

Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme

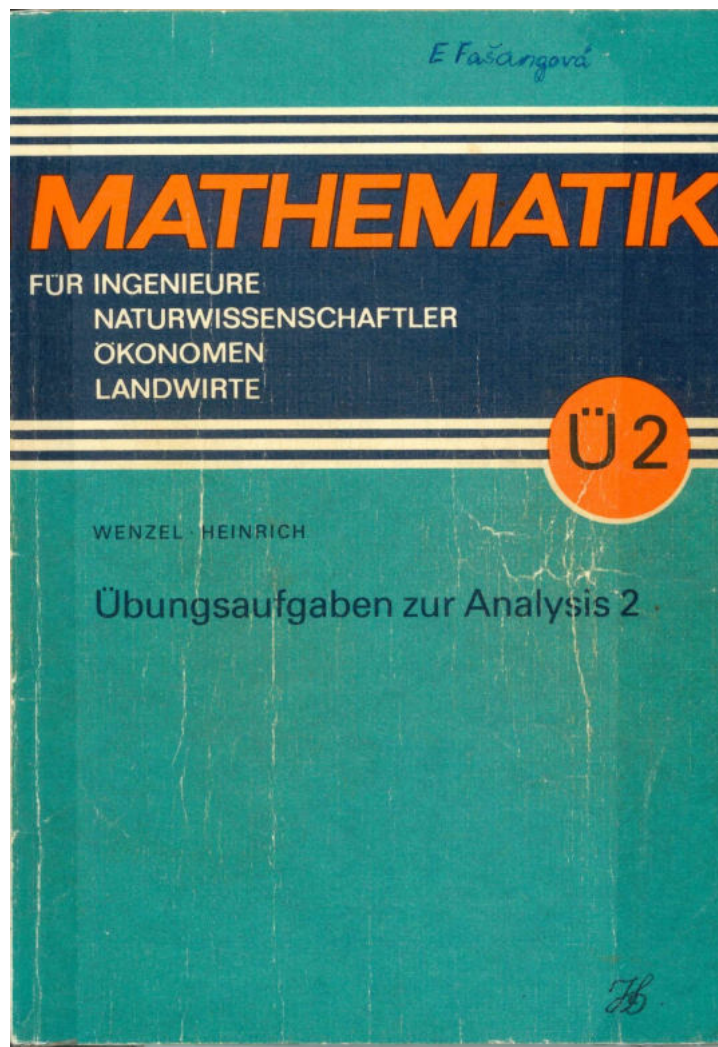
Vorrechnenübung zu Mathematik 3 für BIW/H/GG

an der Technischen Universität Dresden

im Wintersemester 2024/25

Eva Fašangová

nach Kapiteln 25 und 26 aus der Aufgabensammlung



- $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0,$
- $4y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad 2y'(0) = 1,$
- $z'' + 4z' + 29z = 0, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = 15,$
- $4y'''' + 12y'' + 9y' = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = -3,$
- $y''' - 3y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4, \quad y''(0) = 7,$
- $m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \text{Zahlenwerte: } m = 50 \text{ g, } k = 0,5 \text{ Ns/m, } c = 0,45 \text{ N/m, } x_0 = 2 \text{ cm, } (N = \text{kg ms}^{-2}). \text{ Nach welcher Zeit } T \text{ ist der Ausschlag } x(t) \text{ auf } (1/100) \text{ mm zurückgegangen?}$
- Wie f), jedoch $k = (1/6) \text{ Ns/m}$. Für welches (möglichst kleine) T gilt $|x(t)| \leq (1/100) \text{ mm}$ für alle t mit $t \geq T$?

25.7. Man löse die folgenden linearen inhomogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

25.7. a)

a) $y'' + 4y' - 5y = 2x$,

b) $y''' - y' = -2x$,

25.7. b)

25.7. c)

c) $y^{(4)} + 4y'' = x(1 - x^2)$,

d) $\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = 2t$,

25.7. d)

25.7. e)

e) $y''' - 7y'' + 6y' = \cos x$,

f) $y''' + 2y'' + y' = 2 \sin x$,

25.7. fg)

g) $\ddot{y} + 9y = \cos(3t)$,

h) $r^{(4)} + 2r'' + r = \cos \varphi$,

i) $y^{(4)} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y = \cos(2x)$,

j) $\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 4 \cosh(2t)$,

25.7. hj)

k) $y'' - 4y' + 13y = e^{2x} \sin(3x)$,

l) $y'' - 2y' - 8y = 4 + 3e^{4x} - 18xe^{-2x} + 20 \sin(2x)$,

m)* $y'' - 4y = (x^2 + 1) \cos x$,

25.7. iklmn)

n)* $y'' + 2y' + y = \cos^2 x \cdot \sin x$.

