	22.09., 14:31 Uhr	21.12., 11:02 Uhr	20.03., 10:38 Uhr

Der Frühlingsanfang ist astronomisch definiert als der Zeitpunkt, in dem die Erde auf ihrer Keplerbahn durch jene Ebene tritt, in welcher die Sonne liegt und welche senkrecht zur Polachsenrichtung der Erde steht (daher sind an diesem Datum Tag und Nacht überall auf der Erde gleich lang, auf der Nordhalbkugel sind von nun an die Tage länger). Sommeranfang und Winteranfang (Sonnenwende, Solstitium) gehören entsprechend zum längsten bzw. kürzesten Tag. Der dem Frühlingsanfang zugeordnete Polarwinkel der Keplerellipse sei φ_F. Die Anfänge von Sommer, Herbst und Winter sind dann die Zeitpunkte mit Polarwinkel $\varphi_F + \frac{\pi}{2}$, $\varphi_F + \pi$ beziehungsweise $\varphi_F + \frac{3\pi}{2}$ (machen Sie eine Skizze).

Sie erkennen an den Daten, dass die Jahreszeiten unterschiedlich lang sind, was zeigt, dass die Erdbahn eine echte Ellipse mit Polarkoordinatendarstellung $r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$ ist (1. Keplergesetz). Andererseits sind die Unterschiede nur klein, was darauf hinweist, dass die Exzentrizität ε klein ist, so dass Sie bei den folgenden Rechnungen $1/(1+\varepsilon\cos\varphi)$ durch $(1-\varepsilon\cos\varphi)$ nähern können (warum?).

a) Zeigen Sie unter Verwendung des 2. Keplergesetzes (Flächensatz), dass in kleinster Ordnung in der Exzentrizität näherungsweise gilt:

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) - 2\varepsilon(\sin\varphi(t_2) - \sin\varphi(t_1)) \approx 2\pi\frac{t_2 - t_1}{T},$$

wobei T die Zeitdauer zwischen zwei Frühlingsanfängen ist.

b) Bestimmen Sie aus den Kalenderdaten T, ε und den Winkel φ_F (bezogen auf den Polarwinkel $\varphi = 0$ des Perihels).

c) Schätzen Sie ab, an welchem Tag die Erde der Sonne am nächsten ist.