25.8.

25.8. Man löse die folgenden Anfangswertaufgaben:

a) $16y'' + 8y' + y = -80$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$,

b) $y'' + 2y' + 5y = 5x + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$,

c) $y''' - 4y'' - 3y' + 18y = 8e^{2x} - 54x^2 + 63$, $y(0) = 10$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 5$,

d) $y''' + 4y' = 4x - 8$, $y(\pi/2) = (1/8)\pi^2$, $y'(\pi/2) = \pi/2$, $y''(\pi/2) = 0$,

e) $m\ddot{x} + kx = F(t)$, $m > 0$, $k > 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ (erzwungene Schwingung), wobei α $F = \text{const} = F_0$; β) $F = at$ ($a > 0$); γ) $F = F_0 \exp(-\alpha t)$, $\alpha > 0$,

f)* $(m_1 + m_2)\ddot{y} + k\dot{y} + cy = (m_1 + m_2)g + Z \cos(\omega t)$, $c = 3EJ/l^3$, $k > 0$, $Z = m_2 r \omega^2$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$ [Auf dem Balken von 25.1. g) wird die Kraft F im Schwerfeld durch einen Motor mit der Masse m_1 und von einer Punktmasse m_2 erzeugt, die sich auf der Motorschwungscheibe im Abstand r von der Achse befindet. Der Rotor des Motors dreht sich mit der Kreisfrequenz ω . Die Durchbiegung $y(t)$ an der Stelle $x = l$ führt erzwungene Schwingungen aus, wobei der Balken wie eine (masselose) Feder mit der Federkonstanten c (siehe Ergebnis von 25.1. g)) wirkt, und die Reibungskraft $k\dot{y}$ und die Zentrifugalkraft Z vorliegen.] Zahlenwerte: $l = 1 \text{ m}$, $EJ = 6,5 \cdot 10^4 \text{ Nm}^2$, $m_1 = 12 \text{ kg}$, $m_2 = (1/2) \text{ kg}$, $r = 30 \text{ cm}$, $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$, $k = 156,125 \text{ Ns/m}$, $\omega = 2\pi n$ mit $n = 3600$ Umdrehungen pro Minute.

g)* $m\ddot{x} + cx = g(x, \dot{x})$ ($c > 0$, $R > 0$), wobei $g(x, \dot{x}) = -R(\dot{x}/|\dot{x}|)$ für $-\infty < x < +\infty$, $\dot{x} \neq 0$; $g(x, \dot{x}) = cx$ für $|x| \leq (R/c)$, $\dot{x} = 0$; $g(x, \dot{x}) = 0$ für $|x| > (R/c)$, $\dot{x} = 0$; $x(0) = x_0 > (R/c)$, $\dot{x}(0) = 0$ (freie Schwingung, Dämpfung durch Coulombsche Reibung).

25.9. Welchen Ansatz macht man jeweils für eine partikuläre Lösung von

a) $y^{(4)} - y''' + 3y'' + 5y' = g(x)$, wobei $g(x)$ gleich ist $\alpha) 2x^2 + 3x^3$; $\beta) 2e^{-x}$; $\gamma) (4x - 5)e^{-x}$; $\delta) 3x \cos(2x)$; $\epsilon) e^x \sin x$; $\zeta) e^x(4 \sin(2x) - 3 \cos(2x))$; $\eta) 4xe^x \cos(2x)$; $\theta) 2 + \cosh x$; $\iota) \sinh^2 x$,

b) $y''' + 4y'' + 13y' = g(x)$, wobei $g(x)$ gleich ist $\alpha) 36 - xe^{3x}$; $\beta) e^{-2x} \cos(3x)$; $\gamma) 2 \sinh(2x) \cdot \sin(3x)$; $\delta) \{e^x + e^{2x}\}^2 \cos(3x) - \pi^{1/2}$,

c) $x^{(3)} + \ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = g(t)$, wobei $g(t)$ gleich ist $\alpha) t^2 e^{-t}$; $\beta) e^{-t} \cos(2t)$; $\gamma) e^{-t} + \cos(2t)$; $\delta) t^2 \sin(2t)$,

d) $y''' + y'' - 5y' + 3y = g(x)$, wobei $g(x)$ gleich ist $\alpha) x^2 \exp(-3x)$; $\beta) 2e^x$; $\gamma) -4xe^x$,

- e)* $\sum a_v y^{(v)} = g(x)$, $v = 0, 1, \dots, 6$, a_v reell, wobei $\sum a_v y_h^{(v)} = 0$ die Lösung $y_h = x^2 \exp(2x) \cos(3x)$ besitzt und $g(x)$ gleich ist $\alpha) \exp(2x) \sin(3x)$; $\beta) \exp(2x) + \sin(3x)$; $\gamma) x \exp(2x) \cos x$; $\delta) x^2 \exp(2x) \cos(3x)$; $\epsilon) \cos(3x) + \sin(2x)$.

25.10. Die folgenden Eulerschen Differentialgleichungen und Anfangswertaufgaben sind zu lösen. Die unabhängige Variable der Lösungsfunktion wird stets als positiv vorausgesetzt.

25.10. a)

- a) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 2x$, b) $x^2 y''' - xy'' + y' = 3x^2$,
 c) $4x^2 y'' - xy' + y = x^2 + \ln x$, d) $x^4 y^{(4)} + 3x^2 y'' - 7xy' + 8y = 0$,
 e) $x^2 y'' + 5xy' + 3y = 0$, $y(1) = y'(1) = 1$,
 f) $x^2 y'' + xy' - y = 2x$, $y(1) = y'(1) = 2$,
 g) $t^2 \ddot{x} - t\dot{x} + x = \ln t$.

25.10. bcdefg)

25.11. Mittels der Methode der Variation der Konstanten löse man:

- a) $y'' - 4y' + 4y = 9xe^{2x} \ln x$, b) $y'' + 2y' + y = -e^{-x} x^{-2}$,
 c) $y'' + y = 2(\cos x)^{-1}$, $|x| < \pi/2$, d) $y'' + 3y' + 2y = (1 + e^x)^{-1}$,
 e) $y'' - 2y' + 5y = e^x \{\cos(2x)\}^{-1}$, f) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \cos x$,
 g) $xy'' + 2y' = \sin x$, h) $y'' - 6y' + 9y = x^{-3}(9x^2 + 6x + 2)$,
 i) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = \cos x$, j)* $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 9te^{2t} \ln t$,
 k)* $m\ddot{x} + kx = F(t)$, $m > 0$, $k > 0$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ (erzwungene Schwingung), wobei
 $\alpha) F(t) = F_0$ für $0 \leq t \leq T$, $F(t) = 0$ für $t > T$;
 $\beta) F(t) = (F_0/T)t$ für $0 \leq t \leq T$, $F(t) = F_0$ für $t > T$;
 $\gamma) F(t) = (F_0/T)t$ für $0 \leq t \leq T$, $F(t) = 0$ für $t > T$.

25.12. Man löse die folgenden Randwertaufgaben:

- a) $y'' + \pi^2 y = 0$ mit $\alpha) y(0) = 0$, $y(3/4) = 0$; $\beta) y(0) = 1$, $y(1) = 0$;
 $\gamma) y(0) = 0$, $y(1) = 0$,
 b) $EJw''' + Fw' = 0$, $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $EJw''(0) - Fw(l) = Fa$ (Druckkraft $F > 0$, konstante Biegesteifigkeit EJ , Einspannung an der Stelle $x = 0$, außermittiger Angriff von F an der Stelle $x = l$; Angriffshebellänge a). Für welches a liegt eine Eigenwertaufgabe vor (Bild 25.3)?
 c) $EJw^{(4)} + Fw'' = q_1 \sin(\pi x/l) + q_2 \sin(2\pi x/l)$, $w(0) = w''(0) = w(l) = w''(l) = 0$ (beiderseits gelenkig gelagerter Druckstab mit spezieller Querbelastung, Bild 25.4).

25.12. b)

25.12. c)

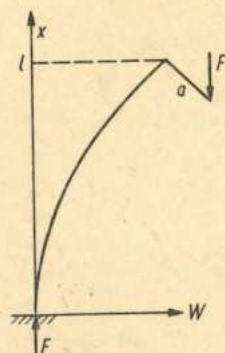


Bild 25.3

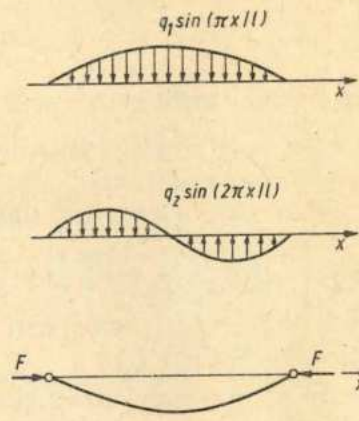


Bild 25.4

26. Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen

(Bd. 7/1, 4.)

26.1. Man bestimme die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichungssysteme:

26.1. a) a) $\dot{x} - 2x - 8y = 0, \quad \dot{y} - 3x + 8y = 0, \quad$ b) $\dot{x} = -5x + 3y, \quad \dot{y} = -15x + 7y, \quad$ 26.1. b)

c) $\dot{x} - 2x = 0, \quad \dot{y} - 2x - y + 2z = 0, \quad \dot{z} + x - 2z = 0, \quad$
26.1. c) d) $2y_1'' + 2y_2' + y_1 - 5^{1/2}y_2 = 0, \quad 2y_2'' + 2y_1' + 5^{1/2}y_1 + 11y_2 = 0, \quad$ 26.1. cd)

e)* $y_\mu = -(EJ)^{-1} \sum_{\nu=1}^3 \{G(x_\mu, x_\nu) m_\nu \ddot{y}_\nu\} \quad (\mu = 1, 2, 3)$ mit der Greenschen Funktion $G(x, \bar{x})$

aus 25.13. b β) und $x_\nu = \nu(l/4)$, ($\nu = 1, 2, 3$). Zahlenwerte: $m_1 = m_3 = 10 \text{ kg}$, $m_2 = 21 \text{ kg}$, $EJ = 6,4 \cdot 10^4 \text{ Nm}^2$, $l = 3 \text{ m}$. Es ist zweckmäßig, bei der Bestimmung von λ und d des Ansatzes $y = d \exp(\lambda t)$ zunächst $\tilde{\lambda} = \lambda^{-2} \cdot 768 EJ l^{-3}$ und $\tilde{d} = Md$ zu bestimmen, wobei die Elemente der quadratischen Matrix M in der Hauptdiagonale gleich m_1 bzw. m_2 bzw. m_3 und außerhalb der Hauptdiagonale gleich null sind. Eine Lösung für $\tilde{\lambda}$ ist gleich -6 kg . [Beiderseits gelenkig gelagerter (masseloser) Balken mit der konstanten Biegesteifigkeit EJ , der an den Stellen x_ν Punktmassen m_ν trägt, die jeweils nach dem Weg-Zeit-Gesetz $y_\nu(t)$ freie gekoppelte Schwingungen ausführen.]

26.2. Man bestimme die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen Differentialgleichungssysteme:

a) $y_1' + y_2' = y_1 + y_2 + 1, \quad y_1' - y_2' = 7y_1 - y_2,$

26.2. b) b) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x + e^t + e^{-t},$

c) $-5y_1' = 5y_1 + 6y_2 + 9 \sin(2x), \quad 3y_2' = 5y_1 + 3y_2 - 15xe^{-x},$

26.2. c) d) $L_1 \dot{I}_1 + M \dot{I}_2 + R_1 I_1 = U, \quad M \dot{I}_1 + L_2 \dot{I}_2 + R_2 I_2 = 0, \quad U = a \sin(\omega t), \quad L_1 L_2 - M^2 > 0$ (Transformator, d.h. elektrisches Netzwerk, das aus zwei induktiv gekoppelten Schwingungskreisen besteht). In der Ergebnisformel sind einerseits alle additiven Glieder wegzulassen, die für $t \rightarrow \infty$ nach null streben, andererseits ist zum idealen Transformator überzugehen, d.h. $M^2 = L_1 L_2 - \varepsilon$ zu setzen und die Grenzübergänge $\varepsilon \rightarrow +0$ und $R_1 \rightarrow +0$ vorzunehmen. Welche Folgerung ergibt sich schließlich für die Amplitude der Spannung $U_2 = R_2 I_2$ am Widerstand R_2 (Bild 26.1)?

26.2. e) e) $\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \exp(3t) \end{pmatrix}, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix},$

f) $\ddot{x} + \dot{y} + x = e^t, \quad \ddot{y} + \dot{x} = e^{-t}.$

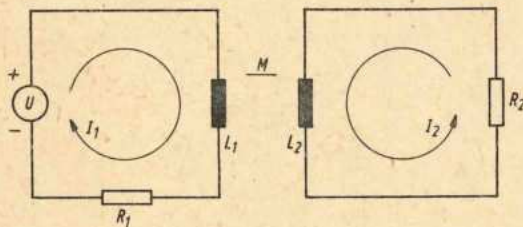


Bild 26.1

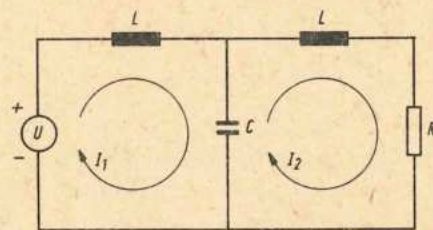


Bild 26.2